

UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY



Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

1710
BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE.

63390 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE,

PUBLIÉ
PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME QUARANTIÈME — ANNÉE 1912

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ
A LA SORBONNE.
—
1912

155281
15/6/20

QA

I

S59

E.40-41

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

CONTRIBUTION A LA THÉORIE DES FRACTIONS CONTINUES ARITHMÉTIQUES;

PAR M. ALBERT CHÂTELET.

I. D'après la théorie des fractions continues arithmétiques, étant donné un nombre irrationnel positif $\frac{\alpha}{\beta}$, on peut en déduire une *suite unique* d'entiers (*quotients incomplets*),

$$a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$$

positifs, non nuls, sauf peut-être a_0 définis par la propriété suivante : si l'on considère la fonction homographique de u

$$f_n(u) = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{u}}}}$$

le nombre manifestement irrationnel $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ (*quotient complet*) défini par l'égalité

$$(1) \quad \frac{\alpha}{\beta} = f_n\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)$$

est, quel que soit n , supérieur à 1. Il en résulte que la fraction (*réduite*)

$$\frac{P_n}{Q_n} = f_n(\infty)$$

a pour limite $\frac{\alpha}{\beta}$ lorsque n augmente indéfiniment.

Réciproquement, à toute suite d'entiers positifs correspond un nombre irrationnel unique ayant cette suite pour suite de ses quotients incomplets.

On sait l'importance des fractions continues; les réduites $\frac{P_n}{Q_n}$ constituent les *meilleures approximations rationnelles* du nombre $\frac{x}{y}$. Il est théoriquement facile de déterminer les quotients incomplets successifs, le nombre a_i étant la *partie entière* de $\frac{x_i}{y_i}$ (avec la convention $\frac{x_0}{y_0} = \frac{x}{y}$). Pratiquement cette recherche est malaisée et, sauf un petit nombre de cas, on ne connaît pas les développements en fractions continues des nombres incommensurables usuels. On ne connaît pas non plus de règles pratiques permettant d'effectuer les opérations élémentaires (addition, soustraction, etc.) sur des nombres développés en fraction continue.

La présente étude est une modeste contribution à cet ordre de recherches. J'ai tâché d'y établir un procédé méthodique pour faire une transformation homographique à coefficients entiers d'une fraction continue. J'ai divisé ce travail en trois parties; dans la première j'ai exposé quelques relations de la théorie des substitutions linéaires avec celle des fractions continues, ce qui m'a conduit à des notations et à des procédés de calcul assez commodes. Dans la deuxième partie, j'ai exposé la méthode de calcul des quotients incomplets d'un transformé homographique d'un nombre donné. Enfin dans la troisième partie j'ai montré comment, dans certains cas, cette méthode pouvait conduire à des *lois de succession* des quotients incomplets de certains nombres, notamment des fonctions homographiques (à termes entiers) de $e^{\frac{2}{n}}$.

Cette méthode de calcul, ainsi que quelques-unes de ses applications, avaient déjà fait l'objet d'une Note à l'Académie des Sciences ⁽¹⁾. J'y avais fait une légère omission que je suis heureux de pouvoir rectifier ici (*voir* n° 11).

Enfin j'avais indiqué dans cette même note une propriété des approximations rationnelles de deux incommensurables liées ho-

(1) *Comptes rendus* 30 mars 1910.

mographiquement. Je n'ai pas cru devoir la développer dans le présent article, quoiqu'elle soit une conséquence à peu près immédiate de la méthode de calcul exposée. Elle se rattacherait plutôt, en effet, aux fractions continues considérées comme méthodes d'approximation. Il y aurait alors lieu de faire une exposition systématique de la notion du *type* ⁽¹⁾ de l'approximation d'un nombre irrationnel, notion à laquelle on est fatalement conduit par l'application des idées de M. Borel sur la *hauteur* des nombres et sur la croissance des fonctions ⁽²⁾.

1. — SUBSTITUTIONS LINÉAIRES ET FRACTIONS CONTINUES.

2. La théorie des fractions continues est intimement liée à la théorie des substitutions linéaires qui permet d'en simplifier l'exposé et les calculs. Je vais rappeler brièvement quelques principes de cette théorie en même temps que les notations assez courantes que j'emploierai dans la suite.

Étant donnée une substitution linéaire de deux variables

$$\begin{array}{l} x = u y + v y', \\ x' = u' y + v' y'. \end{array} \quad \left| \begin{array}{cc} u & v \\ u' & v' \end{array} \right| \neq 0$$

(x, x' anciennes variables; y, y' nouvelles), je la représenterai soit par une seule lettre, soit par le tableau ⁽³⁾ (sans barres verticales) des coefficients rangés dans le même ordre que les termes du déterminant précédent. La relation entre les couples de nombres (ou points) $x, x'; y, y'$ sera indiquée par l'égalité symbolique

$$\frac{x}{x'} = \frac{u}{u'} \frac{v}{v'} \times \frac{y}{y'}.$$

Avec cette convention et d'après la règle ordinaire du produit

⁽¹⁾ J'emploie ce mot par analogie avec les *types de croissance* utilisés par M. Borel.

⁽²⁾ *Journal de Liouville*. 1903. *Leçons sur la théorie de la croissance* (Chap. I et Chap. V).

⁽³⁾ Pour une théorie générale des tableaux et ses applications aux formes, aux substitutions, etc., je renvoie à mon Mémoire (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1911).

de deux substitutions, les deux égalités

$$\begin{matrix} x \\ x' \end{matrix} = \begin{matrix} u & v \\ u' & v' \end{matrix} \times \begin{matrix} y \\ y' \end{matrix}, \quad \begin{matrix} y \\ y' \end{matrix} = \begin{matrix} u_1 & v_1 \\ u'_1 & v'_1 \end{matrix} \times \begin{matrix} z \\ z' \end{matrix}$$

entraînent l'égalité symbolique

$$\begin{matrix} x \\ x' \end{matrix} = \left(\begin{matrix} u & v \\ u' & v' \end{matrix} \times \begin{matrix} u_1 & v_1 \\ u'_1 & v'_1 \end{matrix} \right) \times \begin{matrix} z \\ z' \end{matrix}$$

ou

$$\begin{matrix} x \\ x' \end{matrix} = \begin{matrix} uu_1 + vv'_1 & uv_1 + v'v'_1 \\ u'u_1 + v'u'_1 & u'v_1 + v'v'_1 \end{matrix} \times \begin{matrix} z \\ z' \end{matrix}.$$

La règle pour faire le produit de deux substitutions représentées par des tableaux est en somme la même que pour faire le produit de deux déterminants, en associant les lignes du premier tableau aux colonnes du second; d'autre part les égalités symboliques sont soumises, au seul point de vue de la multiplication, aux règles ordinaires des égalités, en tenant compte toutefois de l'ordre des facteurs dans les produits.

3. Ceci posé, la relation homographique (1) peut être considérée comme résultant d'une substitution linéaire de α_n, β_n à α, β

$$(2) \quad \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} = \begin{matrix} P_n & P_{n-1} \\ Q_n & Q_{n-1} \end{matrix} \times \begin{matrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{matrix}.$$

A priori les coefficients de cette substitution doivent vérifier les égalités

$$\frac{P_n}{Q_n} = f_n(\infty), \quad \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = f_n(0) = f_{n-1}(\infty),$$

ce qui justifie en partie leur notation identique à celle déjà employée pour les termes des réduites. Pour déterminer complètement ces coefficients ainsi que le numérateur et le dénominateur de chaque quotient complet, je supposerai que la relation homographique qui lie deux quotients complets successifs

$$\frac{\alpha_p}{\beta_p} = \alpha_p + \frac{1}{\frac{\alpha_{p+1}}{\beta_{p+1}}} \quad (\alpha_p \text{ entier positif})$$

résulte de la substitution linéaire [que j'appellerai substi-

tution (a)]

$$(a) \quad \begin{pmatrix} \alpha_p & \alpha_p - 1 \\ \beta_p & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha_{p+1} & \\ \beta_{p+1} & 0 \end{pmatrix} \quad (\alpha_p \text{ entier positif}).$$

On en déduit l'expression de la substitution (2) sous forme d'un produit de substitutions (a) (en supposant $\frac{\alpha}{\beta} > 1$)

$$(A) = \begin{pmatrix} P_n & P_{n-1} \\ Q_n & Q_{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i=0}^{i=n-1} \begin{pmatrix} \alpha_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La propriété bien connue du module d'un produit de deux substitutions montre que cette substitution est *modulaire*

$$(P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = \pm 1):$$

on en déduit que les fractions $\frac{P_n}{Q_n}$ sont irréductibles, ce qui justifie complètement la notation employée pour leurs termes.

On voit d'autre part que, si l'on a mis le nombre primitif sous forme d'un quotient de deux termes bien déterminés, chaque quotient complet sera aussi le rapport de deux nombres bien déterminés.

4. J'ai supposé $\frac{\alpha}{\beta}$ supérieur à 1; s'il est inférieur à 1, le premier quotient incomplet est nul et la substitution qui permet de passer de α, β à α_n, β_n est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \prod_{i=1}^{i=n} \begin{pmatrix} \alpha_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (\sigma) \times (A),$$

en désignant par (σ) la substitution $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. C'est une substitution de même forme $(\sigma) \times (A)$ qui relierait un *quotient complet intermédiaire* à un quotient complet successif.

En se plaçant au point de vue des approximations, Serret ⁽¹⁾ a introduit la notion de réduites intermédiaires. En imitant son procédé, on peut introduire, entre deux quotients complets consé-

⁽¹⁾ *Algèbre supérieure*, 6^e édit., t. I. Cf. aussi mon Mémoire cité Chap. II-V

tifs $\frac{\alpha_p}{\beta_p}, \frac{\alpha_{p+1}}{\beta_{p+1}}, \alpha_p - 1$ quotients intermédiaires :

$$\frac{\alpha_{p+1}^h}{\beta_{p+1}^h} \quad (h = 1, 2, \dots, \alpha_p - 1),$$

lorsque le quotient incomplet α_p est supérieur à 1. Ils sont définis par les égalités symboliques

$$(3) \quad \frac{\alpha_p}{\beta_p} = \frac{h-1}{1-0} \times \frac{\alpha_{p+1}^h}{\beta_{p+1}^h} \quad (h = 1, 2, \dots, \alpha_p - 1),$$

d'où l'on déduit l'égalité

$$\frac{\alpha_{p+1}^h}{\beta_{p+1}^h} = \frac{1-0}{\alpha_p - h - 1} \times \frac{\alpha_{p+1}}{\beta_{p+1}} \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha_{p+1}^h}{\beta_{p+1}^h} = (\tau) \times \frac{\alpha_p - h - 1}{1-0} \times \frac{\alpha_{p+1}}{\beta_{p+1}}.$$

On aurait encore une relation analogue entre un quotient intermédiaire et un quotient intermédiaire successif du même intervalle. On passe donc des termes d'un quotient intermédiaire (ou d'un nombre inférieur à 1) aux termes d'un quotient successif (intermédiaire ou non) par une substitution de la forme (τ) ou $(\tau) \times (A)$.

5. Les quotients intermédiaires ainsi définis sont inférieurs à 1. On peut avoir aussi à considérer leurs inverses (supérieurs à 1), que j'appellerai *quotients à droite*. Ils vérifient les égalités

$$\frac{\alpha_p}{\beta_p} = \frac{1-h}{0-1} \times \frac{\beta_{p+1}^h}{\alpha_{p+1}^h} \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha_p}{\beta_p} = \frac{h-1}{1-0} \times (\tau) \frac{\beta_{p+1}^h}{\alpha_{p+1}^h},$$

$$\frac{\beta_{p+1}^h}{\alpha_{p+1}^h} = \frac{\alpha_p - h - 1}{1-0} \times \frac{\alpha_{p+1}}{\beta_{p+1}}.$$

En rapprochant ces résultats des précédents, on peut obtenir la relation générale entre deux quotients complets successifs (non nécessairement consécutifs) d'un même nombre. Je distinguerai les quotients complets *principaux* (non intermédiaires), *intermédiaires à gauche* (plus petits que 1) et *intermédiaires à droite* (inverses des précédents); pour simplifier je considérerai le nombre lui-même comme un quotient complet : principal s'il est supérieur à 1, intermédiaire à gauche dans le cas contraire. Dans ces conditions on passe d'un quotient à un quotient successif :

1° Par une substitution (A) si le premier quotient est principal ou intermédiaire à droite, le deuxième étant principal ou intermédiaire à gauche.

2° Par $(\sigma) \times (A)$ si le premier est intermédiaire à gauche, le deuxième étant principal ou intermédiaire à gauche.

3° Par $(A) \times (\sigma)$ si le premier est principal ou intermédiaire à droite, le deuxième étant intermédiaire à droite.

4° Par $(\sigma) \times (A) \times (\sigma)$ si le premier est intermédiaire à gauche, le deuxième étant intermédiaire à droite.

6. Le développement d'une irrationnelle en fraction continue engendre donc un ensemble de substitutions modulaires à termes positifs. Réciproquement on peut chercher si une substitution modulaire à termes positifs provient d'un développement en fraction continue. On peut d'abord démontrer la proposition suivante :

Une substitution modulaire à termes entiers tous positifs ou nuls [exception faite de la substitution unité et de (σ)]

$$\Sigma = \begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix} \quad \left| \begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix} \right| = \pm 1,$$

est de l'une des quatre formes

$$(A), \quad (\sigma) \times (A), \quad (A) \times (\sigma), \quad (\sigma) \times (A) \times (\sigma)$$

et vérifie, suivant les cas, les systèmes d'inégalités

$$(4) \quad \begin{cases} P \geq P' \\ Q \geq Q' \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} P \geq Q, \\ P' \geq Q', \end{cases}$$

$$(4 \text{ bis}) \quad \begin{cases} P \geq P' \\ Q \geq Q' \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} P \leq Q, \\ P' \leq Q', \end{cases}$$

$$(4 \text{ ter}) \quad \begin{cases} P \leq P' \\ Q \leq Q' \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} P \geq Q, \\ P' \geq Q', \end{cases}$$

$$(4 \text{ quater}) \quad \begin{cases} P \leq P' \\ Q \leq Q' \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} P \leq Q, \\ P' \leq Q', \end{cases}$$

les égalités n'ayant pas lieu simultanément.

On peut démontrer par récurrence que toute substitution (A)

vérifie les inégalités (4), en montrant que ces inégalités étant supposées vraies pour une substitution Σ , sont vraies à fortiori pour le produit de Σ par une substitution (α). Le produit à droite ou à gauche par (σ), ayant pour seul effet une permutation des colonnes entre elles ou de lignes entre elles, on déduit du résultat précédent que les substitutions (σ) $\times$ (Λ), (Λ) $\times$ (σ), (σ) $\times$ (Λ) $\times$ (σ), vérifient respectivement les inégalités (4 bis), (4 ter), (4 quater), ce qui démontre la deuxième partie de la propriété.

7. La première partie est évidente si l'un des termes de Σ est nul, (Λ) se réduit alors à un seul facteur (α).

Supposons maintenant que l'un des termes soit égal à 1; en multipliant s'il y a lieu Σ par (σ) à droite ou à gauche, ou des deux côtés, on peut amener ce terme 1 à être le dernier de la diagonale principale. De sorte que l'une des substitutions

$$\Sigma, \quad (\sigma) \times \Sigma, \quad \Sigma \times (\sigma), \quad (\sigma) \times (\Sigma) \times (\sigma)$$

est de la forme

$$S = \begin{pmatrix} P & P' \\ Q & 1 \end{pmatrix}.$$

Si deux des termes étaient égaux à 1, on ramènerait encore à la même forme, mais avec la condition supplémentaire que le déterminant soit égal à +1.

Quoi qu'il en soit, on peut décomposer S d'après l'une des deux formules, suivant que le déterminant est +1 ou -1

$$\begin{pmatrix} P & P' \\ Q & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P' & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Q & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} P & P' \\ Q & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P'-1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Q-1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par suite S est d'une forme (Λ) et Σ est de l'une des quatre formes indiquées.

Supposons enfin qu'aucun des termes ne soit égal à 1; en multipliant s'il y a lieu Σ à droite par (σ), on peut rendre P supérieur à P'. Mais alors les fractions $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$, ont même partie entière; en effet en appelant q la partie entière de $\frac{P}{P'}$, on a, en tenant compte

de ce que la substitution est modulaire,

$$\frac{P}{P'} = q + \frac{\lambda}{P'},$$

$$\frac{Q}{Q'} = q - \frac{\lambda}{P'} \pm \frac{1}{P'Q'}.$$

λ est un entier positif non nul, sinon le déterminant de la substitution serait divisible par P' , ce qui est absurde. D'autre part λ est inférieur à P' et comme par hypothèse $Q' > 1$, on a manifestement

$$0 < \frac{\lambda}{P'} \pm \frac{1}{P'Q'} < 1,$$

ce qui montre que q est la partie entière de $\frac{Q}{Q'}$. On peut alors poser

$$\begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P' & P'' \\ Q' & Q'' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} q & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et, comme q est la partie entière commune à $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$, les termes de la nouvelle substitution sont positifs et vérifient les inégalités

$$P'' < P', \quad Q'' < Q'.$$

Si P'' et Q'' sont différents de 1, on peut décomposer à nouveau cette substitution en un produit d'une substitution analogue par un facteur (α). Et ainsi de suite jusqu'à obtenir une substitution dont l'un des termes de la deuxième colonne soit 1; en multipliant au besoin à gauche par (σ) on obtiendra une substitution de la forme S et par suite de la forme (A). En tenant compte de la première opération qu'on a peut-être dû faire subir à Σ , on a bien démontré que Σ est de l'une des quatre formes indiquées.

La démonstration montre en outre que la décomposition de Σ n'est possible que d'une seule manière. L'algorithme indiqué pour cette décomposition est identique, sauf les dernières opérations, à la recherche du p. g. c. d. pour les nombres P et P' ou Q et Q'.

8. Supposons maintenant qu'une substitution Σ (modulaire, à termes positifs) transforme les nombres α, β en α', β' :

$$(5) \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \Sigma \times \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix},$$

$\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ étant positifs et les rapports $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha'}{\beta'}$ irrationnels, on peut affirmer que *ces rapports sont des quotients complets (principaux ou intermédiaires) successifs d'un même nombre*, ou encore que $\frac{\alpha'}{\beta'}$ est un quotient complet de $\frac{\alpha}{\beta}$. Les cas qui peuvent alors se présenter ont été indiqués au n° 5 dont la propriété précédente constitue une réciproque.

Soit par exemple le cas où Σ est d'une forme (A).

$$\Sigma = (\alpha_0) \times (\alpha_1) \times \dots \times (\alpha_n), \quad (\alpha_p) = \begin{matrix} \alpha_p & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}.$$

Considérons les systèmes de nombres α_p, β_p définis par

$$\frac{\alpha_n}{\beta_n} = (\alpha_n) \times \frac{\alpha'}{\beta'}, \quad \frac{\alpha_{n-1}}{\beta_{n-1}} = (\alpha_{n-1}) \times \frac{\alpha_n}{\beta_n}, \quad \dots, \quad \frac{\alpha_1}{\beta_1} = (\alpha_1) \times \frac{\alpha_2}{\beta_2}.$$

Les rapports $\frac{\alpha_p}{\beta_p}$ sont manifestement supérieurs à 1 et l'on a, d'autre part, comme conséquence de (5),

$$\frac{\alpha}{\beta} = (\alpha_0) \times \frac{\alpha_1}{\beta_1},$$

Il en résulte que $\frac{\alpha_1}{\beta_1}$ est le premier quotient complet (principal) de $\frac{\alpha}{\beta}$ (également supérieur à 1), $\frac{\alpha_2}{\beta_2}$ est de même le premier quotient de $\frac{\alpha_1}{\beta_1}$ et par suite le deuxième de $\frac{\alpha}{\beta}$ et ainsi de suite, $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ est le $n^{\text{ième}}$. Donc $\frac{\alpha'}{\beta'}$ sera le $n + 1^{\text{ième}}$ s'il est supérieur à 1, ou sera un quotient intermédiaire (à gauche) entre le $n^{\text{ième}}$ et le $n + 1^{\text{ième}}$ quotients principaux s'il est inférieur à 1. On étudierait de même les autres cas.

II. — TRANSFORMATION D'UNE FRACTION CONTINUE.

9. Soient deux irrationnelles positives, mises sous forme de quotients : $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta}$ liées par une *relation homographique à coefficients entiers* :

$$\frac{\gamma}{\delta} = \frac{A\alpha + A'\beta}{B\alpha + B'\beta}, \quad K = AB' - BA' \neq 0,$$

qu'on peut écrire, d'après les notations déjà employées,

$$\frac{\gamma}{\delta} = T \times \frac{\alpha}{\beta}, \quad T = \frac{A}{B} \frac{A'}{B'}.$$

Je me propose de montrer comment, dans des cas assez étendus, on peut déduire le développement en fraction continue de $\frac{\gamma}{\delta}$ de celui de $\frac{\alpha}{\beta}$.

Lorsque la substitution T est modulaire ($K = \pm 1$), on sait que les suites des quotients incomplets des deux nombres ne diffèrent que par les premiers termes.

On peut énoncer cette propriété en disant qu'à partir d'un certain rang p les quotients complets $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ de $\frac{\alpha}{\beta}$ le sont aussi pour $\frac{\gamma}{\delta}$. On encore, en posant

$$\frac{\alpha}{\beta} = \Sigma_n \times \frac{\alpha_n}{\beta_n},$$

les substitutions modulaires $T \times \Sigma_n$, à partir de $n \geq p$ ont leurs termes positifs et vérifient même les inégalités (4) ou (4 bis) suivant que $\frac{\gamma}{\delta}$ est supérieur ou inférieur à 1.

Ce dernier énoncé conduit à une *méthode pratique* pour déterminer le rang p et les premiers quotients incomplets de $\frac{\gamma}{\delta}$ (ceux de $\frac{\alpha}{\beta}$ étant supposés connus). Il suffit de chercher la première substitution $T \times \Sigma_i$ [$i = (0, 1, 2, \dots)$] qui vérifie les inégalités (4) ou (4 bis) et de la décomposer en un produit suivant le procédé indiqué au n° 7.

10. Si T n'est pas modulaire, on peut toujours, d'après une propriété bien connue (¹) la décomposer en un produit d'une substitution modulaire par une autre à termes entiers de la forme

$$\begin{cases} a & -x \\ 0 & b \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} ab = K, \\ 0 \leq x < b. \end{array} \right.$$

(¹) Hermite a énoncé cette propriété pour une substitution linéaire d'ordre quelconque, *Journal de Crelle*, t. 41, page 102.

Ceci posé, je ne traiterai le problème que si $\frac{\alpha}{\beta}$ a une infinité de quotients complets supérieurs à K.

En désignant par $\frac{\alpha'}{\beta'}$ le premier d'entre eux (qui peut d'ailleurs être $\frac{\alpha}{\beta}$ lui-même), d'après la propriété précédente, on peut écrire la relation entre γ , δ et α' , β' sous la forme

$$\frac{\gamma}{\delta} = U \times \frac{a}{0} - x \times \frac{\alpha'}{\beta'} \quad \left\{ \begin{array}{l} ab = K, \\ 0 \leq x < b, \end{array} \right.$$

U étant modulaire. Alors en posant

$$\frac{\gamma}{\delta} = U \times \frac{\gamma'}{\delta'},$$

on aura

$$(6) \quad \frac{\gamma'}{\delta'} = \frac{a}{0} - x \times \frac{\alpha}{\beta'}.$$

Le quotient $\frac{\alpha'}{\beta'}$ étant supérieur à K et à fortiori à $\frac{x}{a}$, et ses termes α' , β' , étant positifs, les nombres

$$\gamma' = a\alpha' - x\beta', \quad \delta' = b\beta'$$

sont aussi positifs. Je vais chercher le développement de $\frac{\gamma'}{\delta'}$, celui de $\frac{\gamma}{\delta}$ s'en déduira d'après la méthode du numéro précédent.

11. Soit $\frac{\alpha''}{\beta''}$ un quotient complet supérieur à K, successif de $\frac{\alpha'}{\beta'}$ (par exemple le deuxième quotient de $\frac{\alpha}{\beta}$ qui remplit cette condition). Il est lié à $\frac{\gamma'}{\delta'}$ par une relation de la forme

$$\frac{\gamma'}{\delta'} = \frac{a}{0} - x \times \frac{P}{Q} - \frac{P'}{Q'} \times \frac{\alpha''}{\beta''}.$$

L'artifice consiste alors à permuter, pour ainsi dire, le produit du deuxième membre, en cherchant une égalité de la forme

$$\frac{a}{0} - x \times \frac{P}{Q} - \frac{P'}{Q'} = \frac{S}{T} - \frac{S'}{T'} \times \frac{a_1}{0} - \frac{x_1}{b_1}.$$

Cette égalité donne pour S, S', T, T' les valeurs

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{a_1} (aP - xQ), & T &= \frac{bQ}{a_1}, \\ S' &= \frac{1}{a_1 b_1} [(aP - xQ)x_1 + (aP' - xQ')a_1]; & T' &= \frac{b}{a_1 b_1} (Qx_1 + Q'a_1). \end{aligned}$$

On déterminera a_1, b_1, x_1 par la condition que

$$\Sigma' = \begin{matrix} S & S' \\ T & T' \end{matrix}$$

soit modulaire à termes positifs. Cette condition conduit aux règles suivantes (1)

$$\begin{aligned} \delta &\text{ p. g. c. d. de } a \text{ et } Q, \\ a_1 &\text{ p. g. c. d. de } aP - xQ \text{ et } b\delta, \\ a_1 b_1 &= K, \\ (7) \quad (aP - xQ)x_1 + (aP' - xQ')a_1 &\equiv 0 \pmod{K}, \\ (7 \text{ bis}) \quad Qx_1 + Q'a_1 &\equiv 0 \pmod{a}, \\ &(0 \leq x_1 < b_1). \end{aligned}$$

12. Je me contenterai de montrer que ces règles conduisent à un seul système de valeurs pour a_1, b_1, x_1 et que ces valeurs vérifient la condition imposée. On vérifierait sans difficulté que c'est le seul système remplissant cette condition (il faudrait se servir du fait que Q et Q' sont premiers entre eux); mais cette vérification n'est pas indispensable pour le but poursuivi.

Posons, δ ayant été déterminé comme il est dit,

$$\begin{aligned} a &= \delta a', & Q &= \delta Q_1, \\ aP - xQ &= \delta (a'P - xQ_1), \end{aligned}$$

a_1 est donc divisible par δ et le quotient a'_1 est le p. g. c. d. de $a'P - xQ_1$ et de b . Posons

$$a'P - xQ_1 = a'_1 h, \quad b = a'_1 b'.$$

Ceci posé, la congruence (7 bis) est équivalente à

$$Q_1 x_1 + Q' a'_1 \equiv 0 \pmod{a'}.$$

(1) Dans la Note citée ces règles avaient été indiquées de façon incomplète, la deuxième congruence ayant été omise.

Comme Q_1 et a' sont premiers entre eux, cette congruence a une infinité de solutions données par la formule

$$x_1 = AQ'_1a' + \lambda a'.$$

λ étant un entier indéterminé et A une solution de la congruence

$$AQ_1 + 1 \equiv 0 \pmod{a'}.$$

En écrivant que x_1 est solution de (7), on obtient la congruence en λ

$$\lambda a'(aP - xQ) + a'_1[a(AQ'_1P + P'\delta) - xQ'\delta(AQ_1 + 1)] \equiv 0 \pmod{k},$$

qui est équivalente (après division par $a \times a'_1$) à

$$\lambda h + (AQ'_1P + P'\delta) - xQ' \frac{AQ_1 + 1}{a'} \equiv 0 \pmod{b'}.$$

Dans cette nouvelle congruence $\frac{AQ_1 + 1}{a'}$ est un entier; comme h et b' sont premiers entre eux, elle a une infinité de solutions données par la formule

$$\lambda = \lambda_0 + \mu b'.$$

De sorte que, finalement, les congruences (7) et (7 bis) auront des solutions communes données par la formule

$$AQ'_1a' + \lambda_0 a' + \mu a'b' = B + \mu b_1.$$

On peut disposer de l'indéterminée μ et, ceci, d'une seule façon pour que cette solution soit comprise entre 0 inclus et b_1 exclu (¹).

D'après le choix de a_1 , S est un entier (égal à h), il en est de même de

$$T = \frac{bQ}{a'_1\delta} = b'Q_1.$$

Les congruences (7) et (7 bis) montrent que S' et T' sont aussi entiers. D'autre part, d'après le choix de b_1 , le déterminant de Σ' est égal à $+1$.

Enfin les termes de Σ' sont positifs : c'est évident pour T et T' .

(¹) Cette démonstration de l'existence de x_1 est aussi une méthode de calcul.

Pour S et S', ce fait résulte de ce que $\frac{x'}{\beta'}$ est supérieur à K. En reprenant le raisonnement du n° 7, on peut démontrer que $\frac{P}{Q}$ et $\frac{P'}{Q'}$ sont alors supérieurs ou égaux à K — 1 (c'est aussi ce qui résulterait des propriétés d'approximation des réduites) et *a fortiori* à $\frac{x}{a}$. Donc $aP - xQ$ et $aP' - xQ'$ sont positifs ou nuls et il en est de même de S et S'.

13. La substitution Σ' et les nombres a_1, b_1, x_1 étant ainsi choisis, déterminons γ'', δ'' par l'égalité

$$(6 \text{ bis}) \quad \frac{\gamma''}{\delta''} = \frac{a_1}{0} - \frac{x_1}{b_1} \times \frac{x''}{\beta''}$$

On en déduit la relation entre γ', δ' et γ'', δ'' :

$$\frac{\gamma'}{\delta'} = \Sigma' \times \frac{\gamma''}{\delta''}$$

Mais d'après l'hypothèse faite, $\frac{x''}{\beta''}$ étant supérieur à K et *a fortiori* à $\frac{x_1}{a_1}$ les nombres

$$\gamma'' = a_1 x'' - x_1 \beta'', \quad \delta'' = b_1 \beta''$$

sont positifs. Donc, d'après la propriété du n° 8, $\frac{\gamma''}{\delta''}$ est un quotient complet principal ou intermédiaire, à droite ou à gauche, et l'on aura les premiers quotients incomplets de $\frac{\gamma'}{\delta'}$ en décomposant Σ' en un produit d'après la méthode du n° 7.

L'égalité (6 bis) est de la même forme que (6); en appelant $\frac{x'''}{\beta'''}$ un quotient de $\frac{x''}{\beta''}$ supérieur à K, on peut recommencer le même calcul et déterminer des nombres a_2, b_2, x_2 , une substitution Σ'' et un quotient complet $\frac{\gamma'''}{\delta'''}$ de $\frac{\gamma''}{\delta''}$ et par suite de $\frac{\gamma'}{\delta'}$. Et ainsi de suite, la méthode est indéfiniment applicable, d'après l'hypothèse faite sur les quotients de $\frac{x}{\beta}$. En réunissant les suites partielles de quotients incomplets on obtiendra la suite des quotients incom-

plets de $\frac{\gamma'}{\delta'}$. Dans le cas où $\frac{\gamma^{(p)}}{\delta^{(p)}}$ serait intermédiaire, il y aurait lieu d'ajouter le dernier quotient incomplet obtenu pour $\frac{\gamma^{(p-1)}}{\delta^{(p-1)}}$ et le premier obtenu pour $\frac{\gamma^{(p)}}{\delta^{(p)}}$. Ceci, comme conséquence de l'égalité

$$\begin{array}{cc|cc} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \times \begin{array}{cc|cc} b & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} = \begin{array}{cc|cc} a+b & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}.$$

14. *Exemple.* — Soit, par exemple, un nombre $u = \frac{x}{2}$ ayant pour premiers quotients incomplets

$$15, \quad 2, \quad 1, \quad 13, \quad 17, \quad 8, \quad 6, \quad 20, \quad 2, \quad 2, \quad 21,$$

et proposons-nous de former le développement de

$$v = 3u - \frac{1}{2} = \frac{6x-1}{2 \cdot 3}.$$

Le déterminant de la substitution est 12. Séparons les quotients incomplets proposés en groupes commençant par un nombre supérieur à 12. On obtient les substitutions modulaires

$$\begin{aligned} (15) \times (2) \times (1) &= \begin{array}{cc|cc} 46 & 31 & & \\ 3 & 2 & & \end{array}, & (13) &= \begin{array}{cc|cc} 13 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \end{array}, \\ (17) \times (8) \times (6) &= \begin{array}{cc|cc} 839 & 137 & & \\ 49 & 8 & & \end{array}, & (20) \times (2) \times (2) &= \begin{array}{cc|cc} 102 & 41 & & \\ 5 & 2 & & \end{array}. \end{aligned}$$

En appliquant la méthode indiquée on trouve successivement les résultats

$$\begin{aligned} \begin{array}{cc|cc} 6 & -1 & & \\ 0 & 2 & & \end{array} \times \begin{array}{cc|cc} 46 & 31 & & \\ 3 & 2 & & \end{array} &= \begin{array}{cc|cc} 91 & 46 & & \\ 2 & 1 & & \end{array} \times \begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & & \\ 0 & 4 & & \end{array}, \\ \begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & & \\ 0 & 4 & & \end{array} \times \begin{array}{cc|cc} 13 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \end{array} &= \begin{array}{cc|cc} 39 & 10 & & \\ 4 & 1 & & \end{array} \times \begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & & \\ 0 & 12 & & \end{array}, \\ \begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & & \\ 0 & 12 & & \end{array} \times \begin{array}{cc|cc} 839 & 137 & & \\ 49 & 8 & & \end{array} &= \begin{array}{cc|cc} 173 & 153 & & \\ 147 & 130 & & \end{array} \times \begin{array}{cc|cc} 4 & -2 & & \\ 0 & 3 & & \end{array}, \\ \begin{array}{cc|cc} 4 & -2 & & \\ 0 & 3 & & \end{array} \times \begin{array}{cc|cc} 102 & 41 & & \\ 5 & 2 & & \end{array} &= \begin{array}{cc|cc} 398 & 345 & & \\ 15 & 13 & & \end{array} \times \begin{array}{cc|cc} 1 & -10 & & \\ 0 & 12 & & \end{array}. \end{aligned}$$

En décomposant en produit chacune des substitutions modu-

lares trouvées, on obtient :

$$\begin{array}{cc} 91 & 46 \\ 2 & 1 \end{array} = (45) \times (1) \times (1),$$

$$\begin{array}{cc} 39 & 10 \\ 4 & 1 \end{array} = (9) \times (1) \times (3),$$

$$\begin{array}{cc} 173 & 153 \\ 147 & 130 \end{array} = (1) \times (5) \times (1) \times (1) \times (1) \times (7) \times (1),$$

$$\begin{array}{cc} 398 & 345 \\ 15 & 13 \end{array} = (26) \times (1) \times (1) \times (6) \times (1).$$

Les premiers quotients incomplets de v sont donc

45, 1, 1, 9, 1, 3, 1, 5, 1, 1, 1, 7, 1, 26, 1, 1, 6, 1,

et le quotient complet (principal) suivant est :

$$\frac{x' - 10\beta'}{12\beta'} = \frac{u'}{12} - \frac{10}{12},$$

en désignant par $u' = \frac{x'}{\beta'}$ le quotient complet de u qui précède le quotient incomplet 21 (le dernier indiqué).

III. — APPLICATIONS.

15. La méthode indiquée permet, théoriquement au moins, de trouver le développement de $\frac{\gamma}{\delta}$, connaissant celui de $\frac{x}{\beta}$. Dans la pratique on n'obtient que les premiers quotients du développement, puisqu'on ne peut faire qu'un nombre *fini* d'opérations. Toutefois on pourrait se proposer, connaissant une loi de succession des quotients incomplets de $\frac{x}{\beta}$, d'en déduire une loi de succession des quotients de $\frac{\gamma}{\delta}$. Ce problème peut encore être considéré comme théoriquement résolu : puisqu'on peut calculer un nombre indéfini de quotients de $\frac{\gamma}{\delta}$, on peut dire que leur calcul, constitué par des opérations bien définies, est une loi de succession. Mais, ainsi que dit M. Poincaré (1), en général un problème n'est pas ou résolu

(1) L'Avenir des Mathématiques (Congrès de Rome ou *Science et Méthode* Flammarion, éd., 1908).

ou non résolu, il est *plus ou moins résolu*. Si la loi de succession pour $\frac{x}{3}$ est *simple* ⁽¹⁾, la réponse précédente semblera évidemment une solution insuffisante et trop compliquée, il est naturel de chercher une loi *simple* pour $\frac{y}{6}$. C'est ce que je vais essayer de faire pour quelques cas, d'ailleurs assez restreints.

On pourrait d'abord vérifier sans difficultés que, si le développement de $\frac{x}{3}$ est périodique, il en est de même de celui de $\frac{y}{6}$. Mais ce n'est pas là un résultat bien remarquable, puisqu'il peut se ramener à ce fait qu'après une transformation homographique (à coefficients entiers), un nombre algébrique du deuxième degré est encore algébrique du deuxième degré.

16. Soit un nombre u , *a priori* quelconque, et une transformation de déterminant K .

Séparons la suite des quotients incomplets de u en groupes commençant chacun par un nombre supérieur à K , et faisons les produits des substitutions (α) correspondantes.

Soit

$$\Sigma = \begin{matrix} P & P' \\ Q & Q' \end{matrix}$$

l'un de ces produits. Je supposerai connue la loi de succession des substitutions Σ .

Dans la recherche de chaque groupe de quotients incomplets du transformé v de u , on peut, en somme, distinguer deux opérations : 1^o la recherche de la substitution (voir n^o 11).

$$\theta_1 = \begin{matrix} a_1 & -x_1 \\ 0 & b_1 \end{matrix};$$

2^o la recherche de la substitution modulaire, produit de substitutions (α) de v

$$\Sigma' = \begin{matrix} S & S' \\ T & T' \end{matrix}$$

La détermination de θ_1 ne dépend que des restes, module K , de

(1) Il est difficile de préciser ce mot, en particulier dans le cas présent où il s'agit d'une loi de succession de *nombre entiers*.

P, P', Q, Q'; je désignerai par π, π', ρ, ρ' ces restes supposés compris entre 0 inclus et K exclu. Pour trouver une loi simple pour le développement de ν , il y aura donc intérêt à connaître une loi simple de succession des substitutions

$$R = \begin{pmatrix} \pi & \pi' \\ \rho & \rho' \end{pmatrix}.$$

17. Supposons, ce qui semble la loi la plus simple, que la suite des R soit périodique. On peut encore énoncer ce fait en disant que la suite des Σ se reproduit périodiquement, à des multiples près de K, pour les valeurs des coefficients.

Alors *la suite des θ est périodique*; ceci résulte de ce que, pour une valeur de K, les substitutions θ différentes sont en nombre fini N, leurs termes vérifiant les inégalités

$$0 < a \leq K, \quad 0 < b \leq K, \quad 0 \leq x < b \leq K.$$

Soit en effet

$$R_1, R_2, \dots, R_h; \quad R_1, \dots, R_h; \quad R_1, \dots; \quad \dots$$

la suite ⁽¹⁾ des R, h étant la période, et soit

$$\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_h, \theta_{h+1}; \quad \dots$$

la suite des θ , θ_0 étant la substitution initiale donnée et $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_h, \dots$ celles qui ont été déterminées par la méthode du n° 11 appliquée successivement à

$$\theta_0 \times R_1, \quad \theta_1 \times R_2, \quad \theta_2 \times R_3, \quad \dots, \quad \theta_{h-1} \times R_h; \quad \dots$$

Or parmi les $N + 1$ nombres θ

$$\theta_0, \theta_h, \theta_{2h}, \dots, \theta_{Nh},$$

il y en a nécessairement deux identiques

$$\theta_{\alpha h} = \theta_{(\alpha+n)h}.$$

Pour déterminer le suivant de $\theta_{(\alpha+n)h}$ il faudra appliquer la

(1) J'ai supposé la suite périodique simple, ce qu'on peut toujours supposer en remplaçant, s'il y a lieu, u par un de ses quotients complets.

méthode à

$$\theta_{(\alpha+n)h} \times R_1 = \theta_{\alpha h} \times R_1,$$

On trouvera donc une substitution identique à $\theta_{\alpha h+1}$ et ainsi de suite. Les deux suites combinées des θ et des R seront donc périodiques et de période nh , les premiers termes de la période étant

$$\theta_{\alpha h}, \quad R_1.$$

18. Passons maintenant à la recherche de Σ' , en supposant toujours la suite des R périodique. Une substitution Σ peut s'écrire

$$\begin{array}{cc} \pi + pK & \pi' + p'K \\ \rho + qK & \rho' + q'K \end{array}$$

et supposons connu $\theta_i(a, b, x)$ précédant et $\theta_{i+1}(a', b', x')$ suivant Σ . On déterminera Σ' par l'égalité

$$\theta_i \times \Sigma = \Sigma' \times \theta_{i+1},$$

Ce qui donne pour les termes de Σ' les expressions

$$\begin{aligned} S &= \sigma + b'(ap - xq), \\ S' &= \sigma' + (ap - xq)x' + (ap' - xq')a'; \\ T &= \tau + bb'q, \\ T' &= \tau' + b(qx' + q'a'); \end{aligned}$$

$\sigma, \sigma', \tau, \tau'$ ne dépendent que des termes de R et par suite seront les mêmes pour deux substitutions Σ d'indices $\beta, \beta + nh$ ($\beta > \alpha h$). Sans autre hypothèse que la précédente, on ne peut affirmer *a priori* que les Σ' se reproduiront aussi à des multiples de K près pour leurs coefficients. Pour qu'il en soit ainsi, il suffit que les restes, module K de p, p', q, q' soient aussi périodiques, ce qui revient à supposer que les restes, module K^2 , des termes des Σ , se reproduisent périodiquement. C'est ce qu'on vérifie aisément par un raisonnement analogue à celui du numéro précédent; si m est la période des p, p', q, q' , la période des Σ' sera mnh ou un de ses diviseurs.

En résumé si les termes des Σ sont tels que leurs restes relativement au module K^2 se reproduisent périodiquement, on peut grouper les quotients incomplets de v de façon que les

termes des substitutions Σ' aient des restes, module K , qui se reproduisent périodiquement.

19. Dans ce qui précède, je ne me suis occupé que de la périodicité des termes de Σ , sans rechercher comment elle était produite par les quotients incomplets. Ces considérations devraient être précisées, dans les différents cas possibles. Je vais les appliquer maintenant à une loi déterminée pour la suite des quotients incomplets de u . Je supposerai que *les termes de cette suite se partagent en groupes de N termes, les nombres correspondant de chaque groupe étant, ou égaux, ou congrus, module K^2 .*

Séparons les nombres de chaque groupe en ensembles partiels tels que les termes de chaque ensemble, à l'exception du premier, soient égaux à leurs correspondants; un ensemble pouvant ne renfermer qu'un seul terme. En représentant les termes d'un ensemble par une même lettre, et en supposant, pour fixer les idées, trois ensembles dans chaque groupe, la suite des quotients incomplets sera par exemple (en remplaçant u , s'il y a lieu, par un quotient complet)

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} l, & l_1, & l_2, & \dots; & m, & m_1, & \dots; & n, & n_1, & \dots; \\ l + \alpha_1 K^2, & l_1, & l_2, & \dots; & m + \beta_1 K^2, & m_1, & \dots; & n + \gamma_1 K^2, & n_1, & \dots; \\ l + \alpha_2 K^2, & l_1, & l_2, & \dots; & m + \beta_2 K^2, & m_1, & \dots; & n + \gamma_2 K^2, & n_1, & \dots; \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots & \dots; & \dots\dots\dots & \dots & \dots; & \dots\dots\dots & \dots & \dots; \end{array}$$

Faisons les produits des substitutions correspondant aux termes de chaque ensemble partiel :

$$\Sigma_1 = (l) \times (l_1) \times (l_2) \times \dots, \quad \Sigma_2 = (m) \times (m_1) \times \dots \quad \dots$$

Soit à faire sur u une transformation θ , nous appliquerons la méthode à ces substitutions Σ , les nombres $l + \alpha_i K^2$, $m + \beta_i K^2$, $n + \gamma_i K^2$ étant supposés supérieurs à K . Les considérations des numéros précédents sont applicables; les Σ ayant, de 3 en 3, leurs termes congrus, module K^2 . Donc la suite des θ sera périodique, de période $3h$; supposons par exemple que la période commence au premier terme et cherchons la relation entre Σ'_1 et Σ_{3h+1} correspondant à Σ_1 et Σ_{3h+1} .

En posant

$$\Sigma_1 = \frac{P}{Q} \frac{P'}{Q'}$$

on aura

$$\Sigma_{3h+1} = \begin{matrix} 1 & x_h K^2 \\ 0 & 1 \end{matrix} \times \Sigma_1 = \frac{P + x_h K^2 Q}{Q} \frac{P' + x_h K^2 Q'}{Q'}$$

et l'on calculera Σ'_1 et Σ'_{3h+1} par les égalités

$$\theta \times \Sigma_1 = \Sigma'_1 \times \theta_1, \quad \theta \times \Sigma_{3h+1} = \Sigma'_{3h+1} \times \theta_1,$$

de sorte que si les termes de Σ'_1 sont S, S', T, T' et ceux de θ et θ_1 respectivement $a, b, x; a_1, b_1, x_1$, on aura

$$\Sigma'_{3h+1} = \frac{S + ab_1 K x_h Q}{T} \frac{S' + a x_h K (Q x_1 + Q' a_1)}{T'}$$

ou

$$\Sigma'_{3h+1} = \frac{S + x_h a^2 K T}{T} \frac{S' + x_h a^2 K T'}{T'}.$$

Il en résulte que, si la décomposition de Σ'_1 en un produit de substitutions (α) est $(^1)$

$$\Sigma'_1 = (I') \times (I'_1) \times (I'_2) \times \dots$$

celle de Σ'_{3h+1} n'en diffère que par le premier terme

$$\Sigma'_{3h+1} = (I' + x_h a^2 K) \times (I'_1) \times (I'_2) \times \dots$$

On ferait la même démonstration pour Σ'_2 et Σ'_{3h+2} , etc. Donc, en tenant compte, s'il y a lieu, des réductions possibles entre les différents groupes de quotients incomplets ainsi obtenus pour v , on en conclut que la suite des quotients incomplets de v , vérifie la même loi que la suite de u .

20. C'est en somme cette propriété que j'ai énoncée dans la note déjà citée. Je supposais toutefois que les premiers termes de chaque ensemble partiel se reproduisaient périodiquement *relativement à tout module entier*.

Il en est alors de même de la suite des $x_{\lambda h}$ et par conséquent

(¹) I' peut être nul.

aussi des premiers termes des ensembles partiels de v . On obtient ainsi la propriété suivante :

Si, à partir d'un certain rang, certains quotients incomplets d'un nombre u se reproduisent périodiquement, et si les autres, tout en augmentant indéfiniment ont, relativement à un module entier quelconque, des restes se reproduisant périodiquement, la même propriété est encore vraie pour tout transformé homographique de u , la transformation ayant des coefficients entiers et un déterminant K différent de 0.

L'hypothèse que les quotients augmentent indéfiniment est nécessaire pour qu'on puisse toujours appliquer la méthode de transformation, le nombre K étant quelconque. Pour la même raison on n'a rien supposé sur les premiers quotients de u , ou de son transformé en affirmant seulement que la propriété est vraie à partir d'un certain rang. Je signale à nouveau, ici, que M. Hurwitz a été conduit par des procédés différents à un résultat analogue (1).

21. Un cas particulièrement intéressant est celui où les quotients incomplets de u se répartissent en *plusieurs progressions arithmétiques* dont certaines peuvent être de raison nulle. Le calcul précédent est applicable. On a alors :

$$x_{\lambda h} = \lambda r,$$

et le premier quotient incomplet déduit de $\Sigma'_{3\lambda h+1}$ est

$$v' + \lambda r a^2 K.$$

Par conséquent, les quotients incomplets de v se répartissent encore en progressions arithmétiques de raisons en général différentes des précédentes.

Ce qui fait l'intérêt de ce cas, c'est que des irrationnelles connues, $\frac{1}{e^n}$, la dérivée logarithmique de la fonction de Bessel pour $x = 1, \dots$, ont des développements de cette forme. Je renvoie pour ces résultats à une méthode de sommation des fractions continues

(1) *Viertelj. Naturf. Ges.*, Zurich, 1896.

que j'ai exposée dans une Note parue aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* ⁽¹⁾. Je me contenterai de traiter ici un exemple déterminé.

La suite des quotients incomplets de

$$u = \coth \frac{1}{3} = \frac{e^{\frac{2}{3}} + 1}{e^{\frac{2}{3}} - 1}$$

est

$$3, \quad 9, \quad 15, \quad 21, \quad \dots, \quad 3 + 6n, \quad \dots$$

On peut en déduire le développement de $v = e^{\frac{2}{3}}$ qui est lié à u par une relation homographique qu'on peut écrire sous la forme

$$\frac{v}{1} = \frac{1}{1} \frac{1}{-1} \times \frac{u}{1} \quad \text{ou} \quad \frac{v}{1} = \frac{1}{1} \frac{1}{0} \times \frac{1}{0} \frac{-1}{2} \times \frac{u}{1}.$$

Le déterminant de la substitution étant 2, on peut appliquer la méthode au nombre u lui-même, en groupant 1 par 1 ses quotients incomplets et en posant par conséquent

$$\Sigma_n = \frac{3 + 6(n-1)}{1} \frac{1}{0}.$$

La substitution formée par les restes, module K , est la même, quel que soit n

$$\frac{1}{1} \frac{1}{0}.$$

En appliquant à cette substitution la méthode du n° 11 pour trouver la période des θ on trouve comme θ successifs

$$\theta_0 = \frac{1}{0} \frac{-1}{2}, \quad \theta_1 = \frac{2}{0} \frac{0}{1}, \quad \theta_2 = \frac{1}{0} \frac{0}{2},$$

$$\theta_{3n+\alpha} = \theta_\alpha, \quad 0 \leq \alpha < 3.$$

Pour obtenir les Σ' il suffira donc de calculer $\Sigma'_1, \Sigma'_2, \Sigma'_3$ ou plutôt $\Sigma'_{3\lambda+1}, \Sigma'_{3\lambda+2}, \Sigma'_{3\lambda+3}$.

(1) 2 mai 1910.

On obtient ainsi

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} -1 \\ 2 \end{array} \times \begin{array}{c} 3 + \lambda 18 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} = \begin{array}{c} 1 + \lambda 9 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \times \begin{array}{c} 2 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}, \quad \Sigma'_{3\lambda+1} = \begin{array}{c} 1 + \lambda 9 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \\
 \begin{array}{c} 2 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \times \begin{array}{c} 9 + \lambda 18 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} = \begin{array}{c} 18 + \lambda 36 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \times \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 2 \end{array}, \quad \Sigma'_{3\lambda+2} = \begin{array}{c} 18 + \lambda 36 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \\
 \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 2 \end{array} \times \begin{array}{c} 15 + \lambda 18 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} = \begin{array}{c} 15 + \lambda 18 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 8 + \lambda 9 \\ 1 \end{array} \times \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} -1 \\ 2 \end{array}, \quad \Sigma'_{3\lambda+3} = \begin{array}{c} 15 + \lambda 18 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 8 + \lambda 9 \\ 1 \end{array}
 \end{array}$$

$\Sigma'_{3\lambda+1}$ et $\Sigma'_{3\lambda+2}$ se composent d'une seule substitution (α), $\Sigma'_{3\lambda+3}$ se décompose en un produit de trois

$$\begin{array}{c} 15 + \lambda 18 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} 8 + \lambda 9 \\ 1 \end{array} = \begin{array}{c} 7 + \lambda 9 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \times \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \times \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array}.$$

Les quotients incomplets de $\frac{u-1}{2}$ seront donc

$$\begin{array}{c} 1, \quad 18, \quad 7, \quad 1, \quad 1, \quad 10, \quad 54, \quad 16, \quad 1, \quad 1, \quad \dots, \\ 1 + 9\lambda, \quad 18 + 36\lambda, \quad 7 + 9\lambda, \quad 1, \quad 1, \quad \dots, \end{array}$$

et ceux de $e^{\frac{2}{3}}$ seront les mêmes, mais précédés du nombre 1.

Les considérations des n^{os} 17 et 18 pourraient encore s'appliquer à d'autres cas, par exemple lorsque la substitution Σ_n est de la forme $(^1) U \times S^n$, U et S étant d'une forme (A). Je crois inutile de m'étendre plus longuement sur ces cas qui ne comprennent pas de développements d'irrationnelles connues.

REMARQUES SUR LE THÉORÈME DE M. PICARD;

PAR M. PAUL LÉVY.

INTRODUCTION.

Le théorème de M. Picard, d'après lequel une fonction entière

(¹) Un exemple de ce cas serait donné par le nombre ayant pour suite de quotients incomplets :

2, 1, 3, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, ...

qui ne prend aucune des valeurs zéro et un se réduit nécessairement à une constante, a été complété en 1904 par M. Landau, qui a établi le théorème suivant :

Si une fonction

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots$$

est régulière et différente de zéro et de un pour toutes les valeurs de x de module inférieur à R , on a

$$(1) \quad R \leq \frac{\varphi(a_0)}{|a_1|},$$

$\varphi(a_0)$ désignant une fonction convenablement déterminée de a_0 .

Peu de temps après, M. Schottky, complétant dans une nouvelle voie le théorème de M. Picard, a obtenu le théorème suivant :

Si une fonction

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots$$

est régulière et différente de zéro et de un pour toutes les valeurs de x de module inférieur à R , on a

$$(2) \quad |\log f(x)| \leq \Phi(a_0, \theta) \quad \left(\theta = \frac{|x|}{R} < 1 \right),$$

$\Phi(a_0, \theta)$ étant une fonction convenablement déterminée de a_0 et de θ , et la détermination considérée de $\log f(x)$ étant telle que son module soit aussi petit que possible pour $x = 0$.

Dans la formule (1) nous pouvons supposer que $\varphi(a_0)$ désigne, pour chaque valeur de a_0 , la plus petite quantité pour laquelle le théorème énoncé soit exact. Nous ferons une hypothèse analogue pour $\Phi(a_0, \theta)$.

Les expressions exactes de ces fonctions $\varphi(a_0)$ et $\Phi(a_0, \theta)$ ont été obtenues par M. Carathéodory: elles se déduisent simplement de la fonction modulaire elliptique. M. Landau en a conclu que la fonction $\Phi(a_0, \theta)$, pour θ voisin de un, reste inférieure à une fonction rationnelle de θ . Ce résultat avait été obtenu d'une manière élémentaire par M. Schottky, qui en avait déduit une

démonstration nouvelle du second théorème fondamental de M. Picard.

Il peut être utile de connaître plus exactement l'ordre de grandeur de $\Phi(\alpha_0, \theta)$ quand θ est voisin de un. Dans le paragraphe 1, j'établirai que $(1 - \theta)\Phi(\alpha_0, \theta)$ reste compris, quand θ tend vers un, entre deux limites finies, fonctions de α_0 seulement.

Le résultat obtenu par M. Carathéodory justifie d'une manière remarquable l'intervention de la fonction modulaire dans le théorème de M. Picard. Mais cela ne diminue pas l'intérêt que peuvent présenter les démonstrations élémentaires de ce théorème, car on peut chercher à établir, en partant de ces démonstrations, une théorie nouvelle de la fonction modulaire elliptique.

La question se présente sous deux aspects entièrement différents suivant que l'on suppose connu, ou non, le théorème de M. Schwarz d'après lequel on peut obtenir la représentation conforme sur un cercle de toute région simplement connexe limitée par un contour de forme quelconque.

Supposons d'abord ce théorème connu, ainsi que celui que M. Poincaré en a déduit, d'après lequel toutes les fonctions uniformes sur une surface de Riemann donnée peuvent s'exprimer en fonction uniforme d'une même variable t .

Considérons en particulier la surface de Riemann s définie par M. Lindelöf ⁽¹⁾, présentant une infinité de feuillettes qui se permutent autour des points 0, 1 et ∞ , et qui est simplement connexe. Le théorème de M. Poincaré nous apprend que nous pouvons obtenir la représentation conforme de cette surface, soit sur un plan tout entier, soit sur l'intérieur d'un cercle; si la théorie de la fonction modulaire n'est pas connue, nous ne savons pas *a priori* lequel des deux cas est réalisé. Mais si l'on se trouvait dans le premier cas, la fonction réalisant cette représentation conforme serait une fonction entière ne prenant aucune des valeurs zéro et un. Il suffit donc d'avoir établi par un procédé quelconque le théorème de M. Picard pour en déduire que la surface s peut être représentée sur un cercle.

Rappelons maintenant le principe qui a servi de point de départ

(¹) *Sur le théorème de M. Picard dans la théorie des fonctions monogènes* (Congrès des Mathématiques à Stockholm, 1909; Teubner, 1910).

à M. Lindelöf. Soit $\mathfrak{R}$ une région à contour simple sur une surface de Riemann, et soit une représentation conforme de cette région sur le cercle $|t| < 1$ faisant correspondre un point donné a_0 au centre du cercle; au cercle $|t| = \vartheta (< 1)$ correspond alors une courbe bien définie γ . Si maintenant nous considérons une fonction $f(t)$, dont les valeurs pour $|t| < 1$ soient représentées par des points de la région $\mathfrak{R}$, sa valeur pour $t = 0$ étant représentée par le point a_0 , ses valeurs pour $|t| < \vartheta$ seront représentées par des points intérieurs à la courbe γ .

Il suffit d'appliquer cet énoncé à la surface de Riemann considérée plus haut pour obtenir le théorème de M. Schottky. Donc, quel que soit le procédé par lequel on ait établi le théorème de M. Picard, le théorème de M. Schottky peut s'en déduire. Il faut remarquer d'ailleurs qu'on pourra sans doute toujours l'établir, sans avoir recours aux considérations qui précèdent, en précisant convenablement la démonstration considérée; c'est bien le cas pour la méthode de M. Borel.

Ayant établi la possibilité de représenter la surface $\mathfrak{S}$ sur un cercle, nous pouvons définir la fonction modulaire par cette représentation. Il est facile d'en déduire la propriété qui sert ordinairement de définition à cette fonction. Traçons en effet, sur un des feuillet de la surface $\mathfrak{S}$, le segment de l'axe réel compris entre les points zéro et un; il divise la surface $\mathfrak{S}$ en deux parties symétriques l'une de l'autre. La courbe qui lui correspond doit donc diviser le cercle $|t| < 1$ en deux parties, pouvant être représentées l'une sur l'autre avec conservation des angles, mais changement de leur sens, chaque point de cette courbe se correspondant à lui-même: il est bien facile de voir que cette courbe ne peut être qu'un arc de cercle orthogonal au cercle $|t| = 1$. Le même raisonnement s'appliquant pour les autres portions de l'axe réel tracées sur le même feuillet de la surface $\mathfrak{S}$, nous voyons que la représentation conforme considérée fait correspondre un demi-plan à un triangle curviligne formé par trois arcs de cercle tangents entre eux. On retrouve bien la définition ordinaire de la fonction modulaire.

Il serait bien plus intéressant d'obtenir des résultats analogues à ceux qui précèdent sans utiliser le théorème de M. Schwarz. Je n'ai pu y parvenir, mais j'ai obtenu quelques résultats qui pour-

ront peut-être aider à atteindre ce but, et que j'exposerai dans le paragraphe 2.

Le paragraphe 3 est consacré à une généralisation du théorème de M. Landau, que j'ai déjà publiée dans les *Comptes rendus* du 9 octobre 1911. Cette généralisation montre que, si une fonction est régulière et différente de zéro et de un pour $|x| < R$, et vérifie en outre *deux conditions d'égalité convenablement choisies*, on peut, *en général*, déterminer une limite supérieure de R .

Je démontre d'abord qu'on peut prendre pour ces deux conditions

$$f(\xi) = a, \quad f(\xi') = b \quad (b \neq a).$$

On peut alors déterminer une limite supérieure de R . Ce résultat était d'ailleurs certainement connu de MM. Schottky et Lindelöf, car il résulte immédiatement de leurs travaux; mais je ne crois pas qu'il ait été énoncé explicitement sous cette forme. En partant de ce cas particulier, je démontre qu'on peut remplacer les conditions ci-dessus par d'autres beaucoup plus générales.

1. Appelons $t = \nu(z)$ la fonction qui définit la représentation conforme du cercle $|t| < 1$ sur la surface S , de manière que, pour $t = 0$, z ait une valeur donnée α_0 . Cette fonction n'est définie qu'à un facteur constant près, de module égal à un et d'argument quelconque; il nous sera inutile d'en préciser la définition. Nous appellerons $z = \lambda(t)$ la fonction inverse.

Les points du plan des t auxquels correspondent des valeurs réelles de z forment des arcs de cercle orthogonaux au cercle $|t| = 1$, divisant la surface de ce cercle en triangles curvilignes T dont les sommets sont sur la circonférence. Un point A , sommet d'un de ces triangles, est aussi sommet d'une infinité de triangles analogues dont les autres sommets forment une suite

$$\dots, A_{-1}, A_0, A_1, \dots, A_n, A_{n+1}, \dots$$

Par une inversion par rapport au point A , on obtient une suite de points équidistants,

$$\dots, B_{-1}, B_0, B_1, \dots, B_n, B_{n+1}, \dots;$$

cela résulte aisément des propriétés connues de la fonction modulaire.

Nous pouvons supposer que les deux points Λ_n et Λ_{n+1} mis en évidence sont situés de part et d'autre du diamètre issu de Λ . Il est évident que les distances $\Lambda_0\Lambda_1, \Lambda_1\Lambda_2, \dots$ (comptées en ligne droite ou sur le cercle) vont en croissant jusqu'à $\Lambda_n\Lambda_{n+1}$ et décroissent ensuite, et qu'on a

$$(3) \quad \Lambda\Lambda_{n+1} > \Lambda\Lambda_{n-1}, \quad \Lambda\Lambda_n > \Lambda\Lambda_{n-1}.$$

Soit d'autre part T_0 celui des triangles T qui contient le point $t=0$. Ses côtés ne pouvant pas couper l'arc $\Lambda\Lambda_{n+1}$, ou bien il coïncide avec $\Lambda\Lambda_n\Lambda_{n+1}$, ou bien ses trois sommets sont sur celui des arcs $\Lambda_n\Lambda_{n+1}$ du cercle $|t|=1$ qui ne contient pas le point Λ . Donc cet arc est au moins égal au plus petit des arcs interceptés sur le cercle $|t|=1$ par le triangle T_0 . Donc B_nB_{n+1} a un minimum indépendant du point Λ ; B_1B_n et AB_1 sont alors au moins de l'ordre de grandeur de n , et l'on a

$$(4) \quad n\Lambda\Lambda_1 < C,$$

C étant une quantité indépendante du choix des points Λ et Λ_1 . Elle ne peut être très grande que si le triangle T_0 a un de ses côtés très petit, et cela n'arrive que si α_0 est très grand ou très voisin de zéro ou de un.

Ces résultats préliminaires étant établis, l'expression de la fonction $\Phi(\alpha_0, \theta)$, donnée par M. Carathéodory, est

$$\Phi(\alpha_0, \theta) = \max_{|t|=\theta} |\log \lambda(t)|,$$

la détermination considérée de $\log \lambda(t)$ étant telle que son module soit aussi petit que possible pour $t=0$. Je me propose d'établir que cette fonction reste comprise, quand θ tend vers un, entre deux limites de la forme $\frac{K}{1-\theta}$, K désignant des fonctions convenablement déterminées de α_0 .

L'existence d'une limite inférieure de cette forme se vérifie facilement. Désignons par t_0 la valeur de t correspondant à un sommet d'un triangle T dans le voisinage duquel $\lambda(t)$ tende vers l'une des valeurs 0 ou ∞ ; on sait que, dans le voisinage de ce point, $\log \lambda(t)$ a pour valeur asymptotique, à un facteur constant près, $\frac{1}{t-t_0}$. Son module est donc supérieur à une limite de la

forme $\frac{K}{1-\theta}$, qui est aussi *a fortiori* une limite inférieure de $\Phi(a_0, \theta)$.

Pour établir l'existence d'une limite supérieure de la même forme, il suffit d'établir que la partie réelle et la partie imaginaire de $\log \lambda(t)$, sur le cercle $|t| = \theta$, ont toutes deux leurs modules inférieurs à une limite de cette forme.

Pour la partie réelle, cela résulte d'une formule obtenue par M. Landau ⁽¹⁾. En désignant par $g(t)$ une fonction régulière, différente de zéro et de un pour $|t| < 1$, cette formule s'écrit

$$\log |g(t)| < \chi[g(0)] \frac{1}{1-|t|} \quad (|t| < 1).$$

En l'appliquant aux fonctions $\lambda(t)$ et $\frac{1}{\lambda(t)}$ on obtient le résultat énoncé.

Quant à la partie imaginaire de $\log \lambda(t)$, son module est au plus égal à $\pi(N+1)$, en désignant par N le nombre de fois que $\lambda(t)$ prend une valeur réelle quand on va du point t à l'origine en suivant une ligne droite, c'est-à-dire le nombre de fois qu'on coupe un côté d'un triangle T en suivant le chemin indiqué. Soit d'autre part AA_0A_1 celui des triangles T qui contient le point t à son intérieur; appelons σ et Σ la plus petite et la plus grande des distances des points A, A_0 et A_1 deux à deux, comptées sur le cercle $|t| = 1$; nous pouvons supposer sans faire aucune restriction que Σ est l'arc AA_1 . $1 - |t| = 1 - \theta$ étant de l'ordre de grandeur de Σ ou plus petit, nous sommes ramenés à démontrer que

$$(5) \quad N\Sigma < K.$$

K désignant une quantité indépendante du triangle AA_0A_1 , et fonction de a_0 seulement.

En allant du point t vers l'origine en suivant une ligne droite, on quitte d'abord le triangle AA_0A_1 pour entrer dans un triangle AA_1A_2 ; nous supposerons que A_1 désigne celui des points A et A_1 qui est entre A_0 et A_2 ; l'arc A_0A_2 étant très petit (sauf pour un

⁽¹⁾ Formule (54) de son Mémoire *Ueber den Picardschen Satz* (*Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, 1906).

nombre fini de triangles AA_0A_1), le point A_1 ainsi désigné est bien déterminé. L'arc A_1A_2 est supérieur à l'arc A_0A_1 , et par suite à σ . La quantité analogue à Σ relative au triangle AA_1A_2 est donc supérieure à $\Sigma + \sigma$. On verrait de même que les quantités analogues relatives aux autres triangles T qu'on traverse en allant du point t à l'origine, sont supérieures respectivement à $\Sigma + 2\sigma$, $\Sigma + 3\sigma$, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on atteigne le triangle T_0 . Pour le triangle qui précède T_0 elle sera donc supérieure à

$$\Sigma + (N - 1)\sigma > N\sigma$$

et comme elle est inférieure à π , on a

$$(6) \quad N\sigma < \pi.$$

Soit maintenant AA_nA_{n+1} le dernier des triangles considérés qui ait A pour sommet; A_n et A_{n+1} sont alors situés de part et d'autre du diamètre passant par A , de sorte que la formule (4) s'applique. En augmentant un peu la valeur de la constante C , on peut évidemment remplacer AA_1 par Σ , et il vient

$$(7) \quad n\Sigma < C.$$

Désignons par σ' et N' les quantités analogues à σ et N relatives au triangle AA_nA_{n+1} . On a évidemment

$$N = n + N',$$

et, d'après les formules (3), n étant au moins égal à 2 ⁽¹⁾,

$$\sigma' > \Sigma.$$

La formule (6), appliquée au triangle AA_nA_{n+1} , donne alors

$$(8) \quad N'\Sigma < \pi.$$

En tenant compte de la formule (7), il vient

$$N\Sigma < \pi + C,$$

(1) Cette conclusion suppose que le plus petit côté du triangle AA_nA_{n+1} ne soit pas A_nA_{n+1} . Cela ne peut être faux que si AA_nA_{n+1} coïncide avec T_0 , et dans ce cas $N' = 0$, de sorte que la formule (8) est toujours exacte.

inégalité de la formule (5), qui, par suite, établit le théorème énoncé.

2. Considérons l'ensemble des fonctions $f(x)$ qui sont régulières et différentes de zéro et de un pour $|x| < R$, et qui prennent la valeur a_0 pour $x = 0$. Représentons leurs valeurs sur la surface de Riemann S dont il a déjà été question, en partant pour $x = 0$ du point $z = a_0$ marqué sur un feuillet bien déterminé de cette surface. Les points représentant les valeurs de toutes ces fonctions pour $|x| \leq \theta R$ ($\theta < 1$), forment une certaine région $\mathcal{R}$ sur la surface S .

D'après le théorème de M. Schottky, tous les points de cette région $\mathcal{R}$ sont intérieurs à un cercle ayant l'origine pour centre et un rayon convenablement déterminé; ils sont de même extérieurs à deux cercles de rayons suffisamment petits ayant respectivement pour centres les points $z = 0$ et $z = 1$. Il n'en résulte pas que la région $\mathcal{R}$ soit finie; il faut encore prouver qu'elle est située tout entière sur un nombre fini de feuillets de la surface S . Il suffit pour cela de montrer qu'on peut aller du point a_0 à un point quelconque P de $\mathcal{R}$ en décrivant un chemin de longueur finie intérieur à $\mathcal{R}$. Or, $f(x)$ étant celle des fonctions considérées dont la valeur, pour $x = \xi$, ($|\xi| \leq \theta R$), est représentée par le point P , le chemin représentant les valeurs de $f(x)$, quand x va de 0 à ξ en suivant une ligne droite, est de longueur finie; cela résulte du théorème de M. Landau, qui nous donne une limite supérieure de $|f'(x)|$ pour les valeurs de x considérées, puisque $f(x)$ ne peut être ni très grand, ni très voisin de zéro ou de un. La région $\mathcal{R}$ est donc sur la surface S une région finie. Remarquons qu'il n'est nullement évident, du moins au point de vue élémentaire ou nous nous plaçons ici, que le contour γ limitant cette région soit simple.

Nous allons maintenant établir que *la région $\mathcal{R}$ contient son contour γ* . Autrement dit, il faut montrer que, P étant un point de γ , parmi les fonctions $f(x)$ considérées, il en existe une dont la valeur, pour $x = \theta R$ par exemple, soit représentée par le point P . Or P peut être considéré comme limite d'une suite de points

$$P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$$

intérieurs à $\mathcal{R}$. Il existe sûrement, parmi les fonctions considérées,

une fonction $f_n(x)$ dont la valeur, pour $x = \theta R$, soit représentée par le point P_n . Or l'ensemble des fonctions $f(x)$ considérées est compact, d'après un théorème de MM. Landau et Carathéodory ⁽¹⁾. Donc, parmi les fonctions $f_n(x)$, on peut choisir une infinité de fonctions tendant vers une limite $f(x)$. D'après le théorème cité, elles tendent vers $f(x)$ d'une manière uniforme dans toute région intérieure au cercle $|x| = R$; il en résulte que $f(x)$ vérifie toutes les conditions indiquées.

Je dis maintenant que *cette fonction $f(x)$ admet le cercle $|x| = R$ comme coupure*. Pour le montrer, je supposerai qu'elle soit régulière sur un certain arc de ce cercle, et je montrerai que cette hypothèse conduit à une contradiction.

En faisant cette hypothèse, il existe un contour C , composé d'un arc du cercle $|x| = R$ et d'un arc de courbe extérieur à ce cercle, à l'intérieur duquel la fonction $f(x)$ soit régulière et différente de zéro et de un. Considérons la représentation conforme de la région intérieure à C sur l'intérieur du cercle $|x| = R$; on peut le faire sans utiliser le théorème de M. Schwarz, car on peut prendre pour C un contour formé de deux arcs de cercle, et alors cette représentation s'obtient à l'aide d'une fonction élémentaire. A tout point x' intérieur à C correspondra ainsi un point x' intérieur au cercle considéré; on peut établir cette correspondance de manière que x et x' soient nuls en même temps. On sait que dans ces conditions on aura toujours

$$|x| < |x'|$$

pour les points x' intérieurs à C . Posons

$$f(x') = g(x).$$

La fonction $g(x)$ est régulière et différente de zéro et de un pour $|x| < R$, et prend la valeur a_0 pour $x = 0$. Elle prend une valeur représentée par le point P pour $x' = \theta R$, c'est-à-dire pour $|x| < \theta R$. Les valeurs qu'elle prend pour $|x| = \theta R$ sont donc représentées par des points entourant complètement le point P , dont certains sont par suite extérieurs à la région $\mathcal{R}$. Cela étant

⁽¹⁾ *Beiträge zur Konvergenz von Funktionenfolgen (Sitzungsberichte der königlich-preussischen Akademie der Wissenschaften, 1911).*

impossible, d'après la définition même de la région $\mathfrak{R}$, le résultat énoncé est établi.

On sait que cette fonction $f(x)$ ne peut être qu'une fonction de la forme $\lambda(ax)$, a étant une constante de module $\frac{1}{R}$. On peut donc dire que les raisonnements précédents conduisent à une définition nouvelle de la fonction $\lambda(t)$, et, en partant de cette définition et par des raisonnements élémentaires, nous avons établi que cette fonction admet le cercle $|t| = 1$ comme coupure. C'est ce qui m'a fait penser qu'on pourrait de cette manière retrouver les autres propriétés de cette fonction.

Il suffirait d'établir que la fonction $f(x)$ considérée donne la représentation conforme de la surface S sur le cercle $|x| < R$. Je n'ai pu l'établir par des raisonnements élémentaires, ainsi que je l'ai déjà dit, et j'ai seulement pu ramener ce problème à la démonstration du théorème suivant : il existe une fonction régulière et différente de zéro et de un pour $|x| < R$, prenant la valeur a_0 pour $x = 0$, et dont les valeurs, pour tous les points du cercle $|x| = \theta R$, sont représentées sur la surface S par des points de la courbe γ .

3. Dans l'énoncé du théorème de M. Schottky, l'inégalité (2) peut être remplacée par l'inégalité

$$(9) \quad |f(x) - a_0| \leq \Psi(a_0, \theta) \quad \left(\theta = \frac{|x|}{R} < 1 \right).$$

La fonction $\Psi(a_0, \theta)$, pour une valeur déterminée de θ , reste finie quand a_0 n'est ni très grand, ni très voisin de zéro et de un. MM. Landau et Bernays ont même montré qu'elle reste finie quand a_0 est voisin de zéro ou de un. À cause du rôle analogue des deux nombres zéro et un, il suffit d'établir ce résultat en supposant a_0 voisin de un. Or, en considérant la détermination de $\sqrt{f(x)}$ qui est voisine de -1 pour $x = 0$, et en lui appliquant l'inégalité (9), on obtient une limite supérieure de $|\sqrt{f(x)} - \sqrt{a_0}|$ et par suite de $|f(x) - a_0|$ qui reste finie quand a_0 tend vers un.

La différence $f(x) - a_0$ s'annulant pour $x = 0$ et ayant

pour $|x| < \frac{R}{2}$ son module au plus égal à $\Psi\left(a_0, \frac{1}{2}\right)$, on a

$$|f(x) - a_0| \leq \frac{2|x|}{R} \Psi\left(a_0, \frac{1}{2}\right) = \frac{|x|}{R} \psi(a_0), \quad \left(|x| < \frac{R}{2}\right).$$

Si donc a_0 n'est pas très grand, et si $f(x)$ prend pour $x = \xi$ une valeur donnée b , $|\xi|$ n'étant pas très grand et $|b - a_0|$ n'étant pas très petit, on peut déterminer une limite supérieure de R .

En faisant un changement d'origine dans le plan des x , on obtient le théorème suivant :

Si une fonction $f(x)$ est régulière et différente de zéro et de un pour $|x| < R$, et si l'on a

$$f(\xi) = a, \quad f(\xi') = b \quad (b \neq a),$$

on peut déterminer une limite supérieure de R en fonction de ξ, ξ', a et b .

Si l'on a de plus

$$(10) \quad |a| < \omega, \quad |b - a| > \varepsilon,$$

$$(11) \quad |\xi| \leq \omega', \quad |\xi'| \leq \omega',$$

on peut déterminer une limite supérieure de R en fonction de ε, ω et ω' .

Je vais maintenant, comme je l'ai annoncé, établir un théorème plus général dont voici l'énoncé :

Soient a et b deux constantes et U_f et V_f deux fonctionnelles vérifiant la condition suivante : lorsque la fonction $f(x)$ tend uniformément vers une constante quelconque α dans une région finie $\mathcal{R}$ du plan, l'une au moins des inégalités

$$(12) \quad U_f - a \neq 0, \quad V_f - b \neq 0$$

est vérifiée à partir d'un certain instant ; il en est de même lorsque $\frac{1}{f(x)}$ tend uniformément vers zéro dans la région $\mathcal{R}$.

Dans ces conditions, si $f(x)$ est une fonction régulière et différente de zéro et de un pour $|x| < R$, et si l'on a de

plus

$$(13) \quad U_f = a, \quad V_f = b,$$

on peut déterminer une limite supérieure de R .

Par hypothèse, il existe un nombre ω tel que l'inégalité

$$|f(x)| > \omega,$$

supposée vérifiée dans toute la région $\mathcal{R}$, entraîne l'une au moins des inégalités (12). De même, pour chaque valeur finie de z , on peut déterminer un nombre ε tel que l'inégalité

$$|f(x) - z| < \varepsilon,$$

supposée vérifiée dans toute la région $\mathcal{R}$, entraîne l'une au moins des inégalités (12).

Je dis d'abord qu'on peut supposer ce nombre ε indépendant de la valeur considérée de z . La démonstration de ce fait est analogue à celle de la continuité uniforme des fonctions continues. Remarquons d'abord que pour $|z| > \omega + 1$ on peut prendre $\varepsilon = 1$. Si donc le résultat énoncé était faux, on pourrait trouver une suite de valeurs de z , tendant vers une limite finie z' , telles que les valeurs de ε correspondantes tendent nécessairement vers zéro; or il ne peut en être ainsi; car, en appelant ε' la valeur de ε correspondant à z' , la valeur $\frac{\varepsilon'}{2}$ convient certainement pour tous les nombres z tels que

$$|z - z'| \leq \frac{\varepsilon'}{2}.$$

Nous pouvons donc supposer ε indépendant de z .

La démonstration du théorème énoncé est alors immédiate. Il existe certainement dans $\mathcal{R}$ un nombre ξ tel que

$$|f(\xi)| = |a| < \omega,$$

car autrement les égalités (13) ne pourraient pas être vérifiées. Il existe, pour la même raison, un nombre ξ' tel que

$$|f(\xi') - a| = |b - a| > \varepsilon.$$

En appelant ω' la plus grande distance à l'origine d'un point de la

région $\mathcal{R}$, on a

$$|\xi| < \omega', \quad |\xi'| < \omega'.$$

Les quatre inégalités précédentes sont identiques aux inégalités (10) et (11). On peut donc déterminer une limite supérieure de R , ce qu'il fallait établir.

Il est facile de se rendre compte que les restrictions imposées aux fonctionnelles U_f sont très peu restrictives. Les fonctionnelles que l'on considère en général sont continues, c'est-à-dire tendent vers une limite quand la fonction dont elles dépendent tend uniformément dans la région $\mathcal{R}$ vers une fonction limite $\varphi(x)$, sauf peut-être pour certaines déterminations particulières de $\varphi(x)$. Il en sera donc ainsi, en général, de U_f , si l'on prend pour $\varphi(x)$ une constante α différente de certaines valeurs exceptionnelles (α'). Pour les autres valeurs de α , la limite de U_f sera une fonction continue de α , qui peut être égale à α pour certaines valeurs (α''). La seconde condition (13) conduit de même à considérer des valeurs (β') et (β'') de α . Ces valeurs exceptionnelles de α formeront le plus souvent des suites finies ou dénombrables, de sorte qu'en général aucun nombre (fini ou infini) ne figurera à la fois dans l'une des suites (α') ou (α'') et dans l'une des suites (β') ou (β''). Les hypothèses faites dans l'énoncé du théorème précédent sont donc vérifiées en général.

Considérons par exemple une condition de la forme

$$(14) \quad f(\xi) = \alpha,$$

le point ξ étant intérieur à la région $\mathcal{R}$. Il n'y a aucune valeur exceptionnelle (α'), et la suite (α'') se réduit au nombre α . Si donc on prend deux conditions de cette forme, avec deux valeurs différentes du second membre, le théorème considéré s'applique et l'on retrouve le théorème qui nous a servi de point de départ.

Soit maintenant une condition de la forme

$$(15) \quad f^{(n)}(\xi') = b.$$

La suite (α') se réduit à la valeur $\alpha = \infty$. On voit donc déjà que deux conditions de cette forme ne conviendraient pas, car cette valeur serait singulière pour les deux. Les nombres (α'') comprennent tous les nombres si $b = 0$, et n'en comprennent aucun

si $b \neq 0$. Dans ce dernier cas, on peut donc prendre une condition de la forme (14) et une de la forme (15), et le théorème considéré s'applique. Si $\xi' = \xi$, on retrouve ainsi le théorème de M. Landau généralisé par M. Schottky.

Le théorème qui vient d'être établi permet de former un exemple de *fonction de fonctionnelles*, c'est-à-dire de quantité dépendant d'une fonctionnelle comme une fonctionnelle dépend d'une fonction. En effet, les nombres positifs R se divisent en deux catégories suivant qu'il est ou non possible de déterminer une fonction $f(x)$ régulière et différente de zéro et de un pour $|x| < R$, et vérifiant en outre les conditions (13). Ces deux catégories de nombres ont une limite commune bien déterminée ρ . Supposons pour fixer les idées que la première des conditions (13) ait la forme

$$f(0) = a \quad (a \neq 0, a \neq 1);$$

ρ ne sera alors infini que dans le cas où a est une valeur exceptionnelle relative à la seconde condition considérée, et ne sera nul que dans le cas également particulier où cette condition sera incompatible avec la première. Cette quantité ρ est une fonction de la fonctionnelle $V_f - b$, et qui varie d'une manière continue avec les éléments qui servent à définir cette fonctionnelle.

SURFACES DONT LES LIGNES ASYMPTOTIQUES SE DÉTERMINENT COMME CELLES DE LA SURFACE DES ONDES;

PAR M. E. KERAVAL.

Au Tome IV de sa *Théorie des surfaces*, dans une Note sur la surface des ondes de Fresnel, M. Darboux a démontré, pour cette surface, la proposition suivante :

En tous les points de chaque ligne asymptotique de la surface, le plan tangent à la surface est tangent au cône d'un complexe de Chasles dont le tétraèdre fondamental est formé par les plans de symétrie et le plan de l'infini.

L'intégrale générale de l'équation différentielle des lignes asymptotiques est alors de la forme

$$(1) \quad \sqrt{\alpha z} + \sqrt{-\beta px} + \sqrt{-\gamma qy} = 0,$$

où α, β, γ sont trois constantes de somme nulle.

Réciproquement, M. Darboux cherche ensuite toutes les surfaces pour lesquelles l'équation différentielle des lignes asymptotiques est de la forme (1) et il trouve d'abord les surfaces tétraédrales et ensuite toutes celles qui vérifient l'équation aux dérivées partielles

$$(2) \quad s^2 - rt = \frac{pq}{xyz} (px + qy - z)$$

avec cette différence que pour les surfaces tétraédrales seulement la génératrice de contact du cône du complexe et du plan tangent coïncide avec une tangente à une ligne asymptotique de la surface.

C'est cette équation (2) que je me propose d'étudier. Je vais faire voir qu'on peut ramener son intégration à celle de

$$\frac{1}{z} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\lambda(1-\lambda)}{(x-y)^2} \quad \text{pour} \quad \lambda = \frac{1}{2},$$

qui est l'équation de Poisson. On sait que pour celle-ci on ne peut obtenir d'intégrale générale explicite bien qu'on puisse écrire sans aucun signe de quadrature les équations de chaque système de caractéristiques. Il en est de même pour l'équation (2).

Cette équation (2) étant de la forme

$$s^2 - rt = F(x, y, z, p, q).$$

les caractéristiques sont les lignes asymptotiques des surfaces intégrales. Ce sont donc des courbes dont le plan osculateur est tangent au cône d'un complexe tétraédral. Au lieu de la forme (1) je prends la forme

$$(3) \quad b\sqrt{px} + \sqrt{qy} + a\sqrt{z} = 0 \quad \text{avec} \quad a^2 - b^2 = 1;$$

à tout système de valeurs de a, b correspond un complexe. Soit maintenant

$$p(X-x) + q(Y-y) = Z-z,$$

l'équation du plan osculateur à la courbe au point x, y, z . Ces

trois quantités x, y, z , ainsi que p, q , sont fonctions d'un paramètre λ . Je dérive deux fois par rapport à λ et j'exprime que les équations obtenues sont vérifiées pour $X = x, Y = y, Z = z$. Au lieu de garder p et q j'introduis

$$\frac{px}{z} = A, \quad \frac{qy}{z} = B.$$

J'ai ainsi

$$A \frac{X}{x} + B \frac{Y}{y} - \frac{Z}{z} = A + B - 1.$$

En effectuant les opérations que j'ai indiquées on trouve les deux équations

$$A \frac{x'}{x} + B \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z},$$

$$A \left(\frac{x'}{x} \right)^2 + B \left(\frac{y'}{y} \right)^2 - \left(\frac{z'}{z} \right)^2 = A' \frac{x'}{x} + B' \frac{y'}{y}.$$

Je vais poser pour abrégier $\frac{x'}{x} = X, \frac{y'}{y} = Y, \frac{z'}{z} = Z, X, Y, Z$ n'ayant pas naturellement la même signification que plus haut. J'ai alors

$$(4) \quad \begin{cases} AX + BY = Z, \\ AX^2 + BY^2 - Z^2 = A'X + B'Y. \end{cases}$$

Or, pour vérifier (3), on peut poser

$$\begin{aligned} A &= \lambda^2, & B &= (a + b\lambda)^2, \\ d'où & & & \\ A' &= 2\lambda, & B' &= 2b(a + b\lambda). \end{aligned}$$

Si j'élimine Z entre les équations (4) je trouve

$$A(A-1)X^2 + B(B-1)Y^2 + 2ABXY + A'X + B'Y = 0.$$

Cette équation en X, Y représente une conique dont le discriminant Δ est nul si l'on remplace A et B en fonction de λ . Cette équation se décompose donc et donne

$$\lambda(\lambda^2 - 1)X + \lambda(a + b\lambda)^2 Y + 1 = \pm [1 + Y(a + b\lambda)(a\lambda + b)].$$

Si je prends le signe $+$ je trouve

$$\lambda X + b(a + b\lambda)Y = 0$$

ou

$$A'X - B'Y = 0;$$

dans ce cas la génératrice de contact coïncide avec la tangente à la courbe, il faut donc prendre le signe —

$$\lambda(\lambda^2 - 1)X + (a + b\lambda)(b\lambda^2 + 2a\lambda + b)Y + 2 = 0,$$

$$AX + BY = Z.$$

La première équation va nous donner x et y en fonction de λ , la deuxième donnera z .

Pour plus de symétrie on peut introduire une deuxième variable μ liée à la première par la relation

$$\mu = a + b\lambda.$$

On a alors

$$(5) \quad b\lambda(\lambda^2 - 1)\frac{x'}{x} + \mu(\mu^2 - 1)\frac{y'}{y} + 2b = 0.$$

Posons

$$\frac{d}{d\mu} \log x = \mu(\mu^2 - 1)b \varphi_{\lambda}^{(iv)}$$

d'où

$$\frac{\log x}{b} = \mu(\mu^2 - 1) \varphi_{\lambda}''' + b(1 - 3\mu^2) \varphi_{\lambda}'' + 6b^2 \mu \varphi_{\lambda}' - 6b^3 \varphi$$

et (5) devient

$$\log y = -b^2[\lambda(\lambda^2 - 1) \varphi_{\lambda}''' + (1 - 3\lambda^2) \varphi_{\lambda}'' + 6\lambda \varphi_{\lambda}' - 6\varphi] - \log \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2}.$$

On a ensuite

$$\frac{z'}{z} = b^2 \lambda \mu (a \lambda^2 + 2b\lambda + a) \varphi_{\lambda}^{iv} - \frac{2b\mu}{\mu^2 - 1},$$

et il suffit de remplacer φ_{λ}^{iv} par une dérivée d'ordre cinq pour pouvoir intégrer sans aucun signe de quadrature.

THÉORÈME. — *L'intégration de l'équation de M. Darboux*

$$(2) \quad s^2 - rt = \frac{pq}{xyz} (px + qy - z)$$

se ramène à celle de l'équation d'Euler

$$\frac{1}{z} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{K(1 - K)}{(x - y)^2} \quad \text{où} \quad K = \frac{1}{2}.$$

Je pose comme plus haut

$$\frac{px}{z} = A, \quad \frac{qy}{z} = B,$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{pq}{xy^2}(px + qy - z)} = \frac{z}{xy} \sqrt{AB(A + B - 1)}.$$

Si α, β sont les paramètres des lignes asymptotiques, les équations des caractéristiques me donnent

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial \alpha} &= -\lambda \frac{\partial x}{\partial \alpha}, & \frac{\partial p}{\partial \alpha} &= -\lambda \frac{\partial y}{\partial \alpha}, \\ \frac{\partial q}{\partial \beta} &= +\lambda \frac{\partial x}{\partial \beta}, & \frac{\partial p}{\partial \beta} &= -\lambda \frac{\partial y}{\partial \beta}. \end{aligned}$$

Je pose

$$\begin{aligned} X &= \text{Log } x, & Y &= \text{Log } y, & P &= \text{Log } p, & Q &= \text{Log } q, \\ F &= \sqrt{AB(A + B - 1)}. \end{aligned}$$

Les quatre équations précédentes deviennent alors, en remplaçant α, β par x, y qui désigneront les paramètres des lignes asymptotiques :

$$(I) \quad \begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{F}{B} \frac{\partial X}{\partial x}, \\ \frac{\partial Q}{\partial y} = +\frac{F}{B} \frac{\partial X}{\partial y}; \end{cases}$$

$$(II) \quad \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = +\frac{F}{A} \frac{\partial Y}{\partial x}, \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{F}{A} \frac{\partial Y}{\partial y}. \end{cases}$$

Or, A et B sont les mêmes aux points homologues de toutes les surfaces intégrales, c'est-à-dire aux points qui correspondent aux mêmes valeurs des paramètres. On peut donc poser par analogie avec les quadriques

$$A = \frac{(xy - 1)^2}{(x - y)^2}, \quad B = \frac{(x + y)^2}{(x - y)^2},$$

d'où

$$\begin{aligned} F &= \frac{(xy - 1)(x + y)(xy + 1)}{(x - y)^3}, \\ \frac{F}{A} &= \frac{(x + y)(xy + 1)}{(x - y)(xy - 1)}, & \frac{F}{B} &= \frac{x^2 y^2 - 1}{x^2 - y^2}. \end{aligned}$$

Si je pose, en adoptant les notations de M. Darboux,

$$\hat{\mathcal{F}}(z) \equiv \frac{1}{z} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},$$

je sais que le système (I) conduit à l'équation

$$\hat{\mathcal{F}}\left(x\sqrt{\frac{F}{B}}\right) = \hat{\mathcal{F}}\left(\sqrt{\frac{F}{B}}\right).$$

Or,

$$\hat{\mathcal{F}}\sqrt{\frac{F}{B}} = -\frac{xy}{(x^2y^2-1)^2} - \frac{3xy}{(x^2-y^2)^2}.$$

Je suis donc ramené à intégrer l'équation

$$\frac{1}{z} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{xy}{(x^2y^2-1)^2} - \frac{3xy}{(x^2-y^2)^2}.$$

Je pose $x^2 = \alpha$, $y^2 = \beta$, cette équation devient

$$\frac{1}{z} \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{-1}{4(\alpha\beta-1)^2} - \frac{3}{4(\alpha-\beta)^2}.$$

Je change encore de variables et je prends

$$x' = \frac{x+1}{x-1}, \quad y' = \frac{\beta+1}{\beta-1};$$

l'équation devient, en mettant xy au lieu de $x'y'$,

$$\hat{\mathcal{F}}(z) = \frac{-\frac{1}{4}}{(x+y)^2} + \frac{-\frac{3}{4}}{(x-y)^2}.$$

Elle est de la forme considérée par M. Darboux au Tome II de sa *Théorie des surfaces*

$$\hat{\mathcal{F}}(z) = \frac{\mu(\mu-1)}{(x+y)^2} - \frac{\mu'(\mu'-1)}{(x-y)^2}$$

en posant

$$\mu = +\frac{1}{2}, \quad \mu' = -\frac{1}{2};$$

on peut augmenter μ' d'une unité et prendre

$$\mu = \mu' = +\frac{1}{2},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{F}}(z) &= \frac{-\frac{1}{4}}{(x+y)^2} + \frac{\frac{1}{4}}{(x-y)^2}, \\ \hat{\mathcal{G}}(z) &= \frac{xy}{(x^2-y^2)^2};\end{aligned}$$

en prenant pour variables $x^2 = z$, $y^2 = \beta$, on aura

$$\hat{\mathcal{F}}(z) = \frac{1}{4(z-\beta)^2}.$$

C'est bien l'équation de Poisson. On pourrait faire de même pour le système (II), mais je préfère indiquer une deuxième méthode.

THÉORÈME I. — *On passe de l'équation*

$$(A) \quad s^2 - rt = \frac{pq}{xyz}(px + qy - z)$$

à l'équation

$$(B) \quad x(x-1)r + 2xys + y(y-1)t = 0$$

par une transformation de contact.

Je pars de l'équation (A) à laquelle j'applique la transformation ponctuelle

$$\text{d'où} \quad x = ex', \quad y = ey', \quad z = ez',$$

$$p = p' e^{z'-x'}, \quad q = q' e^{z'-y'},$$

$$r = e^{z'-2x'}[r' + p'(p'-1)],$$

$$t = e^{z'-2y'}[t' + q'(q'-1)],$$

$$s = e^{z'-x'-y'}[s' + p'q'].$$

Les exponentielles disparaissent dans (A) qui devient, en supprimant les accents,

$$(C) \quad (s^2 - rt) + 2pq s - p(p-1)t - q(q-1)r = 0.$$

A cette équation j'applique la transformation de Legendre

$$p = x', \quad q = y', \quad s^2 - rt = \frac{1}{s'^2 - r't'}.$$

Cette équation devient, en supprimant les accents,

$$(D) \quad x(x-1)r + 2xys + y(y-1)t - 1 = 0.$$

Si alors $z = F(x, y)$ est une solution particulière de cette équation en posant

$$z = F(x, y) + z_1,$$

elle prend la forme (B).

Il résulte de là que l'équation (A) de M. Darboux admet un groupe d'ordre infini de transformations de contact, car si dans (B) on change z par $z + z_1$, z_1 étant une intégrale particulière quelconque, l'équation ne change pas.

THÉORÈME II. — *L'équation*

$$(E) \quad x^{2-k}(x^k - 1)r + 2xys + y^{2-k}(y^k - 1)t = 0,$$

qui correspond à la déformation infiniment petite des surfaces tétraédrales, s'intègre complètement (mais pas explicitement); elle est équivalente à l'équation d'Euler

$$\frac{1}{z} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\mu(1-\mu)}{(x-y)^2}.$$

La surface tétraédrale qui correspond à (E) est

$$x^k + y^k + z^k = 1.$$

Pour $k = 1$, l'équation (E) devient l'équation (D); la surface tétraédrale est alors un plan. On peut prendre alors la surface

$$z = (x + y - 1) \operatorname{Log}(x + y - 1) - x \operatorname{Log} x - y \operatorname{Log} y.$$

k et m sont liés par la relation

$$\mu = \frac{k-2}{2k}.$$

Je considère l'équation

$$(A) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left[\frac{P}{x+y} + \frac{P'}{y-x} + \frac{Rx}{xy+1} + \frac{R'x}{xy-1} \right] \frac{\partial z}{\partial x} + \left[\frac{P}{x+y} + \frac{P'}{x-y} + \frac{Ry}{xy+1} + \frac{R'y}{xy-1} \right] \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

où les constantes $PP'RR'$ sont liées par la relation

$$P + P' + R + R' = 0.$$

Cette équation a ses invariants égaux et égaux à

$$\frac{P(P-1)}{(x+y)^2} - \frac{P'(P'-1)}{(x-y)^2} - \frac{R(R-1)}{(xy-1)^2} + \frac{R'(R'-1)}{(xy+1)^2}.$$

En cherchant si cette équation (λ) admet des solutions de la forme

$$x = (x+y)^{\frac{1}{2}} (x-y)^{\frac{1}{2}} (xy-1)^{\nu} (xy+1)^{\nu'}.$$

je trouve que, pour

$$P = \frac{1-m}{2}, \quad P' = \frac{1+m}{2}, \quad R = \frac{m-3}{2}, \quad R' = \frac{1-m}{2},$$

l'équation (λ) admet les deux solutions

$$z = \left(\frac{x+y}{y-x} \right)^m \quad \text{et} \quad z = \left(\frac{xy-1}{y-x} \right)^m,$$

de telle sorte qu'en changeant de variables et en posant

$$x = \left(\frac{\alpha + \beta}{\beta - \alpha} \right)^m, \quad y = \left(\frac{\alpha\beta - 1}{\beta - \alpha} \right)^m,$$

la nouvelle équation sera linéaire et homogène par rapport aux dérivées partielles du deuxième ordre.

Or, si l'on forme cette équation en remplaçant α, β par x, y , on trouve précisément l'équation (E), à condition de poser

$$\frac{2}{m} = k.$$

Ainsi l'équation (E) et l'équation (λ), où P, P', R, R' ont les valeurs indiquées, se correspondent par une transformation ponctuelle. J'ai donc à ramener cette équation (λ) à l'équation d'Euler.

Or, cette équation (λ) a été envisagée sous sa forme réduite par M. Darboux au Chapitre des équations harmoniques. La forme réduite ne change pas si l'on change P' en $1 - P'$; or $P' = 1 - P$. On peut donc prendre

$$P = P' = \frac{m+1}{2}.$$

On peut augmenter R et R' chacun d'une unité, alors

$$R = \frac{m-1}{2}, \quad R' = \frac{3-m}{2},$$

$$R - R' = 1$$

On remplace R' par $1 - R' = R$, alors

$$R = R' = \frac{m-1}{2}.$$

Enfin on peut augmenter R et R' de un, alors

$$P = P' = R = R' = \frac{m+1}{2}$$

et la forme réduite de l'équation (λ) est alors

$$\tilde{\mathcal{F}}(z) = \frac{m^2-1}{4} \left[\frac{1}{(x+y)^2} - \frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(xy-1)^2} - \frac{1}{(xy+1)^2} \right],$$

ou

$$\tilde{\mathcal{F}}(z) = (m^2-1) \left[\frac{-xy}{(x^2-y^2)^2} + \frac{xy}{(x^2y^2-1)^2} \right],$$

et, en prenant pour variables $x^2 = \alpha$, $y^2 = \beta$,

$$\frac{1}{z} \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{m^2-1}{4} \left[\frac{1}{(\alpha\beta-1)^2} - \frac{1}{(\alpha-\beta)^2} \right].$$

Je pose

$$\alpha = \frac{x+1}{x-1}, \quad \beta = \frac{y+1}{y-1},$$

$$\tilde{\mathcal{F}}(z) = \frac{m^2-1}{4} \left[\frac{1}{(x+y)^2} - \frac{1}{(x-y)^2} \right];$$

une dernière transformation donne

$$\tilde{\mathcal{F}}(z) = \frac{1-m^2}{4} \frac{1}{(x-y)^2}.$$

Enfin je pose

$$m = 1 - 2\mu,$$

$$\tilde{\mathcal{F}}(z) = \frac{\mu(1-\mu)}{(x-y)^2};$$

d'ailleurs

$$k = \frac{2}{m} = \frac{2}{1-2\mu},$$

d'où

$$\mu = \frac{k-2}{2k}.$$

Solutions particulières de l'équation

$$(A) \quad s^2 - rt = \frac{pq}{xyz} (px + qy - z).$$

Il est clair d'abord que l'équation (A) admet toutes les transformations homographiques qui conservent le tétraèdre fondamental T formé des plans de coordonnées et du plan de l'infini. On vérifie facilement que (A) admet la solution

$$z = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

quel que soit F et, par suite,

$$z = x F(y) \quad \text{et} \quad z = y F(x);$$

on trouve encore

$$x^\alpha y^\beta z^\gamma = C.$$

Je vais maintenant associer à l'équation (A) une autre équation (A') qui me conduira à quelques surfaces intéressantes. J'applique à (A) la transformation d'Ampère

$$x' = p, \quad y' = y, \quad z' = z - px, \quad p' = -x, \quad q' = q$$

et j'ai l'équation

$$(A') \quad \frac{r}{t} = \frac{py}{qx} \frac{z - px}{z - qy}.$$

Or, cette équation (A') est vérifiée par les surfaces tétraédrales de Lamé, donc l'équation (A) admet comme solution les transformées de ces surfaces par la transformation d'Ampère. On a ainsi les surfaces

$$(S) \quad z = A(x^\alpha + h)^{\frac{1}{\alpha}} (y^\beta + k)^{\frac{1}{\beta}}$$

avec

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1.$$

On trouve les mêmes surfaces en cherchant les solutions de (A) qui sont de la forme

$$z = F(x) G(y).$$

Lorsqu'on a l'équation d'une surface vérifiant (A), on a immédiatement ses lignes asymptotiques, puisqu'il suffit de poser

$$\frac{px}{z} = \frac{(uv - 1)^2}{(u - v)^2}, \quad qy = \frac{(u + v)^2}{(u - v)^2},$$

u et v étant les paramètres des lignes asymptotiques.

Les surfaces (S) rapportées à leurs lignes asymptotiques ont pour équations

$$\begin{aligned}x^\alpha &= A \frac{(uv-1)^2}{(u^2-1)(v^2-1)}, \\y^\beta &= B \frac{(u+v)^2}{uv}, \\z^{\alpha+\beta} &= C \frac{(u-v)^{2\alpha+2\beta}}{(uv)^\alpha (u^2-1)^\beta (v^2-1)^\beta},\end{aligned}$$

avec

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1.$$

En particulier, en transformant les quadriques

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D = 0$$

par la transformation d'Ampère, on trouve une surface intéressante dite *surface de l'arrière voussure Saint-Antoine* (PICARD, *Traité d'Analyse*, t. I, et ROUCHÉ, *Comptes rendus*, mars 1877). On peut l'écrire

$$c^2 z^2 = (x^2 - a^2)(y^2 - b^2)$$

et rapportée à ses lignes asymptotiques,

$$\begin{aligned}x^2 &= a^2 \frac{(uv-1)^2}{(u^2-1)(v^2-1)}, \\y^2 &= b^2 \frac{(u+v)^2}{4uv}, \\z^2 &= \frac{a^2 b^2}{c^2} \frac{(u-v)^4}{4uv(u^2-1)(v^2-1)}.\end{aligned}$$

Cette surface rentre dans la catégorie de celles étudiées par M. E. Blutel dans sa Thèse sur les surfaces qui sont en même temps lieux de coniques et enveloppes de cônes du second degré. Appelons ces surfaces des surfaces Σ .

Si l'on transforme par la transformation d'Ampère une surface réglée absolument quelconque, on obtient une surface Σ . Le fait est à peu près évident et résulte de ce que la transformation d'Ampère fait correspondre à une droite un parabolôïde hyperbolique de plans directeurs zOx et zOy , c'est-à-dire une quadrique passant par deux arêtes de T. Soient A, B, C les points à l'infini sur Ox , Oy , Oz : T sera le tétraèdre OABC et à un lieu de

droites il correspondra en général un lieu de coniques s'appuyant sur CA, CB.

Si l'on se donne une droite Δ et des plans tangents passant par Δ et correspondant homographiquement aux points de contact, la transformation d'Ampère leur fera correspondre une conique avec plans tangents le long de la conique enveloppant un cône.

On peut généraliser. Les transformées par homographie de la transformation de Lie fournissent des transformations de contact qui, à une droite, font correspondre une quadrique passant par une conique fixe. Par exemple, les deux égalités

$$\begin{aligned} -xz' + zx' + y' - z &= 0, \\ +yz' - zy' + x' + 1 &= 0 \end{aligned}$$

définissent une transformation de contact qui fait correspondre, à une droite, une quadrique passant par le cercle $z = 0, x^2 + y^2 = 1$. De pareilles transformations transforment une surface réglée en une surface Σ engendrée par une conique mobile s'appuyant sur une conique fixe. Il est facile de voir que le théorème de M. E. Blutel sur les courbes conjuguées des coniques se déduit dans ce cas particulier du théorème bien connu sur les lignes asymptotiques des surfaces réglées.

Dans la surface Saint-Antoine on retrouve les propriétés indiquées par M. E. Blutel pour les surfaces du quatrième degré ayant deux paires de points doubles. Il y a deux séries de coniques passant par les couples de points doubles : les cônes circonscrits le long des coniques d'une série ont leurs sommets sur la droite qui joint les points coniques de l'autre ; les deux systèmes de coniques sont donc conjugués.

L'équation (A') peut fournir des solutions intéressantes de l'équation (A). Par exemple, la fonction

$$z = \frac{xy}{Axy + Bx + Cy + D}$$

est une solution de (A'). La transformation d'Ampère la change en une solution de (A). On trouve ainsi une surface du quatrième degré engendrée par le déplacement d'une conique tangente à CA en un point variable. Pour $A = 0$ on a une surface Σ , puisque c'est la transformée d'une surface réglée.

Cette surface en fournit d'autres plus générales en appliquant le théorème suivant qui me paraît être une des propriétés intéressantes de cette équation (A') :

THÉORÈME. — *L'équation*

$$(A') \quad \frac{r}{t} = \frac{py}{qx} \frac{z - px}{z - qy}$$

ne change pas si on lui applique la transformation

$$x' = x^m,$$

$$y' = y^m,$$

$$z' = z^m,$$

où m est quelconque.

Effectivement on trouve

$$\begin{aligned} p' &= p \left(\frac{z}{x} \right)^{m-1}, & q' &= q \left(\frac{z}{y} \right)^{m-1}, \\ \frac{m x^{2m-2}}{z^{m-1}} r' &= r - \frac{(m-1)p(z-px)}{zx}, \\ \frac{m y^{2m-2}}{z^{m-1}} t' &= t - \frac{(m-1)q(z-qy)}{zy}, \end{aligned}$$

d'où facilement le résultat énoncé. On peut également appliquer la méthode indiquée par M. Goursat pour ce genre de question, c'est-à-dire se servir des caractéristiques.

SUR L'IRRATIONALITÉ DES SOMMES DES SÉRIES DONT LE TERME GÉNÉRAL EST UNE FONCTION RATIONNELLE DE L'INDICE;

PAR M. E. CAHEN.

Les séries dont nous nous occupons sont de la forme

$$\sum_{n=n_0}^{n=\infty} \frac{f(n)}{g(n)},$$

f et g étant des polynomes entiers en n , le degré de $f(n)$ étant

inférieur à celui de g d'au moins deux unités. Le nombre n_0 est un nombre entier. Enfin nous supposons que $g(n)$ n'a aucune racine entière supérieure ou égale à n_0 (sans quoi, certains termes de la série n'auraient pas de sens).

On peut d'ailleurs supposer $n_0 = 1$, car si $n_0 \neq 1$ on peut faire le changement de notation consistant à remplacer n par $n + n_0 - 1$. Dans la suite nous supposons donc que la somme est prise de $n = 1$ à $n = \infty$ et nous supprimerons l'indication des limites 1 et ∞ qui seront sous-entendues.

Nous nous proposons d'abord de trouver quelle fonction des coefficients de f et de g est la somme d'une telle série.

Un tel résultat n'est pas seulement d'un intérêt théorique, il peut être utile dans le calcul numérique de la somme, comme on en verra des exemples plus loin.

THÉORÈME. — *La somme d'une série de la forme*

$$\sum \frac{f(n)}{g(n)}$$

s'exprime au moyen de fonctions rationnelles, de nombres rationnels, des coefficients de $f(n)$ et de $g(n)$, des racines de $g(n)$, de la dérivée logarithmique de la fonction eulérienne Γ , enfin des dérivées de cette dernière fonction jusqu'à un certain ordre.

En effet, décomposons $\frac{f(n)}{g(n)}$ en fractions simples. Nous aurons des termes de la forme

$$\frac{\Lambda}{(n - \alpha)^p} \quad (1 < p \leq \infty)$$

et des termes de la forme

$$\frac{\Lambda'}{n - \alpha}.$$

Nous allons chercher d'abord à exprimer la somme des termes de la première forme

$$\Lambda \sum \frac{1}{(n - \alpha)^p}.$$

Soit $\Gamma(x)$ la fonction eulérienne bien connue. On a

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = e^{Cx} x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}$$

(C étant la constante d'Euler).

Appelant $h(x)$ la dérivée logarithmique du premier membre [c'est-à-dire la dérivée logarithmique de $\Gamma(x)$ changée de signe] nous avons

$$(1) \quad h(x) = \frac{1}{x} + C - x \sum \frac{1}{n(x+n)},$$

d'où, en dérivant $p-1$ fois,

$$h^{(p-1)}(x) = (-1)^{p-1} (1 \cdot 2 \dots p-1) \sum \frac{1}{(x+n-1)^p}.$$

Il en résulte que

$$(2) \quad A \sum \frac{1}{(n-a)^p} = \frac{(-1)^{p-1} A h^{(p-1)}(1-a)}{1 \cdot 2 \dots (p-1)}.$$

Passons maintenant aux termes de la forme $\frac{A'}{n-a}$. Réunissons-les avant de les sommer; soient

$$\frac{A'}{n-a} + \frac{B'}{n-b} + \dots + \frac{L'}{n-l}$$

ces termes; on peut les écrire

$$\frac{A'a}{n(n-a)} + \frac{B'b}{n(n-b)} + \dots + \frac{L'l}{n(n-l)} + \frac{A'+B'+\dots+L'}{n}.$$

Or

$$A' + B' + \dots + L' = 0.$$

[On le voit, soit en exprimant que le degré de $f(n)$ est inférieur d'au moins deux unités à celui de $g(n)$, soit en remarquant que si $A' + B' + \dots + L'$ n'était pas nul, le terme $\frac{A'+B'+\dots+L'}{n}$ donnerait naissance à une série divergente.]

Les termes de la forme $\frac{A'a}{n(n-a)}$ donnent par sommation

$$A'a \sum \frac{1}{n(n-a)}.$$

Or, d'après la formule (1),

$$(3) \quad A' a \sum \frac{1}{n(n-a)} = A' \left[h(-a) - C + \frac{1}{a} \right].$$

En résumé on a obtenu la somme de la série par des termes de la forme de ceux qui constituent les seconds membres des égalités (2) et (3).

Les nombres a sont les racines de $g(n)$, les nombres tels que A et A' s'expriment rationnellement en fonction des nombres tels que a et des coefficients de f et de g ; quant au nombre C on peut le remplacer par $h(1)$. Enfin l'entier p ne dépasse pas α qui est le degré de multiplicité de a . Donc le théorème est démontré.

Différentes expressions de la somme. — On peut d'ailleurs modifier les expressions (2) et (3) d'après les relations fonctionnelles auxquelles satisfait la fonction $h(x)$.

On a

$$(4) \quad h(1+x) = h(x) - \frac{1}{x},$$

d'où, en dérivant $p-1$ fois,

$$h^{(p-1)}(1+x) = h^{(p-1)}(x) + (-1)^p \frac{1 \cdot 2 \dots (p-1)}{x^p}.$$

Donc la formule (2) peut s'écrire

$$(5) \quad A \sum \frac{1}{(n-a)^p} = (-1)^{p-1} A \left[\frac{h^{(p-1)}(-a)}{1 \cdot 2 \dots (p-1)} + \frac{1}{a^p} \right].$$

On a aussi la relation fonctionnelle

$$(6) \quad h(x) - h(-x) = \frac{1}{x} + \pi \cot(\pi x),$$

d'où, par $(p-1)$ dérivations,

$$(7) \quad \begin{aligned} h^{(p-1)}(x) + (-1)^p h^{(p-1)}(-x) \\ = \frac{(-1)^{p-1} 1 \cdot 2 \dots (p-1)}{x^p} + \pi \frac{d^{p-1} \cot(\pi x)}{dx^{p-1}}, \end{aligned}$$

de sorte que la formule (5) peut encore s'écrire

$$A \sum \frac{1}{(n-a)^p} = \frac{A}{1 \cdot 2 \dots (p-1)} \left[h^{(p-1)}(a) - \pi \frac{d^{p-1} \cot(\pi a)}{da^{p-1}} \right].$$

De même la formule (3), par l'emploi de la formule (6), peut s'écrire

$$A'a \sum \frac{1}{n(n-a)} = A'[h(a) - G - \pi \cot(\pi a)].$$

Exemple :

$$\sum \frac{1}{n(n^2 - a^2)} = \frac{h(a) + h(-a) - 2G}{2a^2} = \frac{2h(a) - \pi \cot(\pi a) - 2G}{2a^2} - \frac{1}{2a^3}.$$

Il résulte du théorème précédent que l'étude des irrationalités que peuvent présenter les séries dont nous nous occupons est ramenée à celle des irrationalités que peuvent présenter la fonction h et ses dérivées jusqu'à un certain ordre pour les différentes valeurs de la variable.

Cette étude n'est pas encore faite. Le théorème que nous démontrerons plus loin, relativement au cas où la variable a une valeur rationnelle, peut en être considéré comme le début. On sait d'ailleurs combien elle est peu avancée pour les fonctions en général. Elle n'est guère faite que pour les fonctions algébriques et pour les fonctions circulaires et exponentielles.

Nous allons maintenant considérer des cas particuliers, cherchant principalement ceux dans lesquels la fonction h et ses dérivées disparaissent de l'expression de la somme ; cherchant dans les autres à réduire au moindre nombre d'irrationnelles possibles.

PREMIER CAS. — $g(n)$ a toutes ses racines entières et distinctes. — Dans ce cas la somme de la série est un nombre rationnel. C'est un fait bien connu et qui se démontre facilement sans l'emploi de la fonction h . Il résulte immédiatement de la formule (3). En effet, a est dans ce cas un entier négatif ou nul. On peut même dire que a est plus petit que zéro, car si $a = 0$ le terme $A'a \sum_1^{\infty} \frac{1}{n(n-a)}$ est nul.

Soit donc

$$a = -a',$$

a' étant > 0 .

Alors

$$h(-a) = G - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{a'-1} \right),$$

et par suite

$$A' a \sum \frac{1}{n(n-a)} = -A' \left[\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{a'} \right].$$

D'ailleurs $A' = \frac{f(a)}{g'(a)}$.

En résumé,

$$\begin{aligned} & \sum \frac{f(n)}{(n+a')(n+b') \dots (n+l')} \\ &= \sum_{a', b', \dots, l'} \frac{f(-a')}{(b'-a') \dots (l'-a')} \left[\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{a'} \right], \end{aligned}$$

résultat qui, encore une fois, se démontrerait simplement sans l'intervention de la fonction h .

DEUXIÈME CAS. — $g(n)$ a toutes ses racines rationnelles et distinctes. — Dans ce cas, la somme de la série s'exprime au moyen de nombres algébriques et de fonctions logarithmes.

Puisque les racines de $g(n)$ sont supposées distinctes, l'expression de la somme ne contient d'après le théorème fondamental que des nombres rationnels, et la fonction h .

Donc le théorème que nous avons en vue revient au suivant qui est celui annoncé plus haut :

Pour des valeurs rationnelles de x , la fonction $h(x)$ s'exprime au moyen de nombres algébriques, de la constante d'Euler, et de fonctions logarithmes.

Les deux théorèmes sont équivalents, démontrons le second.

D'abord on peut supposer que la valeur de x pour laquelle on veut calculer $h(x)$ est négative, car, d'après la formule (6) le calcul de h pour une valeur positive de x se ramène au calcul de $h(-x)$.

Ensuite on peut supposer

$$-1 < x \leq 0,$$

en vertu de la formule (4).

La valeur rationnelle de x pour laquelle on veut calculer x peut

donc se désigner par

$$-\frac{p}{q}$$

avec

$$q > 0, \quad 0 \leq p < q.$$

Ceci posé on a, d'après la formule (1),

$$\begin{aligned} (8) \quad h\left(-\frac{p}{q}\right) &= -\frac{q}{p} + C + p \sum \frac{1}{n(qn-p)} \\ &= -\frac{q}{p} + C + q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{qn-p} - \frac{1}{qn} \end{aligned}$$

et tout revient à calculer la série du second membre. Pour cela nous partons de la formule

$$\frac{1}{1} + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \dots = \frac{-L(1-x)}{x}$$

qui est, comme on sait, valable pour les valeurs de x dont le module est 1, sauf pour la valeur $x = 1$.

Faisons donc x égal à une racine $q^{\text{ième}}$ de l'unité différente de 1, soit α cette racine. Il vient :

$$\frac{1}{1} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{3} + \dots = -\frac{L(1-\alpha)}{\alpha},$$

ou, en réunissant les termes ⁽¹⁾ dont les rangs diffèrent entre eux d'un multiple de q ,

$$\sum \frac{1}{qn-(q-1)} + \alpha \sum \frac{1}{qn-(q-2)} + \dots + \alpha^{q-1} \sum \frac{1}{qn} = \frac{-L(1-\alpha)}{\alpha}.$$

Maintenant, dans cette égalité, faisons α égal successive-

(1) On introduit ainsi dans le calcul des séries divergentes $\sum \frac{1}{qn-p}$, il suffit de lire $\sum_1^n \frac{1}{qn-p}$ et de ne faire croître n indéfiniment que dans le résultat définitif.

L'égalité (9) devient ici

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 + \lambda_2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-2} + \left(\lambda_1 e^{\frac{2i\pi}{3}} + \lambda_2 e^{\frac{4i\pi}{3}} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1} \\ & + \left(\lambda_1 e^{\frac{4i\pi}{3}} + \lambda_2 e^{\frac{8i\pi}{3}} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n} \\ & = - \left[\frac{\lambda_1 L\left(1 - e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)}{e^{\frac{2i\pi}{3}}} + \frac{\lambda_2 L\left(1 - e^{\frac{4i\pi}{3}}\right)}{e^{\frac{4i\pi}{3}}} \right]. \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= 1, \\ \lambda_1 e^{\frac{2i\pi}{3}} + \lambda_2 e^{\frac{4i\pi}{3}} &= 0, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{e^{\frac{2i\pi}{3}}}{e^{\frac{2i\pi}{3}} - 1}, \\ \lambda_2 &= \frac{-1}{e^{\frac{2i\pi}{3}} - 1}; \end{aligned}$$

l'équation $\lambda_1 e^{\frac{4i\pi}{3}} + \lambda_2 e^{\frac{8i\pi}{3}} = -1$ se trouve satisfaite et l'on trouve

$$\begin{aligned} \sum \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n} \right) &= \frac{L\left(1 - e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)}{1 - e^{\frac{2i\pi}{3}}} + \frac{L\left(1 - e^{\frac{4i\pi}{3}}\right)}{1 - e^{\frac{4i\pi}{3}}} \\ &= \frac{L3}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{18} (= 0,84161) \end{aligned}$$

et

$$h\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{3}{2} + C + \frac{3}{2}L3 + \frac{\pi\sqrt{3}}{6}.$$

On en tire

$$\begin{aligned} h\left(\frac{1}{3}\right) &= h\left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{3}{2} = C + \frac{3}{2}L3 + \frac{\pi\sqrt{3}}{6}, \\ h\left(\frac{4}{3}\right) &= h\left(\frac{1}{3}\right) - 3 = C - 3 + \frac{3}{2}L3 + \frac{\pi\sqrt{3}}{6}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

On peut même donner une expression générale de $h\left(-\frac{p}{q}\right)$ en résolvant les équations en λ par la règle de Cramer.

Autres exemples :

$$\sum \frac{1}{n(2n+1)} = 2(1-L_2) = 0,6137,$$

$$\sum \frac{1}{n(3n+1)} = 3 - \frac{3}{2}L_3 - \frac{\pi\sqrt{3}}{6} = 0,4452,$$

$$\sum \frac{1}{n(9n^2-1)} = \frac{3}{2}(L_3-1).$$

Nous vérifions sur ces exemples ce que nous avons annoncé au début de ce travail. Si ces séries se présentent dans un calcul numérique, il est plus simple de les calculer par leurs expressions aux seconds membres, que directement.

REMARQUE. — *Si les racines de $g(n)$ étant commensurables, leurs différences deux à deux sont entières, la somme est un nombre commensurable.*

Car les nombres désignés plus haut par $a, b, \dots, l$ diffèrent entre eux d'entiers e , les quantités $h(a), h(b), \dots, h(l)$ sont égales à des nombres rationnels près, on peut les réduire à la seule quantité $h(a)$. Comme de plus $A+B+\dots=0$, le coefficient de $h(a)$ disparaît

Exemple :

$$\sum \frac{1}{(2n-1)(2n+3)} = \frac{1}{3}.$$

Voici une formule plus générale ⁽¹⁾; soient

$$c, \quad c-q_1, \quad \dots, \quad c-q_p, \quad q_1 < q_2 < \dots < q_p,$$

les racines du dénominateur; soit

$$\frac{\alpha_0}{n-c} + \frac{\alpha_1}{n-c+q_1} + \dots + \frac{\alpha_p}{n-c+q_p}$$

le terme général décomposé en éléments simples, la somme de la

⁽¹⁾ E. FABRY, *Théorie des séries à termes constants*, p. 79, Paris, Hermann, 1911.

série est

$$\begin{aligned} & x_0 \left(\frac{1}{-c+1} + \frac{1}{-c+2} + \dots + \frac{1}{-c+q_1} \right) \\ & - (x_0 + x_1) \left(\frac{1}{-c+q_1+1} + \dots + \frac{1}{-c+q_2} \right) + \dots \\ & + (\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + q_p) \left(\frac{1}{c+q_{p-1}} + \dots + \frac{1}{c+q_p} \right). \end{aligned}$$

TROISIÈME CAS. — *Les polynomes $f(n)$ et $g(n)$ ne contiennent que des puissances paires de n .*

Alors, dans la décomposition de $\frac{f(n)}{g(n)}$ en éléments simples, à chaque terme

$$\frac{\Lambda' a}{n(n-a)} \quad (a \neq 0)$$

correspond le terme

$$\frac{\Lambda' a}{n(n+a)}.$$

Or

$$\Lambda' a \sum \frac{1}{n(n-a)} = \Lambda' \left[h(-a) - C + \frac{1}{a} \right]$$

et

$$\Lambda' a \sum \frac{1}{n(n+a)} = -\Lambda' \left[h(a) - C - \frac{1}{a} \right].$$

Ces deux sommes en se réunissant donnent

$$\Lambda' \left[h(-a) - h(a) + \frac{2}{a} \right]$$

ou

$$\Lambda' \left[-\pi \cot(\pi a) + \frac{1}{a} \right],$$

donc la fonction h disparaît dans ces termes.

Il y a ensuite des termes de la forme

$$\Lambda \sum \frac{1}{(n-a)^p}$$

à chacun desquels correspond le terme

$$(-1)^p \Lambda \sum \frac{1}{(n+a)^p}.$$

Or

$$\Lambda \sum \frac{1}{(n-a)^p} = \frac{\Lambda}{1 \cdot 2 \dots (p-1)} \left[h^{(p-1)}(a) - \pi \frac{d^{p-1} \cot(\pi a)}{da^{p-1}} \right]$$

et

$$(-1)^p A \sum \frac{1}{(n+a)^p} \\ = \frac{A}{1.2 \dots (p-1)} \left[(-1)^p h^{(p-1)}(-a) - \pi \frac{d^{p-1} \cot(\pi a)}{da^{p-1}} \right].$$

Ces deux termes, en se réunissant, donnent

$$\frac{A}{1.2 \dots (p-1)} \left[h^{(p-1)}(a) + (-1)^p h^{(p-1)}(-a) - 2\pi \frac{d^{p-1} \cot(\pi a)}{da^{p-1}} \right],$$

c'est-à-dire, d'après la formule (7),

$$A \left[\frac{(-1)^{p-1}}{a^p} - \frac{\pi}{1.2 \dots (p-1)} \frac{d^{p-1} \cot(\pi a)}{da^{p-1}} \right],$$

de sorte que la fonction h disparaît aussi dans ces termes. Restent enfin les termes correspondant à $a = 0$ et qui sont de la forme

$$\frac{A}{n^{2k}}.$$

Or, on sait que

$$A \sum \frac{1}{n^{2k}} = A \frac{2^{2k-1} B_k}{1.2 \dots (2k)} \pi^{2k},$$

B_k étant un nombre rationnel, le $k^{\text{ième}}$ nombre de Bernoulli.

Exemples :

$$\begin{aligned} \sum \frac{1}{n^2 - a^2} &= -\frac{1}{2a^2} - \frac{k}{2a} \cot \pi a, \\ \sum \frac{1}{n^2 + a^2} &= \frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{a} \frac{e^{\pi a} + e^{-\pi a}}{e^{\pi a} - e^{-\pi a}}, \\ \sum \frac{1}{n^4 + 4} &= -\frac{1}{8} + \frac{\pi(e^{\pi} + e^{-\pi})}{8(e^{\pi} - e^{-\pi})}, \\ \sum \frac{1}{(n^2 - a^2)^3} &= \frac{1}{2a^6} - \frac{\pi^3}{8a^3} \frac{\cos \pi a}{\sin^3 \pi a} - \frac{3\pi^2}{16a^4 \sin^2 \pi a} - \frac{3\pi \cot \pi a}{16a^5}, \\ \sum \frac{1}{(4n^2 - 1)^3} &= \frac{1}{2} - \frac{3\pi^2}{64}. \end{aligned}$$

QUATRIÈME CAS. — $g(n)$ a ses racines entières, mais multiples. — Dans ce cas, les termes de la forme $\sum \frac{1}{n(n-a)}$ sont rationnels; ceux de la forme $\sum \frac{1}{(n-a)^x}$ ($x > 1$) se ramènent immé-

diatement à $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, somme qu'on désigne par $\zeta(\alpha)$ ou encore à $\frac{(-1)^{\alpha-1}}{1 \cdot 2 \dots (\alpha-1)} h^{(\alpha-1)}(1)$. Si p est pair, ils s'expriment en fonction rationnelle de π ; sinon, ce sont des transcendentes sans aucun rapport connu avec les transcendentes algébriques, circulaires, etc. Il peut d'ailleurs arriver que ces derniers termes disparaissent.

Exemple :

$$\begin{aligned} & \sum \frac{7n(n+1)+2}{n^5(n+1)^5} \\ &= \sum \left[\frac{2}{n^5} - \frac{3}{n^4} + \frac{2}{n^3} - \frac{2}{(n+1)^5} - \frac{3}{(n+1)^4} - \frac{2}{(n+1)^3} \right] \\ &= 2\zeta(5) - 3\zeta(4) + 2\zeta(3) \\ &\quad - 2[\zeta(5) - 1] - 3[\zeta(4) - 1] - 2[\zeta(3) - 1] \\ &\quad = -6\zeta(4) + 7 = 7 - \frac{\pi^4}{15} = 0,5062. \end{aligned}$$

CINQUIÈME CAS. — $g(n)$ a ses racines commensurables et multiples. — La série proposée se ramène à des séries de la forme

$$\sum \frac{1}{[q(n-1)+p]^\alpha} \quad (\alpha > 1),$$

où l'on peut supposer $0 < p \leq q$. Nous disons que ce sont les séries de période q .

1° Soit $q=1$. Alors $p=1$, la série est

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} = \zeta(\alpha).$$

2° $q=2$. Alors $p=1$ ou $p=2$.

Si $p=1$, la série est

$$\sum \frac{1}{(2n-1)^\alpha} = \left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right) \zeta(\alpha).$$

Si $p=2$, la série est

$$\sum \frac{1}{(2n)^\alpha} = \frac{1}{2^\alpha} \zeta(\alpha).$$

3° $q=3$. Alors $p=1, 2, 3$.

Si $p=1$, la série est

$$\sum \frac{1}{(3n-2)^x},$$

c'est une transcendante nouvelle ⁽¹⁾, appelons-la

$$\zeta_{3,2}(x).$$

Si $p=2$,

$$\sum \frac{1}{(3n-1)^x} = \left(1 - \frac{1}{3^x}\right) \zeta(x) - \zeta_{3,2}(x)$$

Si $p=3$,

$$\sum \frac{1}{(3n-1)^x} = \frac{1}{3^x} \zeta(x).$$

4° $q=4$. Alors $p=1, 2, 3, 4$.

Si $p=1$,

$$\sum \frac{1}{(4n-3)^x}$$

est une transcendante nouvelle $\zeta_{4,3}(x)$.

Si $p=2$,

$$\sum \frac{1}{(4n-2)^x} = \frac{1}{2^x} \left(1 - \frac{1}{2^x}\right) \zeta(x).$$

Si $p=3$,

$$\sum \frac{1}{(4n-1)^x} = \left(1 - \frac{1}{2^x}\right) \zeta(x) - \zeta_{4,3}(x).$$

Si $p=4$,

$$\sum \frac{1}{(4n)^x} = \frac{1}{4^x} \zeta(x).$$

5° $q = \text{nombre premier impair quelconque}$. Alors

$$p = 1, 2, \dots, q.$$

Pour $p=1, 2, \dots, q-2$, on a des transcendantes nouvelles

$$\zeta_{q,q-1}(x), \quad \zeta_{q,q-2}(x), \quad \dots, \quad \zeta_{q,2}(x).$$

Pour $p=q$, on a

$$\sum \frac{1}{(qn)^x} = \frac{1}{q^x} \zeta(x).$$

(1) Tout au moins elle n'a pas été ramenée aux transcendantes précédentes.

Enfin pour $p = q - 1$, on a

$$\sum \frac{1}{(qn-1)^{\alpha}} = \left(1 - \frac{1}{q^{\alpha}}\right) \zeta(\alpha) - \zeta_{q,q-1}(\alpha) - \zeta_{q,q-2}(\alpha) - \dots - \zeta_{q,2}(\alpha).$$

6° q quelconque

$$p = 1, 2, \dots, q,$$

d'où les q séries

$$\sum \frac{1}{[q(n-1)+1]^{\alpha}}, \quad \sum \frac{1}{[q(n-1)+2]^{\alpha}}, \quad \dots, \quad \sum \frac{1}{[q(n-1)+q]^{\alpha}}.$$

Celles de la forme

$$\sum \frac{1}{[q(n-1)+p]^{\alpha}},$$

où p n'est pas premier à q , s'expriment par des séries de période inférieure à q .

Restent les séries

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum \frac{1}{[q(n-1)+r_1]^{\alpha}}, \quad \sum \frac{1}{[q(n-1)+r_2]^{\alpha}}, \quad \dots, \\ \sum \frac{1}{[q(n-1)+r_{\varphi(q)}]^{\alpha}}, \end{array} \right.$$

$r_1, r_2, \dots, r_{\varphi(q)}$ étant les entiers positifs plus petits que q et premiers avec lui. Mais elles ne constituent pas $\varphi(q)$ transcendentes nouvelles. En effet, soient d un diviseur de q et r un nombre de la suite $r_1, r_2, \dots, r_{\varphi(q)}$; on a

$$\begin{aligned} \sum \frac{1}{[q(n-1)+r]^{\alpha}} + \sum \frac{1}{[q(n-1)+d+r]^{\alpha}} + \dots \\ + \sum \frac{1}{\left[q(n-1) + \left(\frac{q}{d} - 1\right)d + r\right]^{\alpha}} = \sum \frac{1}{[\varphi(n-1)+r]^{\alpha}}. \end{aligned}$$

On pourra écrire $\lambda(q)\varphi(q)$ telles relations, $\lambda(q)$ étant le nombre des diviseurs de q . Mais elles ne sont pas toutes distinctes.

Lorsque q est premier, il y en a deux distinctes, par conséquent toutes les séries de période q s'expriment en fonction de $q - 2$ d'entre elles et de séries de périodes moindres.

Lorsque q est une puissance d'un nombre premier [$q = p^{\alpha}$, ($\alpha > 1$)], il y en a $p^{\alpha-2}(2p-1)$. Par conséquent, toutes les séries de

période p^α s'expriment en fonction de $p^{\alpha-2} (p-1)^2$ d'entre elles et de séries de période moindre.

Lorsque $q=2p^\alpha$ (p premier impair), le nombre des relations distinctes est q , et par conséquent toutes les séries de période q s'expriment en fonction de séries de périodes moindres.

Exemple $q=6$, on a

$$\sum \frac{1}{[6(n-1)+1]^\alpha} = \left(1 + \frac{1}{2^\alpha}\right) \zeta_{3,2}(\alpha) - \frac{1}{2^\alpha} \left(1 - \frac{1}{3^\alpha}\right) \zeta(\alpha),$$

$$\sum \frac{1}{[6(n-1)+2]^\alpha} = \frac{1}{2^\alpha} \zeta_{3,2}(\alpha),$$

$$\sum \frac{1}{[6(n-1)+3]^\alpha} = \frac{1}{3^\alpha} \left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right) \zeta(\alpha),$$

$$\sum \frac{1}{[6(n-1)+4]^\alpha} = \frac{1}{2^\alpha} \left(1 - \frac{1}{3^\alpha}\right) \zeta(\alpha) - \frac{1}{2^\alpha} \zeta_{3,2}(\alpha),$$

$$\sum \frac{1}{[6(n-1)+5]^\alpha} = \left(1 - \frac{1}{3^\alpha}\right) \zeta(\alpha) - \left(1 + \frac{1}{2^\alpha}\right) \zeta_{3,2}(\alpha),$$

$$\sum \frac{1}{[6(n-1)+6]^\alpha} = \frac{1}{6^\alpha} \zeta(\alpha).$$

Il serait intéressant de faire le compte des séries indépendantes de périodes q pour q quelconque.

D'ailleurs ces fonctions

$$\zeta_{h,k}(\alpha) = \sum \frac{1}{(hn-k)^\alpha},$$

auxquelles on est ramené, donnent encore lieu aux remarques suivantes :

$\zeta_{h,k}(\alpha) + \zeta_{h-k,k}(\alpha)$ est exprimable pour α pair;

$\zeta_{h,k}(\alpha) - \zeta_{h-k,k}(\alpha)$ pour α impair, en fonction des transcendentes π , $\cos \frac{2k\pi}{h}$, sur $\frac{2k\pi}{h}$.

Par exemple

$$\sum \frac{1}{[3(n-1)+1]^3} - \sum \frac{1}{[3(n-1)+2]^3} = \frac{4\pi^3}{81\sqrt{3}} = 0,88402.$$

Ces derniers résultats se trouvent déjà dans Euler ⁽¹⁾. On les retrouve comme cas particuliers des théorèmes précédents.

⁽¹⁾ Voir E. CAHEN, Sur la fonction $\zeta(s)$ et sur des fonctions analogues Chap. III, n° 49 (Annales de l'École Normale supérieure, 1891).

SUR LA THÉORIE DES MULTIPLICITÉS ET LE CALCUL DES VARIATIONS

PAR M. E. VESSIOT.

1. Dans de précédentes publications ⁽¹⁾ j'ai été conduit, par l'étude de la propagation d'un ébranlement par ondes, suivant la loi des ondes enveloppes (principe d'Huygens), à reprendre deux problèmes généraux du calcul des variations : l'étude du minimum d'une intégrale définie, de forme (homogène) donnée

$$(1) \quad J = \int F(x_1, \dots, x_n, dx_1, \dots, dx_n),$$

prise suivant un arc de courbe variable, d'extrémités données; et celle du minimum de la valeur que prend, à l'extrémité d'un arc de courbe variable, d'origine et d'extrémités données, une variable t , de valeur donnée à l'origine de ce même arc et satisfaisant à une équation différentielle donnée

$$(2) \quad dt = F(t | x_1, \dots, x_n | dx_1, \dots, dx_n).$$

Ces deux fonctionnelles représentent, en effet, la durée de la propagation le long de l'arc de courbe considéré, de son origine à son extrémité, en régime permanent dans le premier cas, en régime variable dans le second cas.

Le fait essentiel que l'on constate est que le minimum est donné par les arcs de trajectoires de la propagation, au moins pour des extrémités suffisamment rapprochées, lorsque l'arc considéré perce les ondes élémentaires, issues de ses points successifs (et dans le sens où l'ébranlement se transmet sur cet arc), en des points dans le voisinage desquels ces ondes sont concaves vers leurs origines respectives. Dans le premier des deux articles rappelés, j'avais déduit ce résultat de la considération de la variation seconde; dans le second, j'ai employé aussi une méthode

⁽¹⁾ *Sur l'interprétation mécanique des transformations de contact infinitésimales* (Bulletin de la Soc. math. de France, t. XXXIV, 1906); *Essai sur la propagation par ondes* (Annales de l'Éc. Normale sup., 3^e série, t. XXVI, 1909).

directe, plus rigoureuse, qui équivaut aux méthodes de Weierstrass et Hilbert et à laquelle l'étude de la propagation des ondes conduit presque intuitivement.

Dans sa thèse et, plus tard, dans son Mémoire sur les maxima et minima *forts* ⁽¹⁾, M. Carathéodory a fait usage d'une représentation géométrique, où interviennent dans le cas $n = 2$, et pour le premier des deux problèmes, les courbes d'onde, sous le nom d'*indicatrices*. Dans ses *Leçons sur le Calcul des variations* ⁽²⁾, auxquelles nous renverrons souvent dans cet article, M. Hadamard utilise une représentation géométrique analogue : c'est ce qu'il appelle la *figurative* du problème; il introduit, de plus, sa polaire réciproque, la *figuratrice*; et cela, dans les problèmes généraux auxquels il donne le nom de *problème de Lagrange* et *problème de Mayer*, et qui diffèrent des précédents, en ce que les variables $x_1, \dots, x_n$ sont liées par des relations différentielles données

$$(3) \quad F_h(x_1, \dots, x_n | dx_1, \dots, dx_n) = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, z),$$

dans le cas de l'intégrale (1) (problème de Lagrange);

$$(4) \quad F_h(t | x_1, \dots, x_n | dx_1, \dots, dx_n) = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, z),$$

dans le cas de l'équation (2) (problème de Mayer).

Mais, pour ces deux auteurs, il ne s'agit que d'illustrer des résultats analytiques, tandis qu'à notre point de vue les ondes élémentaires, ou les multiplicités d'onde, leurs homothétiques, sont à l'origine même du problème et le dominant complètement. C'est ainsi, par exemple, que se trouve absolument imposée l'introduction de l'équation aux dérivées partielles d'Hamilton-Jacobi, qui définit, pour nous, les familles d'ondes issues de l'ébranlement simultané des divers points d'une même multiplicité; ainsi que

⁽¹⁾ *Ueber die discontinuierlichen Lösungen der Variations-Rechnung* (Göttingen, 1904);

Ueber die starken Maxima und Minima bei einfachen Integralen (*Math. Annalen*, t. LXII, 1906). M. Carathéodory dit bien que ses *indicatrices* ne diffèrent pas des *surfaces d'onde*, utilisées en Optique, mais il ne fait pas usage de cette analogie. Les Mémoires si remarquables de M. Carathéodory m'avaient, du reste, échappé au moment où je rédigeais mes précédents articles.

⁽²⁾ Paris, 1910. M. Hadamard a professé au Collège de France, sur le Calcul des variations, à partir de 1902.

l'introduction du système canonique, qui est la traduction complète du mouvement général de propagation, dont le caractère essentiel est d'être un déplacement des éléments de contact des ondes.

2. Dans les pages qui suivent, nous traitons, au même point de vue, le *problème de Lagrange*. Les ondes élémentaires et les multiplicités d'onde qui leur correspondent sont ici des multiplicités à $n-1$ dimensions, dont le support ponctuel contient $\infty^{n-1-\alpha}$ points. Mais si l'on veut avoir une véritable propagation, on est conduit à supposer que le *support tangentiel* de ces multiplicités, c'est-à-dire le système des plans de leurs éléments de contact, contient ∞^{n-1} plans ⁽¹⁾. Or cela revient à supposer que le problème de calcul des variations est un *problème ordinaire* ⁽²⁾, hypothèse qui s'impose aussi dans le calcul des variations pour diverses raisons.

Déjà, dans nos précédents articles, s'était montrée l'importance du point de vue tangentiel dans les problèmes considérés : il équivaut à la considération de la figuratrice de M. Hadamard. Ici encore, c'est la représentation de la multiplicité d'onde par son support tangentiel qui est le fondement de notre méthode. Il est bien remarquable qu'elle permet d'éviter l'objection de du Bois-Reymond sur l'introduction prématurée des dérivées secondes dans une question qui n'en suppose pas l'existence, *a priori*. C'est, en effet, le système canonique d'Hamilton qui se présente d'abord pour définir les extrémales du problème.

On évite aussi les discussions, assez délicates, nécessaires pour justifier l'emploi des multiplicateurs de Lagrange ; car ils se présentent ici d'eux-mêmes pour définir le choix que l'on a à faire entre les divers éléments de contact, associés à chaque point, sur les ondes élémentaires successivement rencontrées par une extrémale. Et l'on a ainsi, en outre, la vraie signification de ces multiplicateurs.

En ce qui concerne les conditions du minimum, nous nous

⁽¹⁾ Sans cela, les ébranlements produits en un point quelconque, suivant certaines orientations des éléments de contact de ce point, ne pourraient pas se propager. Je reviendrai sur ce point dans un autre travail.

⁽²⁾ Cf. HADAMARD, *loc. cit.*, p. 239, 267, 268.

sommes bornés à établir des conditions suffisantes, en généralisant la méthode déjà employée dans notre article des *Annales de l'École Normale*, 1909. Elles se traduisent encore par la condition de concavité des multiplicités d'onde vers leurs origines, qui ne nous paraît pas encore avoir été énoncée pour ce problème.

Pour faciliter notre exposé, nous avons réuni dans une première Partie les principes sur la géométrie des multiplicités que nous aurions à employer. On y trouvera, outre la double représentation au moyen du support ponctuel et du support tangentiel, la définition et l'étude de la concavité, soit en un élément de contact, soit dans le domaine d'un tel élément. Pour discuter cette concavité, on est conduit à considérer la forme quadratique

$$\varpi = \sum_{i=1}^n dp_i dq_i,$$

où $p_1, \dots, p_n$ sont les coordonnées du point d'un élément de contact, et $q_1, \dots, q_n$ les coefficients de direction ⁽¹⁾ de son plan. L'étude de cette forme quadratique se ramène à celle d'autres formes quadratiques, où interviennent les données de la représentation, ponctuelle ou tangentielle, de la multiplicité. De cette même forme ϖ dépendent les notions d'élément osculateur et de variation asymptotique pour les multiplicités les plus générales. Le fait qu'elle s'évanouit identiquement caractérise les multiplicités linéaires.

3. La considération des ondes, où l'intégrale J représente une durée de propagation, exige que l'élément différentiel soit positif. On ramène à ce cas, comme l'on sait, celui où cet élément changerait de signe, sur l'arc de courbe considéré, en ajoutant à F une différentielle totale convenablement choisie : cela revient à effectuer sur la multiplicité d'onde (qui peut toujours se définir) une

(1) Pour mieux mettre en évidence le caractère dualistique de toutes les considérations qui interviennent, nous avons imposé à ces $2n$ coordonnées la condi-

tion $\sum_{i=1}^n p_i q_i = 1$. Mais il n'y aurait rien d'essentiel à changer, si l'on voulait employer des coordonnées homogènes.

transformation projective qui est la dualistique d'une translation. Au point de vue de l'énoncé des résultats, il est plus naturel alors de se borner à la considération des ondes élémentaires: le minimum a lieu s'il y a concavité quand F est positif, et convexité quand F est négatif.

Le procédé de représentation des multiplicités d'onde, que nous avons systématiquement employé, utilise l'équation tangentielle sous la forme résolue par rapport à la coordonnée d'homogénéité. En réalité, cela n'entraîne aucune restriction essentielle, car la condition de possibilité qui intervient est celle qui se présente aussi pour l'application des théorèmes d'existence des intégrales d'un système différentiel aux équations différentielles des extrémales écrites sous la forme donnée par Lagrange.

Néanmoins, nous nous réservons de montrer, dans un autre travail, que notre méthode de mise en équations des problèmes de calcul des variations n'est nullement liée à ce mode de représentation particulier, pas plus qu'au signe de l'élément différentiel. Elle peut aussi s'étendre au cas des intégrales multiples.

Remarquons, pour terminer, que le caractère analytique des équations différentielles du problème, tel qu'il résulte de notre exposé, consiste en ce qu'elles expriment que la variation de l'intégrale curviligne

$$(5) \quad \int \sum_{i=1}^n q_i dx_i$$

est nulle, les variables $x_1, \dots, x_n$; $q_1, \dots, q_n$ étant liées par une seule relation

$$(6) \quad G_0(x_1, \dots, x_n | q_1, \dots, q_n) = 0.$$

On pourrait, par suite, rattacher l'étude du problème de Lagrange à la réduction d'une expression de Pfaff. Nous nous bornerons ici à l'indication de cette nouvelle méthode, qui serait susceptible de s'étendre aux problèmes non ordinaires, au problème de Mayer, et aussi aux problèmes d'extremum des intégrales multiples.

I. — REMARQUES SUR LA GÉOMÉTRIE DES MULTIPLICITÉS.

1. Dans un espace à n dimensions, désignons par $p_1, \dots, p_n$ les coordonnées cartésiennes d'un point quelconque, et convenons

de ramener l'équation d'un plan quelconque à la forme

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n q_i X_i = 1,$$

$X_1, \dots, X_n$ étant les coordonnées ponctuelles courantes. Les coordonnées d'un *élément de contact* seront alors $2n$ nombres $p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n$, liés par la relation

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n p_i q_i = 1.$$

Se trouvent exclus les éléments de contact dont le plan passe à l'origine, et ceux dont le point est à l'infini ⁽¹⁾.

Une *multiplicité* (M) à $n-1$ dimensions sera définie par un système (S) de $n+1$ équations entre les coordonnées de son élément de contact courant; ce système est assujetti à la double condition d'avoir comme conséquence l'équation (2), et l'une ou l'autre des deux équations de Pfaff ⁽²⁾

$$(3) \quad \sum_{i=1}^n q_i dp_i = 0,$$

$$(4) \quad \sum_{i=1}^n p_i dq_i = 0,$$

qui sont équivalentes en tenant compte de l'équation (2).

(1) Si l'on en avait quelqu'un à considérer, on pourrait se ramener au cas normal, respectivement, par l'une des transformations suivantes (translation et transformation corrélative) :

$$\begin{aligned} p'_i &= p_i + a_i, & q'_i &= \frac{q_i}{1 + \sum_i a_i q_i} & (i = 1, 2, \dots, n); \\ q'_i &= q_i + b_i, & p'_i &= \frac{p_i}{1 + \sum_i b_i p_i} & (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

(2) On ne parle, généralement, que de l'équation (3). Notre exposition a pour but de faire apparaître le rôle absolument symétrique des deux groupes de coordonnées $p_1, \dots, p_n$ et $q_1, \dots, q_n$.

Or, entre les équations de ce système (S), on peut éliminer $q_1, \dots, q_n$. On obtient ainsi un certain nombre $\alpha + 1$ d'équations en $p_1, \dots, p_n$, indépendantes entre elles. De même on peut éliminer $p_1, \dots, p_n$ et obtenir $\beta + 1$ équations en $q_1, \dots, q_n$, indépendantes entre elles. Les deux systèmes partiels ainsi obtenus

$$(5) \quad F_h(p_1, \dots, p_n) = 0 \quad (h = 0, 1, 2, \dots, \alpha),$$

$$(6) \quad G_k(q_1, \dots, q_n) = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, \beta),$$

définissent respectivement ce qu'on peut appeler le *support ponctuel* et le *support tangentiel* de la multiplicité : à savoir le lieu des points et la famille des plans qui, respectivement, font partie des éléments de contact de cette multiplicité.

L'un ou l'autre de ces supports définit entièrement la multiplicité. Rappelons-en la raison, pour le support ponctuel par exemple.

Dire que les équations (5) expriment le résultat de l'élimination de $q_1, \dots, q_n$ entre les équations du système (S) équivaut à dire que les équations $dF_h = 0$ ($h = 0, 1, 2, \dots, \alpha$) expriment toutes les relations indépendantes, en $dp_1, \dots, dp_n$, qui résultent de la différentiation des équations du système (S). L'équation (3) ne peut donc être qu'une conséquence des équations $dF_h = 0$ ($h = 0, 1, 2, \dots, \alpha$). En exprimant ce fait, on obtient $n - \alpha - 1$ équations linéaires homogènes en $q_1, \dots, q_n$, qui sont indépendantes et constituent avec (2), qui n'est pas homogène, un système (Σ) de $n - \alpha$ équations linéaires, indépendantes, en $q_1, \dots, q_n$.

Cela posé, soit $(p_1, \dots, p_n)$ un point du support (5). D'après la définition du support, il y a au moins un élément de contact de (M) associé à ce point. Et les coordonnées $q_1, \dots, q_n$ qui achèvent de définir un tel élément satisfont au système linéaire (Σ), en vertu de la définition des multiplicités et des explications précédentes. Si donc nous voulons déterminer tous les éléments de contact de (M) associés au point considéré, nous pourrons tirer de (Σ) les expressions de $n - \alpha$ des inconnues q_i en fonction des autres, $q_1, \dots, q_\alpha$, par exemple, qu'il s'agira de calculer de manière à satisfaire aux équations obtenues en portant ces expressions dans les équations (S). Ces équations en $q_1, \dots, q_\alpha$ ne sont pas incom-

patibles ; et, dès lors, elles ne peuvent être que des identités. Car, sans cela, le système (S) serait équivalent à un système formé de plus de $n + 1$ équations indépendantes, et la multiplicité (M) aurait moins de $n - 1$ dimensions.

Les éléments de contact de (M) sont donc entièrement définis par les équations (5) et le système (Σ) (¹). Quant au système (Σ), il est formé de l'équation (2) et des équations obtenues en éliminant les inconnues auxiliaires λ_h ($h = 0, 1, 2, \dots, \alpha$) entre les équations

$$(7) \quad q_i = \frac{\partial f_0}{\partial p_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

où f désigne la fonction

$$(8) \quad f_0 = \sum_{h=0}^{\alpha} \lambda_h F_h,$$

des variables indépendantes $p_1, \dots, p_n; \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_\alpha$.

Il est, en général, préférable de garder les équations (7) telles quelles : l'élément de contact général de (M) se trouve ainsi exprimé au moyen des $\alpha + 1$ paramètres λ_h et des $n - \alpha - 1$ paramètres dont dépend le point courant du support ponctuel ; les paramètres étant liés par la relation

$$(9) \quad \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial f_0}{\partial p_i} = 1,$$

qui résulte de (2).

On remarquera que cette relation exclut le cas où le système (5) serait homogène ; car le premier membre de (9) s'annulerait alors pour tout point du support. Dans ce cas, en effet, tous les éléments de contact de (M) se trouvent exclus par la condition (2).

Tous ces raisonnements et ces résultats s'appliquent au support

(¹) De là résulte ce théorème : *Tous les plans associés à un même point pour former des éléments de contact de (M) forment un système linéaire. Et, par suite, corrélativement : Tous les points d'un même plan, qui forment avec lui des éléments de contact de (M), constituent une variété linéaire.*

tangentiel. On a donc une autre forme des équations de la multiplicité en associant aux équations (6) les équations

$$(10) \quad p_i = \frac{\partial g_0}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

où l'on a posé

$$(11) \quad g_0 = \sum_{k=0}^{\beta} \mu_k G_k,$$

et l'équation de condition

$$(12) \quad \sum_{i=1}^n q_i \frac{\partial g_0}{\partial q_i} = 1.$$

Il résulte enfin de là que les équations (6) résultent de l'élimination de $p_1, \dots, p_n; \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_\alpha$ entre les équations (5), (7), (9); et que les équations (5) résultent de l'élimination de $q_1, \dots, q_n; \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_\beta$ entre les équations (6), (10), (12).

2. Les formules précédentes se simplifient si l'on donne aux équations des supports une forme particulière qui équivaut à l'emploi de coordonnées polaires. Occupons-nous, par exemple, du support ponctuel et supposons d'abord $\alpha = 0$. Tout point de ce support se trouve sur un certain rayon, issu de l'origine, dont nous désignerons par $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les paramètres directeurs, et par ρ la longueur. Celle-ci se trouve définie par l'équation

$$(13) \quad F_0(\rho\alpha, \dots, \rho\alpha_n) = 0.$$

On peut la considérer comme définissant $\frac{1}{\rho}$ en fonction de $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, dans le voisinage du point considéré; car, en excluant les éléments de contact dont le plan passe à l'origine, nous avons exclu l'hypothèse $\rho = 0$. On obtient donc, pour ce domaine, une équation de la forme

$$(14) \quad \frac{1}{\rho} = F(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

La fonction F reste positive dans ce domaine. On peut observer

de plus qu'elle reste définie pour des valeurs $ma_1, \dots, ma_n$, où m est suffisamment voisin de 1, car elles sont aussi voisines que l'on veut des valeurs initiales; et, sous la forme (13), on voit que la valeur de ρ , déduite par continuité de la première, est ainsi $\frac{\rho}{m}$.

Donc la valeur de $\frac{1}{\rho}$ est $m \frac{1}{\rho}$, c'est-à-dire que la fonction F est homogène (*positivement*) du degré *un* ⁽¹⁾; on pourra lui appliquer l'identité d'Euler et ses dérivées partielles auront (*positivement*) les homogénéités connues.

Tout ceci reste vrai si l'on considère plus généralement $a_1, \dots, a_n, \rho$ comme des coordonnées liées aux coordonnées $p_1, \dots, p_n$ par les seules relations

$$(15) \quad p_i = \rho a_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

sans imposer à $a_1, \dots, a_n$ de restriction autre que celle d'être, respectivement, du même signe que $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. On pourra même supposer que $a_1, \dots, a_n$ ont des valeurs aussi voisines qu'on voudra de $p_1, \dots, p_n$; et, par suite, on déduira de l'équation (14) l'équation

$$(16) \quad \frac{1}{\rho} = F\left(\frac{p_1}{\rho}, \dots, \frac{p_n}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho} F(p_1, \dots, p_n),$$

puisque $\frac{1}{\rho}$ sera aussi voisin de *un* que l'on voudra.

Par conséquent, l'équation du support apparaît sous la forme

$$(17) \quad 0 = F_0 \equiv F(p_1, \dots, p_n) - 1,$$

où F a la propriété d'homogénéité indiquée. Il est clair que cette équation, d'après la manière dont nous y sommes arrivés, ne peut représenter qu'une portion du support ponctuel qui est rencontrée en un point au plus par un rayon quelconque issu de l'origine.

Ce rayon n'est ici assujéti tout au plus qu'à la condition de ne balayer qu'une portion (à n dimensions) de l'espace considéré.

Si, au contraire, on suppose maintenant $\alpha > 0$, sa direction devra satisfaire à α conditions, qu'on pourra écrire sous la forme

(1) S'il arrivait qu'elle ne fût pas, d'abord, définie pour toutes les valeurs $ma_1, \dots, ma_n$ ($m > 0$), la propriété d'homogénéité permettrait de la *prolonger* à toutes ces valeurs. Mais les valeurs de m négatives restent exclues.

de α équations homogènes (*positivement*) de degré zéro, en $p_1, \dots, p_n$. Ce seront les équations

$$(18) \quad F_h(p_1, \dots, p_n) = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, \alpha).$$

Les fonctions $F_0, F_1, \dots, F_\alpha$ étant ainsi choisies, on voit immédiatement que la condition (9) équivaut à $\lambda_0 = 1$. La multiplicité (M) est donc définie, pour la portion considérée du support ponctuel, par les équations

$$(19) \quad F(p_1, \dots, p_n) = 1,$$

$$(20) \quad F_h(p_1, \dots, p_n) = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, \alpha),$$

$$(21) \quad q_i = \frac{\partial f}{\partial p_i}, \quad f = F + \sum_{h=1}^{\alpha} \lambda_h F_h \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

On peut remarquer que f est homogène de degré un par rapport à toutes les variables $p_1, \dots, p_n; \lambda_1, \dots, \lambda_\alpha$, toujours au point de vue positif. Il en résulte que le support tangentiel se déduira des seules équations (20) et (21), c'est-à-dire sans faire intervenir l'équation (19).

On remarquera qu'on pourrait, dans le système précédent, à cause de l'homogénéité des fonctions F et F_h , remplacer l'équation (19) par l'équation (2).

Le support tangentiel sera susceptible, à son tour, d'une représentation analogue qui s'appliquera à une portion de ce support telle qu'elle ne contienne qu'un plan rencontrant orthogonalement un rayon quelconque issu de l'origine. Les équations de ce support seront alors de la forme

$$(22) \quad G(q_1, \dots, q_n) = 1.$$

$$(23) \quad G_k(q_1, \dots, q_n) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, \beta),$$

G et les G_k étant *positivement* homogènes : G de degré un et les G_k de degré zéro (¹). Et pour avoir la multiplicité (M), ou du moins la partie qui correspond à cette portion du support tangentiel, il faut adjoindre aux équations (22) et (28) les équations

(¹) Les résultats suivants subsistent, en ce qu'ils ont d'essentiel, et les raisonnements sont à peine modifiés, quand on suppose le degré d'homogénéité des F_k et des G_k égal à un . Cette hypothèse est souvent plus commode dans les applications.

tions

$$(24) \quad p_i = \frac{\partial g}{\partial q_i}, \quad g = G + \sum_{k=1}^{\beta} \mu_k G_k \quad (= 1, 2, \dots, n).$$

Comme g est *positivement* homogène, de degré un , en $q_1, \dots, q_n$; $\mu_1, \dots, \mu_\beta$, le support ponctuel est ici défini par les équations (23) et (24) seules. Enfin (22) pourrait être remplacé par l'équation (2).

3. Supposons que la multiplicité (M) considérée dépende de un ou plusieurs paramètres, et soit a l'un d'eux : ce paramètre figurera dans les fonctions F, F_h, G, G_k . Les dérivées de ces fonctions sont alors liées par une relation simple qu'on obtient en différentiant l'identité (2) totalement, par rapport à toutes les variables de la question, le paramètre a compris. Les équations (3) et (4) ne sont plus alors vérifiées et l'on obtient seulement

$$(25) \quad \sum_{i=1}^n q_i dp_i + \sum_{i=1}^n p_i dq_i = 0,$$

c'est-à-dire, à cause des formules (21) et (26),

$$(26) \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial p_i} dp_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial q_i} dq_i = 0.$$

On a, d'autre part, à cause de (19), (20), (22), (23), les identités

$$(27) \quad f = 1, \quad g = 1,$$

que l'on peut différentier. Comme l'on a

$$(28) \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda_h} = F_h \quad (h = 1, 2, \dots, \alpha); \quad \frac{\partial g}{\partial \mu_k} = G_k \quad (k = 1, 2, \dots, \beta),$$

les termes en $d\lambda_h$ et $d\mu_k$ n'interviennent pas, et il reste

$$(29) \quad \frac{\partial f}{\partial a} da + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial p_i} dp_i = 0,$$

$$(30) \quad \frac{\partial g}{\partial a} da + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial q_i} dq_i = 0.$$

Par comparaison avec (26), on obtient alors la relation annoncée

$$(31) \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{\partial g}{\partial \alpha} = 0.$$

4. Voici une autre remarque dont nous aurons à faire usage.

Supposons que le support tangentiel soit à $n - 1$ dimensions, ce qui sera pour nous le cas le plus important : les équations (23) n'existent pas alors et g se réduit à G . Les équations (24), à cause de leur homogénéité, donnent donc une représentation paramétrique du support ponctuel, au moyen des paramètres $q_1, \dots, q_n$, dont les rapports interviennent seuls : nous pouvons même supposer, à cause de cette circonstance, que ces paramètres vérifient l'équation (22).

Alors $(p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n)$ est un élément de contact de la multiplicité (M) , associé au point $(p_1, \dots, p_n)$ du support ponctuel. Mais ce n'est pas nécessairement le seul. Pour les trouver tous, il faut chercher tous les systèmes $(p_1, \dots, p_n; y_1, \dots, y_n)$ qui satisfont aux conditions

$$(32) \quad \sum_{i=1}^n y_i p_i = 1, \quad \sum_{i=1}^n y_i dp_i = 0.$$

Les p_i sont donnés par les équations (24) et, dans leurs différentielles, on peut considérer $dq_1, \dots, dq_n$ comme indépendants ; car il ne s'agit maintenant que d'utiliser la représentation paramétrique du support ponctuel, pour laquelle on aurait pu faire abstraction de (22), à cause de l'homogénéité des formules (24). Les équations du problème sont donc

$$(33) \quad \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial G}{\partial q_i} = 1,$$

$$(34) \quad \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial^2 G}{\partial q_i \partial q_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Pour les résoudre, on déterminera d'abord la solution générale des équations (34) et l'on disposera du facteur arbitraire qui y figure de manière à satisfaire à la condition (33).

Si donc le hessien de G , qui est identiquement nul à cause de

l'homogénéité de G , est de rang un seulement, le système (33), (34) n'a qu'une solution qui est

$$(35) \quad y_i = q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

et l'élément de contact $(p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n)$ est le seul qui contienne le point $(p_1, \dots, p_n)$ du support. C'est le cas où les équations (24) donnent une seule relation entre $p_1, \dots, p_n$ seuls, c'est-à-dire où le support ponctuel est, lui aussi, à $n - 1$ dimensions.

Si au contraire le hessien de G est de rang $\alpha + 1$ ($\alpha > 0$), c'est-à-dire si le support ponctuel est à $n - \alpha - 1$ dimensions, ce support est représenté par le système (19), (20), et le résultat exprimé par les formules (21) montre que la solution générale des équations (33), (34) s'écrit, avec α arbitraires $u_1, \dots, u_\alpha$,

$$(36) \quad y_i = \frac{\partial \bar{f}}{\partial p_i}, \quad \bar{f} = F + \sum_{h=1}^{\alpha} u_h F_h \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Or les équations (19), (20), (21) ont pour conséquence, à leur tour, les équations (22) et (24). Donc les équations (19), (20) et (36), qui n'en diffèrent que par un changement de notations, auront pour conséquences d'abord

$$(37) \quad \bar{G} \equiv G(y_1, \dots, y_n) = 1;$$

en désignant pour abréger par $\bar{G}$ la fonction G écrite avec les lettres $y_1, \dots, y_n$ au lieu de $q_1, \dots, q_n$; et aussi

$$(38) \quad p_i = \frac{\partial \bar{G}}{\partial y_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Par suite, toute solution du système (33), (34) satisfait au système formé de l'équation (37) et des équations

$$(39) \quad \frac{\partial \bar{G}}{\partial y_i} = \frac{\partial G}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Supposons, de plus, que la multiplicité (M) dépende d'un paramètre α comme au n° 3. Les y_i peuvent être considérés, à cause

des formules (36) et (24), comme des fonctions bien déterminées

$$(40) \quad p_i = Q_{i,0}(q_1, \dots, q_n) + \sum_{h=1}^{\alpha} u_h Q_{i,h}(q_1, \dots, q_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

des variables $q_1, \dots, q_n; u_1, \dots, u_{\alpha}$, qui constituent la solution générale du système (33), (34); et ces fonctions rendent identiques, non seulement ces équations, mais aussi les équations (37) et (39). Dans le cas actuel, ces identités ont lieu aussi en α , qui figure, comme paramètre également, dans les coefficients Q des formules (40). On obtient donc en différentiant, par rapport à α , les équations (33) et (37)

$$(41) \quad \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial^2 G}{\partial q_i \partial \alpha} d\alpha + \sum_{i=1}^n \frac{\partial G}{\partial q_i} dy_i = 0.$$

$$(42) \quad \frac{\partial \bar{G}}{\partial \alpha} d\alpha + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{G}}{\partial y_i} dy_i = 0;$$

d'où, en tenant compte des équations (39), la formule

$$(43) \quad \frac{\partial \bar{G}}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial^2 G}{\partial q_i \partial \alpha},$$

qui est une nouvelle conséquence des équations (33) et (34).

5. Dans l'application de l'étude des multiplicités au calcul des variations, la multiplicité (M) nous sera donnée par les équations (19), (20) qui définissent son support ponctuel; et nous ferons ensuite usage de la représentation (22), (23), (24), fondée sur le rapport tangentiel. Il nous faut donc examiner à quelle condition ce second mode de représentation est légitime, dans le domaine d'un élément de contact de la multiplicité.

Prenons, plus généralement, un support ponctuel à $n - \alpha - 1 = \gamma$ dimensions représenté par des équations paramétriques quelconques

$$(44) \quad p_i = \varphi_i(t_1, \dots, t_{\gamma}) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Les éléments de contact $(p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n)$ associés à un

point quelconque de ce support sont définis par les équations

$$(45) \quad \sum_{i=1}^n q_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_l} = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, \gamma),$$

qui équivalent à la condition (3), et par l'équation (2) qui s'écrit ici

$$(46) \quad \sum_{i=1}^n q_i \varphi_i = 1.$$

Pour arriver à la représentation du support tangentiel sous la forme (22), (23), nous nous donnons des coefficients de direction $(b_1, \dots, b_n)$ de la normale au plan de l'élément de contact, et nous cherchons à déterminer cet élément (*cf.* n° 2, où des considérations analogues sont appliquées au support ponctuel). Nous devons donc poser

$$(47) \quad q_i = b_i \sigma \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

et chercher à obtenir $\frac{1}{\sigma}$ comme fonction de $b_1, \dots, b_n$ par élimination des paramètres $t_1, \dots, t_\gamma$. Nous avons à faire usage, à cet effet, des équations obtenues en portant les valeurs (47) dans les équations (45) et (46). Si nous posons pour abrégé, en considérant $b_1, \dots, b_n$ comme des constantes données,

$$(48) \quad \bar{\varphi}(t_1, \dots, t_\gamma) \equiv \sum_{i=1}^n b_i \varphi_i,$$

cela donne les équations

$$(49) \quad \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t_l} = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, \gamma)$$

et

$$(50) \quad \frac{1}{\sigma} = \bar{\varphi};$$

et nous pouvons remplacer cette dernière par la combinaison

$$(51) \quad \frac{1}{\sigma} = \bar{\varphi} - \sum_{l=1}^{\gamma} t_l \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t_l} = \varphi_0.$$

Comme on a alors l'identité

$$(52) \quad d\varphi_0 + \sum_{l=1}^{\gamma} t_l d \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t_l} = 0,$$

on voit que φ_0 est fonction de celles des dérivées $\frac{\partial \varphi}{\partial t_l}$ qui sont indépendantes. Par suite, tout dépend uniquement du déterminant fonctionnel de ces dérivées, c'est-à-dire du hessien de la fonction $\bar{\varphi}$; ou encore, si l'on étudie ce qui se passe dans le domaine d'un élément de contact $(p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n)$ de la multiplicité, de la nature du hessien de la fonction de $t_1, \dots, t_\gamma$,

$$(53) \quad \varphi = \sum_{i=1}^n q_i \varphi_i,$$

où $q_1, \dots, q_n$ sont considérés comme constants ⁽¹⁾.

Pour un élément de contact général de la multiplicité (M), ce hessien sera d'un certain rang β ($\beta \geq 0$); et, dans le domaine de cet élément, on aura la représentation (22), (23), (24) de (M). Et une telle représentation ne cessera d'être applicable que pour les éléments de contact qui élèvent le rang du hessien considéré.

6. On arrive à un énoncé plus géométrique si l'on observe que ce hessien est le discriminant de la forme quadratique, en $dt_1, \dots, dt_\gamma$, qu'on obtient en calculant l'expression différentielle $\varpi \equiv \sum_{i=1}^n dp_i dq_i$ correspondant à un déplacement quelconque sur la multiplicité, à partir d'un de ses éléments. On a en effet

$$(54) \quad \sum_{i=1}^n dp_i dq_i = \sum_{i=1}^n dq_i \sum_{l=1}^{\gamma} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_l} dt_l = \sum_{l=1}^{\gamma} dt_l \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_l} dq_i.$$

(1) On arrive plus vite à ce même résultat en constatant que les équations (45) déterminent les points du support où un plan tangent est parallèle au plan

$$\sum_{i=1}^n q_i X_i = 0.$$

Mais la différentiation des identités (45) donne aussi

$$(55) \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_l} dq_i + \sum_{i=1}^n q_i d \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_l} = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, \gamma);$$

de sorte qu'il vient

$$(56) \quad \varpi \equiv \sum_{i=1}^n dp_i dq_i = - \sum_{i=1}^n q_i \sum_{l=1}^{\gamma} \sum_{m=1}^{\gamma} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t_l \partial t_m} dt_l dt_m.$$

Et le hessien considéré est bien le discriminant de la forme quadratique ainsi obtenue.

La multiplicité (M) étant à $n - 1$ dimensions, cette forme quadratique $\sum_{i=1}^n dp_i dq_i$ serait écrite, sous la forme la plus générale, au moyen de $n - 1$ différentielles indépendantes, et doit être considérée comme une forme quadratique à $n - 1$ variables. Nous l'aurions obtenue ainsi avec le mode de représentation employé dans le cas $\alpha = 0$ ($\gamma = n - 1$), c'est-à-dire dans le cas où le support ponctuel a le nombre maximum de dimensions. On voit, de plus, que si $\beta = 0$, c'est-à-dire si le support tangentiel a aussi le nombre maximum de dimensions, le rang de son discriminant est nul, et cette forme quadratique est de la classe générale.

Dans le cas général, le rang de son discriminant, en considérant toujours cette forme quadratique comme à $n - 1$ variables, est $\alpha + \beta$; et la forme est la somme de $(n - 1 - \alpha - \beta)$ carrés indépendants. Ceci, bien entendu, en supposant que l'on a affaire à une variation ($dp_1, \dots, dp_n; dq_1, \dots, dq_n$) effectuée à partir d'un élément de contact général de (M).

La représentation (22), (23), (24) [et, par suite aussi, par raison de symétrie, la représentation (19), (20), (21)] ne peut cesser d'être valable que dans le domaine des éléments de contact qui élèvent le rang du discriminant de la forme

$$\varpi \equiv \sum_{i=1}^n dp_i dq_i. \text{ Nous dirons que de tels éléments sont EXCEP-}$$

TIONNELS.

7. Cet énoncé, qui résume la discussion précédente, est facile à appliquer à tous les modes de représentation de la multiplicité. Pour résoudre la question posée au début de ce paragraphe, appliquons-le au cas où la multiplicité est donnée sous la forme (19), (20), (21). La forme quadratique à considérer est alors

$$(57) \quad \varpi \equiv \sum_{i=1}^n dp_i dq_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_j} dp_i dp_j + \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^n \frac{\partial F_h}{\partial p_i} dp_i d\lambda_h;$$

mais il faut y supposer les variables $dp_1, \dots, dp_n$ liées par les équations de condition obtenues en différentiant les équations (19) et (20), à savoir

$$(58) \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_h}{\partial p_i} dp_i = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, \alpha),$$

$$(59) \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_i} dp_i = 0;$$

ce qui réduira le nombre des variables $dp_1, \dots, dp_n; d\lambda_1, \dots, d\lambda_\alpha$ à $n - 1$. Il faut observer en effet que nous écartons, comme *singuliers*, les points du support ponctuel pour lesquels ces équations (58), (59), en $dp_1, \dots, dp_n$ cesseraient d'être indépendantes, car pour de tels points la condition normale de résolubilité du système (19), (20) cesserait d'être remplie.

Quant à la forme quadratique (57), elle se réduit, en tenant compte de (58), à la forme

$$(60) \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_j} dp_i dp_j;$$

et nous avons à déterminer le rang de son discriminant, c'est-à-dire la différence entre le nombre des variables (ici $n - 1$) et le nombre des équations indépendantes obtenues en égalant à zéro les dérivées partielles de la forme par rapport à ces variables.

Rappelons comment on résout les questions de ce genre. Soit Q une forme quadratique à m variables $X_1, \dots, X_m$, liées par des relations linéaires indépendantes, $L_1 = 0, \dots, L_p = 0$. On peut faire un changement linéaires de variables tel qu'on ait identi-

quement $L_1 \equiv X_1, \dots, L_p \equiv X_p$; et les équations de condition étant alors $X_1 = 0, \dots, X_p = 0$, il reste à considérer la forme

$$(61) \quad \overline{Q} = Q(0, \dots, 0, X_{p+1}, \dots, X_m),$$

qui donne le système

$$(62) \quad \frac{\partial \overline{Q}}{\partial X_i} = 0 \quad (i = p + 1, \dots, m),$$

qui est équivalent au système

$$(63) \quad \begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial X_i} = 0 & (i = p + 1, \dots, m), \\ X_h = 0 & (h = 1, 2, \dots, p). \end{cases}$$

Or si l'on considère la forme quadratique à $m + p$ variables

$$(64) \quad S \equiv Q + \sum_{h=1}^p Y_h L_h \equiv Q + \sum_{h=1}^p Y_h X_h,$$

et si l'on égale à zéro ses dérivées partielles, on obtient le système

$$(65) \quad \begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial X_h} + Y_h = 0 & (h = 1, 2, \dots, p), \\ \frac{\partial Q}{\partial X_i} = 0 & (i = p + 1, \dots, m), \\ X_h = 0 & (h = 1, 2, \dots, p); \end{cases}$$

qui contient manifestement p équations indépendantes de plus que le système (63), où les variables $Y_1, \dots, Y_p$ ne figurent pas. Le rang du discriminant de $\overline{Q}$ est donc le même que le rang du discriminant de S , où les $m + p$ variables sont indépendantes.

Appliquons ce résultat à la forme (60). En posant, pour abrégier l'écriture, $dp_i = P_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), nous aurons à considérer la forme quadratique

$$(66) \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_j} P_i P_j + \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\partial F_h}{\partial p_i} P_i Y_h - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_i} P_i Y.$$

qui donne le système

$$(67) \quad \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_j} P_j + \frac{\partial F_h}{\partial p_i} Y_h + \frac{\partial F}{\partial p_i} Y = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$(68) \quad \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_h}{\partial p_j} P_j = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, \alpha),$$

$$(69) \quad \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_j} P_j = 0.$$

Multiplions les équations (67) et (68) respectivement par p_i et λ_h , et ajoutons : comme f est homogène de degré un, par rapport aux p_i et aux λ_h , et comme l'on a

$$\frac{\partial F_h}{\partial p_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda_h \partial p_j},$$

nous obtiendrons, en tenant compte aussi de l'homogénéité de F_h et de F , et enfin de l'équation (19), la combinaison simple

$$(70) \quad Y = 0.$$

Le système considéré est donc équivalent à celui qu'on obtient en adjoignant l'équation (69) et l'équation (70) au système

$$(71) \quad \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_j} P_j + \frac{\partial F_h}{\partial p_i} Y_h = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$(72) \quad \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_h}{\partial p_j} P_j = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, \alpha).$$

Les équations (69) et (70) sont visiblement indépendantes entre elles. L'équation (70) ne peut être conséquence des équations (71) et (72); et il en est de même de l'équation (69), car elle n'admet pas la solution

$$P_j = p_j \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad Y_h = \lambda_h \quad (h = 1, 2, \dots, \alpha),$$

qui vérifie le système (71) et (72), pour les raisons d'homogénéité déjà utilisées.

Le système (67), (68), (69) a donc un nombre d'équations indépendantes supérieur de deux unités à celui des équations indépendantes du système (71), (72). Or ce dernier système est,

aux notations près, celui qu'on obtient en égalant à zéro les dérivées partielles de la forme quadratique qui constitue le second membre de l'identité (57). Comme cette forme contient $\alpha + 1$ variables de moins ⁽¹⁾ que la forme (66), nous concluons que

le rang du discriminant de la forme $\varpi \equiv \sum_{i=1}^n dp_i dq_i$ est supérieur de $\alpha - 1$ unités au rang du hessien de la fonction f . Il serait, de même, supérieur de $\beta - 1$ unités au rang du hessien de la fonction g .

Donc les éléments exceptionnels de la multiplicité (M), définie par les équations (19), (20), (21), pour lesquels peut tomber en défaut le mode de représentation corrélatif (22), (23), (24), sont ceux qui élèvent le rang du hessien de la fonction f .

8. L'étude de la forme $\varpi \equiv \sum_{i=1}^n dp_i dq_i$ équivaut à celle des propriétés projectives du second ordre des multiplicités. Elle permettrait de classer, d'une manière plus précise, les éléments exceptionnels que nous venons de considérer d'après le nombre d'unités dont ils élèvent le rang de cette forme ϖ .

Dans le cas de l'espace ordinaire, par exemple, $n = 3$. Pour les surfaces non développables $\alpha = 0$, $\beta = 0$; et ϖ est une forme générale à deux variables : les éléments exceptionnels, pour lesquels ϖ est un carré parfait, correspondent aux points paraboliques du support; ceux pour lesquels ϖ serait identiquement nul correspondent aux plans tangents pour lesquels la distance d'un point voisin du point de contact à un tel plan est un infiniment petit d'ordre supérieur au second.

Pour les surfaces développables $\alpha = 0$, $\beta = 1$: ϖ se réduit, en général, à une forme à une seule variable; elle devient identiquement nulle pour les points exceptionnels où l'ordre de contact du plan tangent avec la surface s'élève.

(1) Il faut se rappeler que (66) doit être considérée comme dépendant des variables $P_i = dp_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $d\lambda_h$ ($h = 1, 2, \dots, \alpha$), Y_h ($h = 1, 2, \dots, \alpha$) et Y . Si donc le système (71), (72) contient exactement $n + \alpha - (\beta + 1)$ équations indépendantes, le rang du hessien de f est $(\beta + 1)$; et le rang du discriminant de (66) est $n + 2\alpha + 1 - (n + \alpha - \beta + 1) = \alpha + \beta$.

Pour un plan seulement, on a

$$\alpha = 0, \quad \beta = 2;$$

et la forme est nulle identiquement.

Pour une courbe on a $\alpha = 1$, et le cas $\alpha = 1, \beta = 1$ ne se produit que si la courbe devient une droite. On a donc en général $\beta = 0$; et ϖ est une forme réductible à un seul carré; elle est identiquement nulle pour les éléments de contact exceptionnels formés d'un point de la courbe et de son plan osculateur.

Pour une droite, $\alpha = 1, \beta = 1$, et ϖ est nulle identiquement.

Enfin pour un point, ϖ est encore nulle identiquement.

Dans le cas où n est quelconque, le rang $(\alpha + \beta)$ du discriminant est nécessairement au plus égal à $n - 1$. Ceci est évident, *a priori*, car les $(\alpha + 1)$ équations du support ponctuel, et les $(\beta + 1)$ équations du support tangentiel sont indépendantes, et le nombre total des équations entre $p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n$ qui définissent une multiplicité à $n - 1$ dimensions est $n + 1$. Remarquons que cela équivaut à dire que la somme des nombres de dimensions des deux supports est au moins égale à $n - 1$.

On peut montrer que si les inégalités précédentes se changent en égalités, c'est-à-dire *si la forme ϖ est nulle identiquement, la multiplicité est linéaire*.

Reportons-nous, en effet, à la formule (66). Nous pouvons supposer qu'on a choisi pour paramètres $t_1, \dots, t_\gamma$, γ coordonnées p_i , par exemple $p_1, p_2, \dots, p_\gamma$. Alors $q_1, q_2, \dots, q_\gamma$ disparaissent de la forme (56), tandis que les équations de condition (45) se résolvent précisément par rapport à ces coordonnées. Pour exprimer que (56) est identiquement nulle, on n'a donc pas à tenir compte des équations de conditions, et l'on obtient ce résultat que toutes les dérivées secondes des fonctions $(\varphi_{\gamma+1}, \varphi_{\gamma+2}, \dots, \varphi_n)$ sont nulles identiquement. Ces fonctions sont donc linéaires et, par conséquent, il en est de même des équations du support ponctuel et, par suite aussi, de celles du support tangentiel, d'après la dualité de toutes nos considérations.

On vérifie du reste que si le support ponctuel est

$$(73) \quad p_{\gamma+h} = \sum_{l=1}^{\gamma} a_{hl} p_l a_h \quad [h = 1, 2, \dots, (x+1)],$$

le support tangentiel est donné par les équations (45), qui sont :

$$(74) \quad q_1 + \sum_{h=1}^{\alpha+1} \alpha_{hl} q_{\gamma+h} = 0,$$

et par l'équation (46), qui se réduit à

$$(75) \quad \sum_{h=1}^{\alpha+1} \alpha_h q_{\gamma+h} = 1.$$

Remarquons que, d'après les remarques faites ci-dessus, on peut énoncer le résultat obtenu ainsi : *Les seules multiplicités pour lesquelles la somme des nombres des dimensions des deux supports est égale à $n - 1$ sont les multiplicités linéaires; les deux supports d'une multiplicité sont linéaires en même temps, si cette multiplicité est à $n - 1$ dimensions.*

Sur une multiplicité non linéaire, la forme ϖ ne peut donc s'annuler identiquement que pour des éléments exceptionnels, qu'on pourra appeler des *éléments osculateurs*.

9. Considérons un élément de contact de la multiplicité (M),

pour lequel la forme $\varpi = \sum_{i=1}^n dp_i dq_i$ ne soit, ni identiquement

nulle, ni réductible à un seul carré ⁽¹⁾. Il y a alors des variations $(dp_1, \dots, dp_n; dq_1, \dots, dq_n)$, effectuées à partir de cet élément, qui annulent la forme ϖ . C'est ce qu'on peut appeler les *variations asymptotiques*; mais il est entendu qu'on exceptera celles pour lesquelles tous les dp_i ou tous les dq_i seraient nuls.

Si l'on considère plus spécialement le support ponctuel, à une variation asymptotique correspondra une *direction asymptotique* sur ce support; mais si β n'est pas nul, il correspondra inversement à cette direction asymptotique une infinité de variations asymptotiques, car les q_i étant exprimés par les formules (21), les dq_i dépendent des dp_i et des $d\lambda_h$; et les $d\lambda_h$ restent arbitraires ici, puisqu'ils disparaissent de la formule (57) quand on tient

(¹) Le cas d'un support ponctuel, ou d'un support tangentiel, à une dimension est exclu par là [voir équation (56)].

compte de (59). Au contraire, la variation asymptotique est entièrement déterminée par la direction asymptotique quand le support tangentiel est à $n - 1$ dimensions.

Si l'on considère le support tangentiel, à une variation asymptotique correspond une *caractéristique asymptotique*; à savoir la multiplicité linéaire à $n - 2$ dimensions, définie par les deux équations

$$(76) \quad \sum_{i=1}^n q_i X_i = 1, \quad \sum_{i=1}^n dq_i X_i = 0.$$

On voit alors immédiatement qu'une variation asymptotique est formée par l'association d'une direction du support ponctuel et d'une caractéristique du support tangentiel telles que cette caractéristique contienne cette direction. Et la réciproque se voit en même temps par les mêmes équations : il est bien entendu que la direction et la caractéristique considérées sont supposées fournies par une même variation de l'élément de contact considéré sur la multiplicité. Remarquons encore que toute multiplicité linéaire à $n - 2$ dimensions, contenue dans le plan de l'élément de contact, et passant par le point de cet élément, peut être considérée comme une caractéristique de cet élément.

10. La forme $\varpi = \sum_{i=1}^n dp_i dq_i$ intervient encore dans la notion de *concavité* et de *convexité* d'une multiplicité, qui joue un rôle essentiel dans le calcul des variations. On peut, pour définir cette notion, se placer à deux points de vue corrélatifs. Soient $(p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n)$ un élément de contact (E) de la multiplicité, et $(p'_1, \dots, p'_n; q'_1, \dots, q'_n)$ un élément de contact voisin (E') de la même multiplicité, qui sera quelconque dans le domaine de (E).

Au premier point de vue, la multiplicité sera *concave en* (E) *vers l'origine*, si le point de (E') est constamment du même côté que l'origine par rapport au plan de (E). Au second point de vue, la multiplicité sera concave en (E) vers l'origine, si le point de (E) est toujours du même côté que l'origine par rapport au plan de (E'). Cela se traduira donc, suivant la définition adoptée, par

l'une ou l'autre des inégalités

$$(77) \quad \sum_{i=1}^n p'_i q_i - 1 < 0,$$

$$(78) \quad \sum_{i=1}^n p_i q'_i - 1 < 0.$$

Les deux définitions sont, du reste, équivalentes, si l'on considère la *concavité dans une région* de la multiplicité : les éléments (E), (E') sont alors deux éléments quelconques, différents, mais suffisamment voisins de ce domaine et jouent un rôle symétrique dans la question.

La concavité dans une région s'exprimera donc par des inégalités de la même nature, quel que soit le support, ponctuel ou tangentiel, au moyen duquel on définira la multiplicité.

Revenons à la concavité en un élément et considérons, par exemple, l'inégalité (77). Les p'_i se déduisent des p_i en donnant, aux paramètres qui définissent l'élément particulier (E) considéré, des accroissements arbitraires infiniment petits. Si nous ordonnons le premier membre de (77) suivant les puissances de ces accroissements, le terme de degré zéro, qui est $\sum_{i=1}^n p_i q_i - 1$, est nul à cause de la condition (2) et l'ensemble des termes du premier degré, qui est $\sum_{i=1}^n q_i dp_i$ est nul à cause de l'équation (3); enfin l'ensemble des termes du second degré est, comme il résulte de la différentiation de l'équation (3),

$$(79) \quad \sum_{i=1}^n q_i d^2 p_i = - \sum_{i=1}^n dp_i dq_i = - \varpi.$$

On obtient le même résultat pour le premier membre de (78).

Par conséquent, *l'une et l'autre concavité sont réalisées si la forme ϖ ne peut prendre que des valeurs positives, pour toute variation effective de l'élément de contact considéré* : nous entendons par là que cette variation ne doit annuler ni tous les dp_i , ni tous les dq_i . *L'une ou l'autre concavité ne peut être*

réalisée que si la forme π ne peut prendre que des valeurs positives ou nulles.

On passe naturellement de la concavité à la *convexité* en changeant les signes dans tout ce qui précède.

Si l'un des deux supports de la multiplicité est à une dimension, on voit par la formule (56) qu'en un élément qui n'est ni singulier, ni osculateur, la multiplicité est ou convexe, ou concave vers l'origine. Si les deux supports, au contraire, sont à plus d'une dimension, la concavité et la convexité doivent être considérées comme des faits exceptionnels; *il y a concavité ou convexité si toutes les variations asymptotiques sont imaginaires*, car alors la forme π , ne pouvant s'annuler, ne peut non plus changer de signe, et la condition suffisante énoncée précédemment se trouve remplie.

11. Cette même condition suffisante exige, pour pouvoir être vérifiée, que l'un au moins des supports soit à $n - 1$ dimensions. Reportons-nous, en effet, à la formule (56) et aux considérations du n° 6. Si le support tangentiel n'est pas à $n - 1$ dimensions, le second membre de (56) se décompose en moins de $\gamma = n - \alpha - 1$ carrés; en égalant ces carrés à zéro, on définit un ou plusieurs déplacements asymptotiques réels sur le support ponctuel. Or, si le support ponctuel a aussi moins de $n - 1$ dimensions, il figure dans l'expression des dq_i , comme on l'a remarqué au n° 9, outre les dt_i , des quantités arbitraires $d\lambda_h$ ($h = 1, 2, \dots, \alpha$); aux déplacements asymptotiques réels obtenus correspondent donc des variations asymptotiques réelles dans lesquelles les dq_i , pas plus que les dp_i , ne sont tous nuls, c'est-à-dire des variations asymptotiques effectives.

Supposons d'abord que le support tangentiel soit à $n - 1$ dimensions, et bornons-nous à considérer des éléments de contact non exceptionnels. La condition suffisante trouvée équivaut à la suivante : la forme π est la somme de $n - 1 - \alpha = \gamma$ carrés positifs indépendants. Exprimée par la formule (56) et considérée comme forme en $dt_1, \dots, dt_\gamma$, π est donc une forme définie positive.

Considérons alors π sous la forme (57) ou, plus exactement, considérons la forme $\bar{\pi}$ à $n + \alpha$ variables indépendantes $dp_1, \dots$,

$dp_n; d\lambda_1, \dots, d\lambda_\alpha$ qui constitue cette expression. Nous savons, par le n° 7, que, pour que ϖ soit la somme de $n - 1 - \alpha = \gamma$ carrés indépendants, il est nécessaire et suffisant que cette forme ϖ soit la somme de $n + \alpha - 1 = \gamma + 2\alpha$ carrés indépendants : en d'autres termes, que le hessien de f soit nul, mais non tous ses mineurs du premier rang.

Pour exprimer la seconde partie de la condition, effectuons la réduction de ϖ en carrés. En posant

$$(80) \quad U_h = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_h}{\partial p_i} dp_i \quad (h = 1, 2, \dots, \alpha),$$

et désignant par $V_1, \dots, V_{n-\alpha}$ d'autres formes linéaires en $dp_1, \dots, dp_n$ qui forment avec les formes $U_1, \dots, U_\alpha$ un système de n formes indépendantes, on peut écrire la forme quadratique ϖ

$$(81) \quad \varpi = \sum_{h=1}^{\alpha} U_h d\lambda_h + \sum_{h=1}^{\alpha} U_h U'_h + Q(V_1, \dots, V_{n-\alpha}),$$

où Q est une forme quadratique et où les U'_h sont des formes linéaires en $U_1, \dots, U_\alpha; V_1, \dots, V_{n-\alpha}$. Donc en posant

$$(82) \quad W_h = d\lambda_h + U'_h \quad (h = 1, 2, \dots, \alpha),$$

nous aurons

$$(83) \quad \varpi = \sum_{h=1}^{\alpha} U_h W_h + Q(V_1, \dots, V_{n-\alpha}).$$

Comme ϖ se réduit à $\gamma + 2\alpha$ carrés indépendants, Q sera la somme de γ carrés seulement ($\gamma = n - \alpha - 1$), de sorte qu'on a finalement

$$(84) \quad \varpi = \sum_{h=1}^{\alpha} U_h W_h + \sum_{l=1}^{\gamma} \epsilon_l T_l^2,$$

où les U_h, W_h, T_l sont des formes réelles et indépendantes, et où les ϵ_l sont égaux à $(+1)$ ou à (-1) .

Si l'on tient compte des conditions (58), (59), les T_l deviendront de nouvelles formes linéaires T'_l en $dp_1, \dots, dp_n$ seulement; et comme les U_h seront nuls, et que nous devons obtenir, pour ϖ ,

γ carrés indépendants, ces T'_l seront des formes indépendantes, de telle sorte que la forme réduite de ϖ est

$$(85) \quad \varpi = \sum_{l=1}^{\gamma} \varepsilon_l T_l'^2.$$

La condition suffisante pour la concavité exige donc que les ε_l soient tous égaux à $(+1)$ et, si l'on se reporte à la formule (84), on voit que cela équivaut à dire que $\overline{\varpi}$ se décompose en

$$\alpha + \gamma = n - 1$$

carrés positifs et α carrés négatifs. Nous arrivons donc à la conclusion suivante :

La condition suffisante pour la concavité s'exprime, dans le cas $\beta = 0$, par ce fait que la forme quadratique à $n + \alpha$ variables

$$(86) \quad \overline{\varpi} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_j} dp_i dp_j + \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^{\alpha} \frac{\partial F_h}{\partial p_i} dp_i d\lambda_h$$

se décompose en une somme de $(n + \alpha - 1)$ carrés réels indépendants, dont α sont affectés du signe $(-)$ et $(n - 1)$ du signe $(+)$.

Passons au cas où le support tangentiel est à $(n - \beta - 1)$ dimensions ($\beta > 0$), mais où, par conséquent, le support ponctuel est à $(n - 1)$ dimensions. La fonction f se réduit à F , et les $d\lambda_h$ disparaissent de la forme $\overline{\varpi}$, qui est simplement

$$(87) \quad \overline{\varpi} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_j} dp_i dp_j.$$

Le rang du discriminant de ϖ étant alors β , le hessien de F est, d'après le n° 7, de rang $\beta - (\alpha - 1) = \beta + 1$; et $\overline{\varpi}$ se décompose en $(n - \beta - 1)$ carrés indépendants, comme la forme ϖ elle-même ⁽¹⁾.

(1) D'une manière générale, on conclut du n° 7 que, dans tous les cas, $\overline{\varpi}$ contient 2α carrés indépendants de plus que ϖ . Ici $\alpha = 0$, donc le nombre des carrés est le même dans les deux formes.

Si donc on a mis $\overline{\varpi}$ sous la forme

$$(88) \quad \overline{\varpi} = \sum_{m=1}^{\delta} \varepsilon_m T_m^2 \quad (\delta = n - \beta - 1),$$

on voit que, quand on tiendra compte de (59), les T_m deviendront des formes linéaires T'_m , à $n - 1$ variables seulement, indépendantes, et l'on aura

$$(89) \quad \varpi = \sum_{m=1}^{\delta} \varepsilon_m T_m'^2.$$

La condition suffisante de concavité dans le cas $\alpha = 0$ est donc que la forme $\overline{\varpi}$ ne contienne que des carrés positifs.

Ajoutons que le même mode de raisonnement prouverait plus généralement que *la forme $\overline{\varpi}$ a 2α carrés indépendants de plus que la forme ϖ , dont α carrés positifs et α carrés négatifs. Donc pour que ϖ n'ait que des carrés positifs, il faut et il suffit que $\overline{\varpi}$ n'ait que α carrés négatifs.*

Enfin une condition nécessaire pour la concavité est que la forme ϖ ne contienne que des carrés positifs et, par suite, que la forme $\overline{\varpi}$ ne contienne que α carrés négatifs.

On obtiendrait naturellement des résultats tout semblables en partant de la représentation tangentielle (22), (23), (24) de la multiplicité. La forme $\overline{\varpi}$ serait remplacé par la forme

$$(90) \quad \overline{\varpi} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial q_i \partial q_j} dq_i dq_j + \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^{\beta} \frac{\partial G_k}{\partial q_i} dq_i d\mu_k,$$

et le nombre α par le nombre β .

II. — LE PROBLÈME DE LAGRANGE. MISE EN ÉQUATIONS.

12. Il s'agit d'étudier les conditions d'extremum d'une intégrale curviligne de l'espace à n dimensions :

$$(1) \quad \int F(x_1, \dots, x_n) dx_1, \dots, dx_n,$$

prise suivant un arc de courbe dont les extrémités peuvent être

assujetties à des conditions données de diverse nature; et qui lui-même peut aussi être astreint à satisfaire à un système différentiel du premier ordre

$$(2) \quad F_h(x_1, \dots, x_n) | dx_1, \dots, dx_n = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, \alpha).$$

Nous supposerons l'arc de courbe donné paramétriquement au moyen d'une variable u , variant de 0 à 1, par exemple, et toujours en croissant.

La fonction $F(x_1, \dots, x_n | y_1, \dots, y_n)$ est, comme on sait ⁽¹⁾, une fonction homogène (*positivement*) des arguments $y_1, \dots, y_n$. Nous supposerons, de plus, que $F(x_1, \dots, x_n | dx_1, \dots, dx_n)$ ne prend que des valeurs positives ⁽²⁾, au moins pour les courbes que nous aurons à considérer, les différentielles $dx_1, \dots, dx_n$ correspondant à un accroissement positif quelconque du . Les fonctions $F_h(x_1, \dots, x_n | y_1, \dots, y_n)$ sont homogènes, de degré zéro, et au moins positivement, par rapport aux arguments $y_1, \dots, y_n$. Posons alors

$$(3) \quad F(x_1, \dots, x_n | dx_1, \dots, dx_n) = \omega du;$$

ω sera une variable positive, définie par cette équation, et nous aurons à étudier les conditions d'extremum de l'intégrale

$$(4) \quad J = \int_0^1 \omega du.$$

Nous remplacerons de plus les équations de condition (2) et (3) par le système suivant, qui leur est équivalent, à cause des conditions d'homogénéité supposées :

$$(5) \quad dx_i = \omega p_i du \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$(6) \quad F(x_1, \dots, x_n | p_1, \dots, p_n) = 1,$$

$$(7) \quad F_h(x_1, \dots, x_n | p_1, \dots, p_n) = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, \alpha).$$

En d'autres termes, nous introduisons, en même temps que la variable ω , qui correspond à un élément de l'intégrale, les variables $p_1, \dots, p_n$ qui correspondent à un élément de la courbe.

⁽¹⁾ Cf. HADAMARD, *Leçons sur le Calcul des variations*, t. I, p. 80.

⁽²⁾ Cette restriction, comme nous le montrerons plus loin (n° 20) peut être levée. Cf. HADAMARD, *loc. cit.*, p. 384.

Et nous voyons que le problème est caractérisé par la nature de la multiplicité (6), (7) qui se trouve associée à chaque point $(x_1, \dots, x_n)$ de l'espace. A cause des formules (5), nous devons interpréter $p_1, \dots, p_n$ comme les coordonnées d'un point du même espace par rapport à un nouveau système d'axes, parallèles aux axes de coordonnées primitifs, et ayant le point $x_1, \dots, x_n$ pour origine : ce qui revient à dire que, dans le système de coordonnées primitif, ce même point aurait pour coordonnées $x_1 + p_1, \dots, x_n + p_n$. La multiplicité ponctuelle ⁽¹⁾ ainsi introduite s'appellera la *multiplicité d'onde*, qui a pour origine le point $(x_1, \dots, x_n)$.

Considérons les points de l'espace comme pouvant être affectés de modifications ou ébranlements, de nature déterminée, qui se propagent ensuite, de proche en proche, suivant la loi suivante : l'ébranlement qui se manifeste en un point, à un instant, se manifeste, au bout d'un temps infiniment petit dt , en tous les points de l'*onde élémentaire* que l'on obtient en construisant l'homothétique de la multiplicité d'onde qui a pour origine le point considéré, le pôle d'homothétie étant ce même point, et le rapport d'homothétie étant dt . Cela reviendra à dire que les déplacements possibles de l'ébranlement à partir de chaque point $(x_1, \dots, x_n)$, pendant le temps dt , sont donnés par les formules générales

$$(8) \quad dx_i = p_i dt \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

où $p_1, \dots, p_n$ doivent satisfaire aux équations (6) et (7).

On voit alors, par les formules (5), que l'élément différentiel de l'intégrale J représente le temps que met l'ébranlement à se propager d'un point de la courbe considérée au point infiniment voisin qui lui fait suite sur la même courbe. Et, par suite, l'intégrale elle-même représente la durée de la propagation de l'ébranlement de l'origine à l'extrémité de cette courbe, quand on suppose qu'on arrête toute propagation de cet ébranlement en dehors des points de la courbe elle-même. C'est donc ce qu'on peut appeler la *durée de propagation de l'ébranlement le long de la courbe*.

(1) Si $\alpha > 0$ c'est une multiplicité à $n - \alpha - 1$ dimensions seulement, au point de vue ponctuel, seul considéré en ce moment.

(2) Tout ceci doit être entendu au point de vue infinitésimal, c'est-à-dire à des infiniment petits près d'ordre supérieur.

Si, par exemple, le problème posé est un problème de minimum, il revient à déterminer les courbes le long desquelles la propagation considérée se fait le plus rapidement.

13. La méthode que nous allons exposer consiste à considérer la multiplicité d'onde comme une multiplicité d'éléments de contact et à employer, pour transformer le système (5), (6), (7), les formules obtenues dans la première Partie de cet article : les variables $x_1, \dots, x_n$ devront être considérées comme de simples paramètres figurant dans les formules en question, tels que le paramètre α considéré aux n^{os} 3 et 4.

Nous introduisons donc de nouvelles variables $\lambda_1, \dots, \lambda_\alpha$, et les formules

$$(9) \quad q_i = \frac{\partial f}{\partial p_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

où f est la fonction

$$(9') \quad f = F + \sum_{h=1}^{\alpha} \lambda_h F_h;$$

de sorte que $(p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n)$ sont les coordonnées d'un élément de contact quelconque de la multiplicité d'onde (*cf.* n^{os} 1 et 2).

Comme le hessien de f est ici de rang 1, si l'on suppose le problème *ordinaire* ⁽¹⁾, le support tangentiel est à $n - 1$ dimensions. On peut donc, sous les conditions ⁽²⁾ discutées aux n^{os} 6 et 7, employer, pour représenter la multiplicité d'onde, des formules de la forme

$$(10) \quad G(x_1, \dots, x_n | q_1, \dots, q_n) = 1,$$

$$(11) \quad p_i = \frac{\partial G}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

dont la première résulte simplement de l'élimination des p_i et des λ_h entre les équations (7) et (8) (*cf.* n^{os} 1 et 2).

Nous sommes ainsi ramenés au *problème canonique* suivant :

(1) *Cf.* HADAMARD, *loc. cit.*, p. 239, 267, 268.

(2) En fait, les restrictions qu'elles imposent au problème sont dans la nature même de la question, comme nous le verrons plus loin (n^o 20).

PROBLÈME A. — Trouver $2n+1$ fonctions $x_1, \dots, x_n; q_1, \dots, q_n; \omega$ d'une variable u , satisfaisant aux équations de condition

$$(10) \quad G(x_1, \dots, x_n | q_1, \dots, q_n) = 1,$$

$$(12) \quad dx_i = \omega \frac{\partial G}{\partial q_i} du \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

et telles qu'il y ait extremum pour l'intégrale

$$(4) \quad J = \int_0^1 \omega du.$$

Les fonctions $x_1, \dots, x_n$ sont, de plus, assujetties à certaines conditions aux limites ($u=0, u=1$) de l'intervalle d'intégration, et la fonction ω doit être positive dans cet intervalle.

Une condition nécessaire de l'extremum est, comme l'on sait, que δJ soit nul, pour tout système de variations, $\delta x_1, \dots, \delta x_n; \delta q_1, \dots, \delta q_n, \delta \omega$ satisfaisant aux équations de conditions obtenues en prenant les variations des deux membres des équations (10) et (12); et tel de plus que $\delta x_1, \dots, \delta x_n$ s'annulent aux limites de l'intervalle d'intégration.

C'est cette condition que nous allons d'abord chercher à exprimer.

14. Pour n'avoir pas à faire intervenir la condition $\delta G = 0$, nous introduirons de nouvelles fonctions inconnues, en posant

$$(13) \quad \gamma_i = q_i \gamma_0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

La fonction γ étant supposée positive, le système (10) (12) sera remplacé, vu l'homogénéité de G , par le système

$$(14) \quad \gamma_0 = G(x_1, \dots, x_n | \gamma_1, \dots, \gamma_n) \equiv G',$$

$$(15) \quad dx_i = \omega \frac{\partial G'}{\partial \gamma_i} du \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Alors l'équation (14) n'a d'autre effet que de déterminer γ_0 , l'équation qu'on en déduit en prenant les variations n'a d'autre utilité que de déterminer $\delta \gamma_0$, et aucune de ces quantités $\gamma_0, \delta \gamma_0$ n'intervient dans les relations entre $\delta x_1, \dots, \delta x_n; \delta \gamma_1, \dots, \delta \gamma_n; \delta \omega; x_1, \dots, x_n; \gamma_1, \dots, \gamma_n; \omega; u$. Nous n'aurons donc à tenir compte, pour

exprimer que δJ est nul, que des équations (4), (15) et de celles qu'on obtient en prenant les variations des deux membres de chacune de ces équations ; c'est-à-dire

$$(16) \quad \delta J = \int_0^1 \delta \omega \, du.$$

$$(17) \quad \frac{d \delta x_i}{du} = \omega \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 G'}{\partial \gamma_i \partial x_j} \delta x_j + \omega \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 G'}{\partial \gamma_i \partial \gamma_j} \delta \gamma_j + \frac{\partial G'}{\partial \gamma_i} \delta \omega \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Pour exprimer que les δx_i s'annulent pour $u = 0$, $u = 1$, nous allons chercher à les calculer, en considérant $\delta \gamma_1, \dots, \delta \gamma_n$; $\delta \omega$ comme connus, c'est-à-dire intégrer le système (17).

Suivant la méthode la plus élémentaire, nous considérons le système homogène correspondant :

$$(18) \quad \frac{d z_i}{du} = \omega \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 G'}{\partial \gamma_i \partial x_j} z_j \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Soient

$$(19) \quad z_i = z_{ki} \quad (k = 1, 2, \dots, n; i = 1, 2, \dots, n)$$

n solutions, indépendantes, de ce système. Appliquant la méthode de la variation des constantes, nous posons ensuite

$$(20) \quad \delta x_i = \sum_{k=1}^n \xi_k z_{ki} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

ce qui donne le système

$$(21) \quad \sum_{k=1}^n z_{ki} \frac{d \xi_k}{du} = \Lambda_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

en posant, pour abréger l'écriture,

$$(22) \quad \Lambda_i = \omega \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 G'}{\partial \gamma_i \partial \gamma_j} \delta \gamma_j + \frac{\partial G'}{\partial \gamma_i} \delta \omega \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Or il est visible, par les formules (20), que les δx_i s'annulent simultanément quand les ξ_k le font, et dans ce cas seulement. La condition imposée aux δx_i revient donc à la suivante : les fonctions ξ_k ,

solutions de (21), qui s'annulent pour $u = 0$, s'annulent aussi pour $u = 1$.

Pour calculer ces fonctions ξ_k , nous mettons le système (21) sous forme résolue

$$(23) \quad \frac{d\xi_k}{du} = \sum_{i=1}^n \nu_{ki} \Lambda_i \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Les fonctions ν_{ki} sont définies par les équations

$$(24) \quad \sum_{i=1}^n z_{ki} \nu_{ji} = \begin{cases} 0 & \text{pour } k \neq j \\ 1 & \text{pour } k = j \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Elles constituent ce qu'on appelle le *système adjoint* du système des z_{ki} , et les formules

$$(25) \quad \nu_i = \nu_{ki} \quad (i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, n)$$

définissent n solutions indépendantes du *système linéaire adjoint* du système (18), à savoir

$$(26) \quad \frac{d\nu_i}{du} + \omega \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 G'}{\partial \gamma_j \partial x_i} \nu_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

On a alors, pour les fonctions ξ_k cherchées,

$$(27) \quad \xi_k = \int_0^u \sum_{i=1}^n \nu_{ki} \Lambda_i du \quad (k = 1, 2, \dots, n);$$

et les conditions qu'il s'agissait d'obtenir sont, en ayant égard aux formules (22),

$$(28) \quad \int_0^1 \sum_{i=1}^n \nu_{ki} \left\{ \omega \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 G'}{\partial \gamma_i \partial \gamma_j} \delta \gamma_j + \frac{\partial G'}{\partial \gamma_i} \delta \omega \right\} du = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Il reste, dès lors, à écrire que l'intégrale (16) est nulle pour tous les choix de fonctions $\delta \gamma_1, \dots, \delta \gamma_n; \delta \omega$ qui satisfont aux conditions (28). La condition (1) est donc qu'il existe n constantes

(1) Cette condition est bien connue, sous des formes équivalentes au moins. Nous reviendrons plus loin sur son énoncé et sa démonstration (voir n° 23).

$c_1, \dots, c_n$, telles qu'on ait l'identité

$$(29) \quad \delta\omega = \sum_{k=1}^n c_k \left[\sum_{i=1}^n v_{ki} \left(\omega \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 G'}{\partial \gamma_i \partial \gamma_j} \delta \gamma_j + \frac{\partial G'}{\partial \gamma_i} \delta \omega \right) \right].$$

Celle-ci se décompose en

$$(30) \quad \sum_{i=1}^n \gamma_i \frac{\partial G'}{\partial \gamma_i} = 1,$$

$$(31) \quad \sum_{i=1}^n \gamma_i \frac{\partial^2 G'}{\partial \gamma_i \partial \gamma_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

quand on pose

$$(32) \quad \gamma_i = \sum_{k=1}^n c_k v_{ki} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Or, les seconds membres de ces dernières formules constituent quand $c_1, \dots, c_n$ sont des constantes arbitraires, la solution générale du système (26). La condition trouvée est donc : il existe une solution $v_i = \gamma_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) du système (26) qui satisfait aux équations (30) et (31).

Si l'on revient maintenant aux variables $q_1, \dots, q_n$, au moyen des équations (13), comme les $\frac{\partial G}{\partial q_i}$ et les $\frac{\partial^2 G}{\partial q_j \partial x_i}$ sont homogènes de degré zéro ; et les $\frac{\partial^2 G}{\partial q_i \partial q_j}$ homogènes, on obtient la condition cherchée sous la forme suivante :

Pour que la variation de l'intégrale J soit nulle, dans les conditions supposées, il faut et il suffit qu'il existe n fonctions auxiliaires $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ qui satisfassent à la fois aux équations

$$(33) \quad \frac{d\gamma_i}{du} = -\omega \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 G}{\partial q_j \partial x_i} \gamma_j \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$(34) \quad \sum_{i=1}^n \gamma_i \frac{\partial G}{\partial q_i} = 1,$$

$$(35) \quad \sum_{i=1}^n \gamma_i \frac{\partial^2 G}{\partial q_i \partial q_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

15. Mais ce résultat peut se transformer si l'on tient compte des remarques du n° 4. Nous examinerons d'abord le cas le plus simple, celui de *l'extremum libre* (1) : le support ponctuel de la multiplicité d'onde est à $n - 1$ dimensions, puisqu'il n'y a pas d'équations de condition (2). Les équations (34) et (35) admettent alors pour seule solution $y_i = q_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) ; et, comme on a identiquement

$$(36) \quad \frac{\partial G}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n q_j \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial q_j} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

la condition obtenue est que les fonctions $x_1, \dots, x_n$; $q_1, \dots, q_n$; ω , qui satisfont par hypothèse aux équations (10) et (12), satisfassent aussi aux équations

$$(37) \quad dq_i = -\omega \frac{\partial G}{\partial x_i} du \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

On remarquera qu'il résulte de là que, étant identiques aux fonctions y_i qui, par leur définition même, ont des dérivées, les fonctions q_i sont elles-mêmes dérivables, ce qui, en vertu des relations (8), (11), (12), équivaut à dire que $x_1, \dots, x_n$ ont des dérivées du second ordre. Les hypothèses nécessitées implicitement par nos raisonnements étaient seulement celles de la continuité des dérivées du premier ordre, ainsi que l'existence et la continuité des dérivées partielles de la fonction G , qui ont figuré dans nos calculs.

Les équations (12) et (37) laissent arbitraire le choix de la fonction ω , ce à quoi l'on devait s'attendre, à cause de l'indétermination de la représentation paramétrique adoptée. On aura donc à intégrer le système canonique

$$(38) \quad \begin{cases} dx_i = \frac{\partial G}{\partial q_i} dt & (i = 1, 2, \dots, n), \\ dq_i = \frac{\partial G}{\partial x_i} dt & (i = 1, 2, \dots, n), \end{cases}$$

en prenant des valeurs initiales qui satisfassent à (10) : les équations (38) admettant l'intégrale première $G = \text{const.}$, l'équa-

(1) Cf. HADAMARD, *loc. cit.*, p. 41.

tion (10) sera alors vérifiée par tout système de fonctions x_i, q_i ainsi déterminé. Lorsque t varie en croissant, le point $(x_1, \dots, x_n)$ décrira une courbe, dite *extrémale*, dans un sens déterminé, à savoir le sens de la propagation; et la variation *positive* de t , d'un point à un autre de cette courbe, est la durée de propagation d'un ébranlement le long de l'arc de courbe considéré. Cela tient à ce que

$$(39) \quad dt = \omega du,$$

comme on le voit en comparant les deux systèmes (38) et (12), (37), et à ce que ωdu est l'élément différentiel de l'intégrale J (cf. n° 12). La variation de cette durée de propagation, entre deux points quelconques d'une extrémale, est nulle, lorsqu'on remplace l'arc d'extrémale allant d'un de ces points à l'autre, dans le sens de la propagation, par un autre arc de courbe, infiniment voisin, ayant la même origine et la même extrémité.

46. Il faut observer que, si une courbe extrémale est connue, avec le sens de la propagation sur cette courbe, les valeurs de $q_1, \dots, q_n$ en chaque point de cette courbe sont entièrement déterminées, sans intégration nouvelle, et la variable t , qui correspond à la durée de la propagation d'un point à un autre de cette courbe, s'obtient par une quadrature.

Géométriquement, cela tient à ce que, en chaque point de la courbe, la direction de la tangente qui correspond au sens de la propagation perce la multiplicité d'onde, qui a ce point pour origine, en un point bien déterminé, et détermine ainsi un élément de contact $(p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n)$; de plus, l'onde élémentaire correspondante devant passer par le point infiniment voisin de la courbe, pris aussi sur la direction positive de la tangente, le rapport d'homothétie dt de cette onde élémentaire à la multiplicité d'onde est aussi connu.

Analytiquement, le fait résulte des formules (39), (3), (5) et (8), qui donnent

$$(40) \quad dt = F(x_1, \dots, x_n | dx_1, \dots, dx_n),$$

$$(41) \quad p_i = \frac{dx_i}{dt} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$(42) \quad q_i = \frac{\partial F(x_1, \dots, x_n | p_1, \dots, p_n)}{\partial p_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Ceci conduit à chercher un système différentiel qui définisse les courbes extrémales, sans passer par les variables auxiliaires $q_1, \dots, q_n$.

La solution résulte immédiatement de la comparaison des équations (38), (41), (42), et de l'équation (31) du n° 3, qui donne ici

$$(43) \quad \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial G}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

On obtient ainsi le *système différentiel des extrémales* bien connu

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} d \frac{\partial F(x_1, \dots, x_n | dx_1, \dots, dx_n)}{\partial dx_i} - \frac{\partial F(x_1, \dots, x_n | dx_1, \dots, dx_n)}{\partial x_i} = 0 \\ (i = 1, 2, \dots, n). \end{array} \right.$$

17. Passons maintenant au cas général de l'*extremum lié*.

Alors le support ponctuel de la multiplicité d'onde est à $n - \alpha - 1$ dimensions, puisqu'il faut tenir compte des équations (2) : à chaque point de ce support correspondent ∞^α éléments de contact, dont les coordonnées $(p_1, \dots, p_n; y_1, \dots, y_n)$ sont précisément définies, en fonction de celles de l'un d'entre eux $(p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n)$, par les équations (34) et (35) [équations (33) et (34) du n° 4].

En tenant compte des équations (37), (39) et (43) du n° 4, on voit que, si l'on pose pour plus de netteté

$$(45) \quad \bar{G} = G(x_1, \dots, x_n | y_1, \dots, y_n),$$

on peut adjoindre au système trouvé, formé des équations (10), (12), (33), (34), (35), les équations

$$(46) \quad \bar{G} = 1,$$

$$(47) \quad \frac{\partial \bar{G}}{\partial y_i} = \frac{\partial G}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

qui en sont des conséquences, et que l'on peut remplacer les équations (33) par les suivantes

$$(48) \quad dy_i = -\omega \frac{\partial \bar{G}}{\partial x_i} du \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Les équations (47) permettent alors d'écrire les équations (12)

sous la forme

$$(49) \quad dx_i = \omega \frac{\partial \bar{G}}{\partial y_i} du \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Enfin les équations (34), (35) expriment seulement que $(p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n)$ et $(p_1, \dots, p_n; y_1, \dots, y_n)$ sont deux éléments de contact associés au point $(p_1, \dots, p_n)$ de la multiplicité d'onde; et à cause des équations (47), les coordonnées de ce point peuvent s'écrire indifféremment $p_i = \frac{\partial \bar{G}}{\partial q_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) ou $p_i = \frac{\partial \bar{G}}{\partial y_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$). On peut, par conséquent, remplacer encore ces équations par celles qu'on en déduit en échangeant les y_i et les q_i , c'est-à-dire par les équations

$$(50) \quad \sum_{i=1}^n q_i \frac{\partial \bar{G}}{\partial y_i} = 1,$$

$$(51) \quad \sum_{i=1}^n q_i \frac{\partial^2 \bar{G}}{\partial y_i \partial y_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n):$$

et celles-ci entraînent, à leur tour, comme conséquences les équations (10) et (47).

Il reste, en définitive, le système formé des équations (46), (48), (49), (50), (51). Et l'on pourra encore, comme au n° 15 et sous le bénéfice des mêmes observations, substituer aux équations (48) et (49), le système canonique qu'on en déduit, en introduisant la variable t , au moyen de l'équation (39).

Les équations (50) et (51) sont vérifiées par les fonctions $q_i = y_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$); car la première se réduit à (46), et les autres sont des identités, pour $q_i = y_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). De là résulte que si $y_1, \dots, y_n$ est un système de fonctions auxiliaires correspondant à une solution $(x_1, \dots, x_n; q_1, \dots, q_n; \omega)$ du problème de la variation nulle de J ; $(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n; \omega)$ est aussi une solution de ce même problème. On voit ainsi apparaître une classe de solutions particulières du problème, que nous pouvons appeler les *solutions canoniques*, puisqu'elles sont définies par le système canonique (38); et toute courbe extrémale intervient dans au moins une solution canonique. De là résulte, comme au n° 15, l'existence des dérivées secondes des x_i pour toute extrémale.

18. Imaginons une courbe extrémale et une solution canonique qui la comprenne. La tangente à l'extrémale en un point M, menée dans la direction de la propagation, détermine un point (P) de la multiplicité d'onde qui a (M) pour origine. La solution canonique intervient pour fixer un des ∞^α éléments de contact de la multiplicité d'onde en ce point. Enfin les équations (50), (51) signifient seulement que dans toute solution, canonique ou non, qui comprend la même extrémale, les valeurs de $q_1, \dots, q_n$ correspondent à l'un quelconque des éléments de contact en question. Pour une solution quelconque comprenant une extrémale déterminée, les fonctions $q_1, \dots, q_n$ sont donc liées aux fonctions $x_1, \dots, x_n$ par la seule condition qu'en chaque point de l'extrémale elles fournissent le plan de l'un des éléments de contact que nous venons de définir. Dans les solutions canoniques, au contraire, intervient un choix particulier de ces éléments de contact.

Pour mettre ce choix en évidence, on peut introduire, au moyen des formules (8), les α indéterminées $\lambda_1, \dots, \lambda_\alpha$ dont dépendent les éléments de contact en question. On a alors à écrire que ces valeurs

$$(9) \quad q_i = \frac{\partial f}{\partial p_i} \quad \left(f = F + \sum_{h=1}^{\alpha} \lambda_h F_h \right) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

où l'on suppose [n° 16, équation (41)]

$$(41) \quad p_i = \frac{dx_i}{dt} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

satisfont au système canonique (38). Tenant compte des équations (31) du n° 3, on obtient ainsi le *système de Lagrange*, où les λ_h ne sont pas autre chose que les *multiplicateurs de Lagrange*; à savoir

$$(51) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

A ce système, pour définir les extrémales, il faut adjoindre les équations de condition (2), c'est-à-dire, avec les notations actuelles,

$$(52) \quad F_h(x_1, \dots, x_n | p_1, \dots, p_n) = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, \alpha).$$

Une question se pose naturellement : combien de solutions canoniques correspondent à une même extrémale ? Les formules définitives du numéro précédent montrent que les fonctions auxiliaires $y_1, \dots, y_n$ sont les mêmes pour tous les systèmes de fonctions $q_1, \dots, q_n$ qui correspondent à une même extrémale ; puisque tous ces systèmes de fonctions $q_1, \dots, q_n$ satisfont aux équations (50), (51), dès que $y_1, \dots, y_n$ correspondent à l'un d'eux. On peut donc discuter la recherche des fonctions $y_1, \dots, y_n$ au moyen des équations (33), (34), (36) (n° 14), en y considérant $x_1, \dots, x_n; q_1, \dots, q_n, \omega$ comme des fonctions de u connues. La forme linéaire de ces équations montre que la solution générale sera de la forme

$$(53) \quad y_i = y_{0,i} + \sum_{j=1}^{\gamma} \rho_j (y_{j,i} - y_{0,i}) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

où les ρ_j sont arbitraires, et où les $y_{j,i} (j = 0, 1, 2, \dots, \gamma)$ sont $(\gamma + 1)$ solutions particulières.

C'est ce qu'on pourrait aussi conclure des équations (51). Et, naturellement, γ est au plus égal à α .

Supposons que les équations générales des extrémales, obtenues par intégration de (38),

$$(54) \quad x_i = \varphi_i(t - t_0 | x_1^0, \dots, x_n^0; q_1^0, \dots, q_n^0) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

où les valeurs initiales satisfont à l'équation (10), dépendent, abstraction faite de la constante t_0 , de $2n - \delta - 1$ constantes arbitraires essentielles ; les équations (52), et par suite l'ensemble des solutions du système (38), dépendent de $2n - \delta + \gamma - 1$ constantes. On a donc $2n - \delta + \gamma - 1 = 2n - 1$, c'est-à-dire $\gamma = \delta$. On remarquera que, dans les mêmes conditions, les courbes extrémales dépendent de $2n - \delta - 2 = 2n - \gamma - 2$ constantes arbitraires essentielles. Pour qu'on puisse faire passer une courbe extrémale par deux points arbitrairement choisis, il est nécessaire que $\gamma = 0$; et cela est suffisant, si l'on se limite à un domaine convenable. Dans ce cas, et dans ce cas seulement, une seule solution canonique correspond à chaque extrémale.

Résumons les résultats obtenus, et nous aurons l'énoncé suivant :

Les systèmes de fonctions $x_1, \dots, x_n; q_1, \dots, q_n; \omega$ de la va-

riable u , qui satisfont aux équations de condition (10) et (12), et annulent la variation de l'intégrale (4) se partagent en deux classes. Ce sont d'abord les systèmes de fonctions (solutions canoniques) qui s'obtiennent en prenant pour ω une fonction arbitraire positive de u , et en déterminant $x_1, \dots, x_n; q_1, \dots, q_n$ au moyen du système canonique (38), joint à l'équation (39). Ces solutions sont les seules dans le problème de l'extremum libre, c'est-à-dire si le hessien de G , considérée comme fonction de $q_1, \dots, q_n$, est de rang 1. Et, de plus, dans ce cas, il n'y a qu'une seule solution canonique fournissant chaque courbe (en $x_1, \dots, x_n$), ou extrémale, qui répond au problème.

Au contraire, si le hessien de G est de rang $\alpha + 1$ ($\alpha > 0$), à chaque solution canonique $(x_1, \dots, x_n; q_1, \dots, q_n; \omega)$ correspondent ∞^α autres solutions fournissant la même extrémale : elles s'obtiennent en remplaçant $q_1, \dots, q_n$ par l'une quelconque des solutions $q'_1, \dots, q'_n$ du système

$$(55) \quad \sum_{i=1}^n q'_i \frac{\partial G}{\partial q_i} = 1,$$

$$(56) \quad \sum_{i=1}^n q'_i \frac{\partial^2 G}{\partial q_i \partial q_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Dans le cas général, où il y a ∞^{2n-2} extrémales, chacune d'elles n'est fournie que par une seule solution canonique. Si, au contraire, il y a $\infty^{2n-\gamma-2}$ extrémales ($\gamma > 0$), ∞^γ solutions canoniques font partie des ∞^α solutions correspondant à l'une quelconque d'entre elles au moyen des équations (54) et (55) ⁽¹⁾.

19. Supposons l'intégrale J prise suivant un arc d'extrémale, et faisons varier cet arc, sans laisser ses extrémités fixes. Alors δJ n'est pas nul en général, et il est donné, comme l'on sait, par une formule fondamentale, dite *formule aux limites* ⁽²⁾. Il est facile de la déduire des calculs du n° 14.

⁽¹⁾ Il est clair, par la forme initiale (1) de l'intégrale J , qu'elle ne dépend que de l'arc d'extrémale, et non de celle des ∞^α solutions, en $q_1, \dots, q_n$, qu'on peut lui associer dans ce dernier cas. Cela résulte aussi de ce que δJ est nul constamment, quand, laissant l'arc d'extrémale fixe, on fait varier le système des fonctions $q_1, \dots, q_n$, pourvu qu'il représente toujours l'une de ces ∞^α solutions.

⁽²⁾ Cf. HADAMARD, *loc. cit.*, p. 246.

La formule (29) a lieu, en effet, par hypothèse. Elle peut s'écrire, avec les notations (22) et en tenant compte des équations (23),

$$(57) \quad \delta\omega = \sum_{k=1}^n c_k \sum_{i=1}^n v_{ki} \Lambda_i = \sum_{k=1}^n c_k \frac{d\xi_k}{du}.$$

On en déduit, en intégrant et désignant par des indices *zéro* les valeurs qui correspondent à l'origine de l'arc de courbe considéré, et par des indices *un* celles qui correspondent à l'extrémité

$$(58) \quad \delta J = \sum_{k=1}^n c_k (\xi'_k - \xi_k^0).$$

Or on tire des équations (20), en les résolvant,

$$(59) \quad \xi_k = \sum_{i=1}^n v_{ki} \delta x_i \quad (k = 1, 2, \dots, n);$$

et l'on a, par suite, en tenant compte des formules (32),

$$(60) \quad \sum_{k=1}^n c_k \xi_k = \sum_{i=1}^n y_i \delta x_i.$$

Si donc nous remettons, à la place des lettres $y_1, \dots, y_n$, les lettres $q_1, \dots, q_n$ qui devront correspondre à une des solutions particulières, satisfaisant au système canonique, dont il est question dans l'énoncé final du n° 18, nous obtiendrons la formule aux limites sous la forme (1)

$$(61) \quad \delta J = \left[\sum_{i=1}^n q_i \delta x_i \right]_0^1.$$

Remarquons que l'intégrale J s'écrit elle-même sous la forme analogue

$$(62) \quad J = \int_0^1 \sum_{i=1}^n q_i dx_i;$$

(1) S'il y a seulement $\infty^{2n-\gamma-2}$ courbes extrémales, cette formule (61) est fournie par chacun des systèmes de fonctions (53); et l'on a, entre les variations de

$x_1, \dots, x_n$, γ relations indépendantes de la forme $\left[\sum_{i=1}^n Q_i \delta x_i \right]_0^1 = 0$.

car l'on a, d'après les équations (12),

$$(63) \quad \sum_{i=1}^n q_i dx_i = \sum_{i=1}^n q_i \frac{\partial G}{\partial q_i} \omega du = G \omega du$$

et, par conséquent, à cause de (10),

$$(64) \quad \omega du = \sum_{i=1}^n q_i dx_i.$$

On peut également considérer la formule (62) comme une application de la formule (61); il suffit de faire varier l'extrémité de l'arc d'extrémale depuis l'origine de cet arc, qu'on maintiendra fixe, jusqu'au point de l'extrémale que l'on veut prendre comme extrémité définitive de l'arc considéré, en faisant décrire à ce point tout l'arc en question. La formule (61) est alors constamment

$$(65) \quad \delta J = \sum_{i=1}^n q_i \delta x_i.$$

et la formule (62) en résulte par intégration.

Nous reviendrons plus loin sur les conséquences auxquelles donne lieu la formule (62) (*voir* nos 23 et suivants).

20. Discutons maintenant les restrictions que nous avons imposées à la fonction F , aux nos 12 et 13.

Il s'agit d'abord de la légitimité de la représentation de la multiplicité d'onde au moyen d'équations de la forme (10) et (11). D'après les conclusions de la discussion faite aux nos 6 et 7, il faut écarter les éléments de contact dans le voisinage desquels le rang du hessien de f (de F , dans le cas $\alpha = 0$) s'élève.

Or, en ce qui concerne le système (44), auquel on arrive dans le cas de l'extremum libre ($\alpha \equiv 0$), lorsqu'on revient au point de vue des variables $x_1, \dots, x_n$ seules, on voit que ce hessien n'est autre que le déterminant des coefficients des différentielles secondes dans ces équations (44). On serait donc conduit à faire la même hypothèse pour pouvoir affirmer l'existence des intégrales de ce système, dans des conditions non singulières. Nous étions donc en

droit de dire (note du n° 20) que la restriction ainsi introduite n'est pas artificielle, mais tient à la nature même de la question.

Il en est de même pour le cas, plus général ($\alpha > 0$), de l'extremum lié, qui nous a conduit au système (55), (56). En cherchant à résoudre ce système par rapport aux dérivées secondes des x_i et aux dérivées premières des λ_h , on sera conduit à différentier les équations (56), et le déterminant qui se présentera, comme déterminant du système linéaire homogène obtenu, sera le hessien de f . On arrivera donc à la même conclusion sur la nature de cette première restriction.

L'autre restriction est la condition que nous avons imposée à $F(x_1, \dots, x_n | dx_1, \dots, dx_n)$ d'être positif. Supposons au contraire que, sur la courbe pour laquelle on se propose d'examiner si la variation de l'intégrale (1) est nulle, la fonction F ne soit pas constamment positive. On pourra toujours trouver une fonction auxiliaire $H(x_1, \dots, x_n)$, définie en tous les points de la courbe considérée et dans le domaine de ces points, c'est-à-dire en tous les points d'un certain domaine (D) contenant la courbe à son intérieur, admettant des dérivées partielles continues dans ce domaine, et dont la valeur sur la courbe soit une fonction croissante du paramètre u servant à représenter la courbe : on peut même se donner arbitrairement la valeur de cette fonction aux divers points de la courbe ; ce sera, par exemple, la valeur du paramètre u lui-même.

Alors, sur la courbe, $\sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{dx_i}{du}$ a la valeur 1. D'autre part, $F\left(x_1, \dots, x_n, \frac{dx_1}{du}, \dots, \frac{dx_n}{du}\right)$ est supposé continu et fini sur la courbe ; sa valeur absolue est donc inférieure à un nombre fixe M . Si donc l'on pose

$$(66) \quad \bar{F} = F(x_1, \dots, x_n | dx_1, \dots, dx_n) + M \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial x_i} dx_i,$$

le quotient $\frac{\bar{F}}{du}$ sera, sur la courbe considérée, supérieur à un nombre positif fixe, et restera positif sur les courbes qu'on en déduira par des variations continues relativement aux points et aux tangentes. Or il suffit, voulant obtenir des conditions nécessaires pour que la variation soit nulle, de considérer de telles variations de la courbe d'intégration.

Posons, pour abréger l'écriture,

$$(67) \quad M \frac{\partial H}{\partial x_i} = H_i,$$

de sorte que la fonction (66) est

$$(68) \quad \bar{F} = F(x_1, \dots, x_n | dx_1, \dots, dx_n) + \sum_{i=1}^n H_i dx_i,$$

et considérons ⁽¹⁾ l'intégrale

$$(69) \quad \bar{J} = \int_0^1 \bar{F} \equiv J + M [H(x_1, \dots, x_n)]_0^1 \equiv \int_0^1 \bar{\omega} \bar{du}.$$

Il est clair que $\delta \bar{J} = \delta J$, quand les extrémités de l'arc d'intégration restent fixes. Nous aurons donc à exprimer que $\delta \bar{J}$ est nul; et, pour cela, tous les raisonnements et résultats précédents s'appliquent. Il reste à voir ce qu'ils donneront, relativement aux données primitives.

21. Comparons pour cela les multiplicités d'onde, dans les deux cas, en un même point de la courbe considérée, l'origine des coordonnées étant, par conséquent, mise en ce point. Les coordonnées du nouveau point de la courbe, correspondant à l'accroissement positif du du paramètre, sont $dx_1, \dots, dx_n$, et satisfont, dans le premier cas, aux équations

$$(70) \quad \begin{cases} F(x_1, \dots, x_n | dx_1, \dots, dx_n) = \omega du, \\ F_h(x_1, \dots, x_n | dx_1, \dots, dx_n) = 0 \end{cases} \quad (h = 1, 2, \dots, \alpha)$$

et, dans le second cas, aux équations analogues

$$(71) \quad \begin{cases} \bar{F}(x_1, \dots, x_n | dx_1, \dots, dx_n) = \bar{\omega} du, \\ F_h(x_1, \dots, x_n | dx_1, \dots, dx_n) = 0 \end{cases} \quad (h = 1, 2, \dots, \alpha).$$

Posons, pour abréger l'écriture,

$$(72) \quad X_i du = dx_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

⁽¹⁾ Cette transformation est, au fond, celle qui a été utilisée par Carathéodory et dont se sert aussi Hadamard (cf. *loc. cit.*, p. 385); mais ces auteurs introduisent l'hypothèse que la fonction ε de Weierstrass a un signe constant; tandis que cette hypothèse n'intervient pas ici. Et ils n'examinent que le cas $\alpha \geq 0$, $n \geq 2$.

et cessons d'écrire, dans les fonctions considérées, les lettres $x_1, \dots, x_n$ qui sont des paramètres constants. En vertu des formules (5), la multiplicité d'onde est définie, pour $\bar{J}$, par les équations

$$(73) \quad \begin{cases} \bar{F}(X_1, \dots, X_n) = \bar{\omega}, \\ F_h(X_1, \dots, X_n) = 0 & (h = 1, 2, \dots, \alpha), \\ X_i = \bar{\omega} \bar{p}_i & (i = 1, 2, \dots, n), \end{cases}$$

$\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n$ étant les coordonnées du point qui correspond au point $dx_1, \dots, dx_n$ de l'onde élémentaire. Et si ω était positif, on aurait, pour J , des formules toutes semblables

$$(74) \quad \begin{cases} F(X_1, \dots, X_n) = \omega \\ F_h(X_1, \dots, X_n) = 0 & (h = 1, 2, \dots, \alpha), \\ X_i = \omega p_i & (i = 1, 2, \dots, n). \end{cases}$$

Ces formules montrent que, quand ω s'annule, le point correspondant de la multiplicité d'onde s'éloigne à l'infini. Nous pouvons les considérer comme la définition de la multiplicité d'onde dans tous les cas, que ω soit positif ou négatif.

Les deux multiplicités d'onde se correspondent point par point, au moyen des formules (73) et (74). Cherchons les formules de cette correspondance. On a, à cause de (68), (72), (74),

$$(75) \quad \bar{\omega} = \omega + \sum_{i=1}^n H_i X_i = \omega \left(1 + \sum_{i=1}^n H_i p_i \right),$$

ce qui donne les formules

$$(76) \quad \bar{p}_i = \frac{p_i}{1 + \sum_{i=1}^n H_i p_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Cherchons les coordonnées $q_1, \dots, q_n; \bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n$ pour les éléments de contact correspondants. Pour (74), ω étant une constante, nous avons à écrire que $\sum_{i=1}^n q_i dX_i$ est une combinaison linéaire et homogène de dF et des dF_h . Donc

$$(77) \quad q_i = \lambda_0 \frac{\partial F}{\partial X_i} + \sum_{h=1}^{\alpha} \lambda_h \frac{\partial F_h}{\partial X_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

La condition $\sum_{i=1}^n q_i p_i = 1$ donne $\lambda_0 = 1$. On a donc, en posant encore comme au n° 1,

$$(78) \quad f = F + \sum_{h=1}^{\alpha} \lambda_h F_h,$$

les formules

$$(79) \quad q_i = \frac{\partial f}{\partial X_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Pour les quantités $\bar{q}_i$, on aura des formules analogues

$$(80) \quad \bar{q}_i = \frac{\partial \bar{f}}{\partial X_i}, \quad \bar{f} = \bar{F} + \sum_{h=1}^{\alpha} \bar{\lambda}_h F_h \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Comme les λ_h , $\bar{\lambda}_h$ sont entièrement arbitraires, on peut s'imposer la condition qu'ils soient, respectivement, égaux

$$\lambda_h = \bar{\lambda}_h \quad (h = 1, 2, \dots, \alpha);$$

ce qui donne la loi de correspondance des deux multiplicités d'onde, élément de contact à élément de contact. Elle est exprimée par les équations (76) et les équations

$$(81) \quad \bar{q}_i = q_i + \Pi_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

On voit qu'elle n'est autre que la *transformation dualistique d'une translation* [cf. n° 1, note (1)].

Avant de revenir aux équations différentielles du problème de Lagrange, indiquons encore comment se généralisent, pour la multiplicité définie par les équations (74), les formules obtenues aux nos 2 et 3. Le support tangentiel est défini, comme on vient de le voir, par les équations (79). Nous supposons ici, comme au n° 13, que le hessien de f est de rang 1, c'est-à-dire que l'élimination de $X_1, \dots, X_n, \lambda_1, \dots, \lambda_{\alpha}$ entre les équations (79) et les équations de condition $F_h = 0$ ($h = 1, 2, \dots, \alpha$), fournit une seule équation, réductible à la forme

$$(82) \quad G(x_1, \dots, x_n | q_1, \dots, q_n) = 1.$$

On a d'autre part

$$(83) \quad \sum_{i=1}^n q_i X_i = \omega, \quad \sum_{i=1}^n q_i dX_i = 0;$$

d'où encore

$$(84) \quad \Sigma X_i dq_i = 0.$$

On conclut que les X_i sont proportionnels aux $\frac{\partial G}{\partial q_i}$; et l'on constate, à cause de (83) et (82), que le rapport de proportionnalité est ω . Donc on a

$$(85) \quad X_i = \omega \frac{\partial G}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

et, par suite, on a encore les formules (11)

$$(86) \quad p_i = \frac{\partial G}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

On verrait enfin, en reprenant les calculs du n° 3, mais en y introduisant les X_i au lieu des p_i , que l'équation (31) de ce n° 3 sera remplacée par les suivantes :

$$(87) \quad \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n | X_1, \dots, X_n)}{\partial x_i} + \omega \frac{\partial G(x_1, \dots, x_n | q_1, \dots, q_n)}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

22. Soit maintenant

$$(88) \quad \frac{dx_i}{d\theta} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \overline{q_i}}, \quad \frac{d\overline{q_i}}{d\theta} = - \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}, \quad d\theta = \overline{\omega} du \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

le système canonique obtenu en égalant à zéro la variation de $\overline{J}$. L'équation

$$(89) \quad \Gamma(x_1, \dots, x_n | \overline{q_1}, \dots, \overline{q_n}) = 1$$

est l'équation tangentielle de la multiplicité d'onde correspondante.

Nous avons à faire le changement de variables défini par les formules (76) et (81); de sorte que G est défini par l'équation

$$(90) \quad \Gamma(x_1, \dots, x_n | q_1 + \Pi_1 G, \dots, q_n + \Pi_n G) = G;$$

car, pour obtenir l'équation (82), il faudrait résoudre par rapport à la variable d'homogénéité l'équation de la multiplicité d'onde primitive, qui résulte de (89) par le changement de coordonnées (81) (cf. n° 2).

Si l'on différentie alors la relation identique (90), on obtient

$$(91) \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Gamma}{\partial q_j} H_j \frac{\partial G}{\partial q_i} = \frac{\partial G}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$(92) \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Gamma}{\partial q_j} \frac{\partial H_j}{\partial x_i} G + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Gamma}{\partial q_j} H_j \frac{\partial G}{\partial x_i} = \frac{\partial G}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Remarquons que l'on a encore

$$(93) \quad \overline{p_j} = \frac{\partial \Gamma}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, n);$$

et, par suite, en tenant compte de (76) et de (75),

$$(94) \quad 1 - \sum_{j=1}^n H_j \frac{\partial \Gamma}{\partial q_j} = 1 - \sum_{j=1}^n H_j \overline{p_j} = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^n H_j p_j} = \frac{\omega}{\overline{\omega}}.$$

Les équations (91) et (92) s'écrivent, par suite, en observant que $\frac{\partial H_j}{\partial x_i} = \frac{\partial H_i}{\partial x_j}$, et que $\overline{\omega} \overline{p_j} = \frac{dx_i}{du}$,

$$(95) \quad \overline{\omega} \frac{\partial \Gamma}{\partial q_i} = \omega \frac{\partial G}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$(96) \quad \overline{\omega} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial H_i}{\partial x_j} \frac{dx_i}{du} = \omega \frac{\partial G}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Et enfin, si l'on y tient compte des équations (88), il reste

$$(97) \quad dx_i = \omega \frac{\partial G}{\partial q_i} du \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$(98) \quad -d\overline{q_i} + dH_i = \omega \frac{\partial G}{\partial x_i} du \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Ces dernières, à cause de (81), se réduisent à

$$(99) \quad dq_i = -\omega \frac{\partial G}{\partial x_i} du \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

On a ainsi retrouvé le système canonique déduit de l'équation (82).

Il convient d'observer que, pour $\omega = 0$, les $\frac{\partial G}{\partial q_i}$, à cause des for-

mules (86), seront, en général, infinis; mais le système canonique pourra, d'après la manière même dont nous venons de l'obtenir, être transformé de manière que cette difficulté apparente disparaisse.

Quant aux systèmes (44) ou (41), (51), (52), on les déduira encore du système canonique, en se servant des formules (87). On les obtiendrait plus immédiatement encore, en partant des systèmes analogues relatifs à l'intégrale $\bar{J}$. On a, en effet avec les variables $x_1, \dots, x_n; p_1, \dots, p_n$,

$$(100) \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Pi_j}{\partial x_i} p_j = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Pi_i}{\partial x_j} p_j \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Donc, à cause de (41),

$$(101) \quad \begin{cases} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{d\Pi_i}{dt} & (i = 1, 2, \dots, n), \\ \frac{\partial \bar{f}}{\partial p_i} = \frac{\partial f}{\partial p_i} + \Pi_i & (i = 1, 2, \dots, n), \end{cases}$$

et, par suite,

$$(102) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{f}}{\partial p_i} - \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

ce qui montre bien qu'on retombe sur les systèmes en question.

23. Le théorème qui nous a permis d'exprimer, au n° 14, que δJ est nul, pour tous les systèmes de variation $\delta\gamma_1, \dots, \delta\gamma_n, \delta\omega$ qui satisfont aux conditions (28), est, au fond, le théorème qui sert de fondement à la méthode classique des multiplicateurs dans les problèmes isopérimétriques. Mais comme il se présente, dans notre méthode, sous une forme particulière, il ne sera pas inutile de donner l'énoncé précis correspondant, avec la démonstration ⁽¹⁾.

Il se rapporte à des intégrales définies de la forme

$$(103) \quad I = \int_0^1 L \, du,$$

⁽¹⁾ Cf. les démonstrations analogues données par Hadamard (*loc. cit.*, p. 196). Mais la restriction relative aux *champs singuliers* ne subsiste pas ici.

où L est une forme linéaire par rapport à des fonctions indéterminées $w_1, \dots, w_n$ de u ; les coefficients de cette forme étant des fonctions données de u .

Considérons m intégrales de cette forme

$$(104) \quad I_h = \int_0^1 L_h du \quad (h = 1, 2, \dots, m),$$

et attribuons γ aux fonctions w_i , m systèmes de déterminations, arbitrairement choisies

$$(105) \quad w_i = w_{ki} \quad (i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m).$$

Les intégrales considérées $I_1, \dots, I_m$ prendront des valeurs numériques correspondantes

$$(106) \quad I_h = I_{kh} \quad (h = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, m).$$

Considérons le déterminant formé avec ces nombres I_{kh} , et examinons le cas où il est nul, pour tous les systèmes de déterminations (105) : il y aura alors un déterminant mineur *principal* qui ne sera pas nul, les déterminants mineurs de degré supérieur étant tous nuls. On peut supposer que ce déterminant principal est celui qui correspond à $k = 1, 2, \dots, s$; $h = 1, 2, \dots, s$. Alors tous les déterminants

$$(107) \quad \begin{vmatrix} I_{11} & \dots & I_{s1} & I_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ I_{1s} & \dots & I_{ss} & I_s \\ I_{1,s+l} & \dots & I_{s,s+l} & I_{s+l} \end{vmatrix} \quad (l = 1, 2, \dots, m-s)$$

sont nuls, quelles que soient les fonctions w_i . On a donc des équations à coefficients constants, de la forme

$$(108) \quad I_{s+l} = \sum_{h=1}^s c_{lh} I_h \quad (l = 1, 2, \dots, m-s),$$

c'est-à-dire

$$(109) \quad \int_0^1 \left(I_{s+l} - \sum_{h=1}^s c_{lh} I_h \right) du = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, m-s).$$

Comme elles ont lieu, quels que soient les w_i , et que les expres-

sions sous le signe $\int$ sont des formes linéaires par rapport aux w_i , on en conclut les relations identiques en $w_1, \dots, w_n$ (et u)

$$(110) \quad I_{s+l} = \sum_{h=1}^s c_{lh} I_h \quad (l = 1, 2, \dots, m-s).$$

Il en résulte en particulier que $I_{s+1}, \dots, I_m$ sont nulles pour tout choix des fonctions $w_1, \dots, w_n$ qui annule $I_1, I_2, \dots, I_s$.

24. Cela posé, proposons-nous d'exprimer que l'intégrale (103) s'annule pour tout choix des fonctions $w_1, \dots, w_n$ qui rend nulles les intégrales (104). Et supposons d'abord que le déterminant des quantités (106) n'est pas nul.

Considérons encore un $(m+1)^{\text{ième}}$ système de déterminations des w_i

$$(111) \quad w_i = w_{0,i} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

et les valeurs correspondantes $I_{0,1}, \dots, I_{0,m}$ des intégrales (104). On pourra déterminer les nombres μ_k par les équations

$$(112) \quad \sum_{k=1}^m \mu_k I_{k,h} - I_{0,h} = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, m).$$

Si l'on prend alors pour les w_i les fonctions

$$(113) \quad w_i = \sum_{k=1}^m \mu_k w_{k,i} - w_{0,i} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

les valeurs des I_h , étant égales aux premiers membres des équations (112), sont nulles; et, par hypothèse, celle de I est alors nulle aussi.

Désignant par $I_{1,0}, \dots, I_{m,0}, I_{0,0}$ les valeurs de I qui correspondent aux choix (105) et (111), on a donc l'égalité numérique

$$(114) \quad \sum_{k=1}^m \mu_k I_{k,0} - I_{0,0} = 0.$$

Si on la compare aux égalités (112), vérifiées aussi par les μ_k ,

on voit que le déterminant

$$(115) \quad \begin{vmatrix} I_{0,0} & I_{1,0} & \dots & I_{m,0} \\ I_{0,1} & I_{1,1} & \dots & I_{m,1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ I_{0,m} & I_{1,m} & \dots & I_{m,m} \end{vmatrix}$$

est nul, tandis que le mineur du premier élément n'est pas nul, et cela, quel que soit le choix des $m + 1$ systèmes de détermination des w_i introduits. D'après le résultat du n° 23, on en conclut une identité à coefficients constants, de la même nature que (110).

$$(116) \quad L = \sum_{h=1}^n c_h L_h.$$

Si le déterminant des quantités (106) est nul, on pourra ne considérer que les intégrales $I_1, \dots, I_s$ donnant le mineur principal de ce déterminant ; car $I_{s+1}, \dots, I_m$ étant nulles toutes les fois que les précédentes le sont, il suffira d'exprimer que L s'annule dès que $I_1, \dots, I_s$ sont nulles. On obtiendra donc encore une identité de la forme (116), comme condition nécessaire, avec

$$c_{s+1} = c_{s+2} = \dots = c_m = 0.$$

Comme on a, dans ce cas, les identités (110), il est clair qu'on a même une infinité d'identités de la forme (116), dont la plus générale s'écrirait, au moyen de l'une d'entre elles,

$$(117) \quad L = \sum_{h=1}^m c_h L_h + \sum_{l=1}^{m-s} \rho_l \left(L_{s+l} - \sum_{k=1}^s c_{lk} L_k \right);$$

les ρ_l étant arbitraires.

Enfin, dans tous les cas, l'existence d'une identité de la forme (116) est suffisante pour que L s'annule dès que $I_1, \dots, I_m$ s'annulent simultanément.

Nous obtenons donc le théorème (1) annoncé : *Pour que l'inté-*

(1) Ce théorème étant déduit du lemme fondamental du calcul des variations (cf. HADAMARD, *loc. cit.*, p. 64) subsiste, comme lui, si l'on impose aux fonctions $w_1, \dots, w_n$ diverses restrictions, relatives soit à leurs valeurs aux limites, soit à leur caractère analytique.

grale (104) s'annule pour tout choix des fonctions w_i qui annule simultanément les intégrales (105), il faut et il suffit que les formes linéaires des indéterminées w_i désignées par $L, L_1, \dots, L_m$, soient liées par une relation de la forme (116), identique en $w_1, \dots, w_n$ et u , les lettres $c_1, \dots, c_m$ désignant des constantes numériques.

Dans l'application faite de ce théorème au n° 14, $\delta\gamma_1, \dots, \delta\gamma_n, \delta\omega$ jouent le rôle des fonctions $w_1, \dots, w_n$. L'intégrale I est l'intégrale (16) et les intégrales I_h sont les intégrales (28). Il existe γ relations, analogues aux $(m - s)$ relations (110), dans le cas où le système canonique (38) ne fournit que $\infty^{2n-\gamma-2}$ courbes extrémales (*cf.* la note du n° 19).

III. — CONDITIONS SUFFISANTES DE L'EXTREMUM FAIBLE.

25. Les résultats trouvés précédemment, et résumés dans l'énoncé du n° 18, peuvent s'énoncer sous une forme remarquable, à condition qu'on se limite, le cas échéant, aux solutions canoniques. Cette restriction est, du reste, de peu d'importance, puisqu'elle n'empêche pas d'obtenir toutes les courbes qui annulent la variation de J . Elle permet de supposer que les fonctions $q_1, \dots, q_n$ que l'on considère sont dérivables.

Considérons l'intégrale

$$(1) \quad H = \int_0^1 \sum_{i=1}^n q_i dx_i,$$

où l'on suppose les fonctions $x_1, \dots, x_n; q_1, \dots, q_n$ de la variable d'intégration u liées par la seule équation de condition

$$(2) \quad G(x_1, \dots, x_n | q_1, \dots, q_n) = 1;$$

et exprimons que sa variation δH est nulle. Sous le bénéfice de la remarque faite plus haut, nous appliquons le procédé classique, qui nous donne

$$(3) \quad \delta H = \left(\sum_{i=1}^n q_i \delta x_i \right)_0^1 + \int_0^1 \sum_{i=1}^n (\delta q_i dx_i - \delta x_i dq_i).$$

Nous supposons encore que les extrémités de l'arc d'intégration sont fixes. La quantité restée sous le signe $\int$ doit donc reproduire ∂G à un facteur près, et l'on trouve le système canonique

$$(4) \quad \frac{dx_i}{\frac{\partial G}{\partial q_i}} = \frac{dq_i}{-\frac{\partial G}{\partial x_i}} = dt \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

qui entraîne la formule

$$(5) \quad dt = \sum_{i=1}^n q_i dx_i,$$

quand on tient compte de (2), et qu'on se rappelle que G est homogène, de degré 1 en $q_1, \dots, q_n$.

Les extrémales du problème A s'obtiennent donc en écrivant que la variation de l'intégrale H est nulle, moyennant la seule équation de condition (2), quand on suppose fixes les extrémités de l'arc d'intégration.

On voit de plus que, si l'on faisait varier les fonctions $q_1, \dots, q_n$ seules, en laissant l'arc d'intégration fixe, on trouverait immédiatement et, par conséquent, sans hypothèses sur la dérivabilité des fonctions $q_1, \dots, q_n$, la formule

$$(6) \quad \delta_0 H = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \delta q_i dx_i.$$

La condition pour que la variation $\delta_0 H$ fût nulle serait donc

$$(7) \quad dx_i = \frac{\partial G}{\partial q_i} dt \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

puisque les variations des q_i seraient alors liées seulement par l'équation

$$(8) \quad 0 = \delta_0 G = \sum_{i=1}^n \frac{\partial G}{\partial q_i} \delta q_i.$$

Et l'on aurait encore la formule (5).

Donc les systèmes de fonctions considérés dans l'énoncé du problème A sont ceux qu'on obtient en écrivant la condition de la variation nulle dans le problème suivant :

PROBLÈME B. — *Étant donné un arc de courbe, représenté par des formules*

$$(9) \quad x_i = \varphi_i(u), \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

déterminer des fonctions $q_1, \dots, q_n$, de u , qui satisfassent à l'équation

$$(2) \quad G(x_1, \dots, x_n | q_1, \dots, q_n) = 1,$$

et telles qu'il y ait extremum pour l'intégrale

$$(1) \quad H = \int_0^1 \sum_{i=1}^n q_i dx_i.$$

On voit de plus, en se reportant à la formule (62) du n° 19, qui est l'origine des remarques actuelles, que *les intégrales J considérées dans le problème A sont les intégrales H du problème B, qui correspondent au cas de la variation nulle* (pour ce même problème B).

Il faut cependant, pour satisfaire à la condition $\omega > 0$ du problème A, n'admettre, pour le problème B, que des fonctions $q_1, \dots, q_n$ vérifiant la condition

$$(10) \quad \sum_{i=1}^n q_i dx_i > 0.$$

Si l'on interprète $q_1, \dots, q_n$ comme les composantes d'un vecteur ayant pour origine le point $(x_1, \dots, x_n)$ qui décrit l'arc de courbe considéré, quand u varie de 0 à 1, cette condition équivaut à dire que ce vecteur doit être situé du côté de la tan-

gente positive, par rapport au plan normal $\sum_{i=1}^n (X_i - x_i) dx_i = 0$;

ou encore qu'il doit faire un angle aigu avec la direction positive de la tangente.

Il faut observer aussi que si le hessien de G est de rang $(\alpha + 1)$, avec $\alpha > 0$, les équations (7) ont comme conséquences les équations (2) du n° 12, à savoir :

$$(11) \quad F_h(x_1, \dots, x_n | dx_1, \dots, dx_n) = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, \alpha);$$

le problème B n'est donc possible, dans ce cas, que si la courbe donnée (9) est une courbe intégrale de ce système de Monge.

26. Dans tous les cas, les remarques précédentes introduisent, de la manière la plus naturelle, l'équation aux dérivées partielles de Jacobi-Hamilton :

$$(12) \quad G\left(x_1, \dots, x_n \left| \frac{\partial t}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial t}{\partial x_n} \right. \right) = 1.$$

Elles montrent en effet qu'on obtiendra des extrémals du problème A, en déterminant d'abord des fonctions $q_1, \dots, q_n$ de $x_1, \dots, x_n$, qui satisfassent à (2), et annulent la variation de l'intégrale H; puis en déterminant $x_1, \dots, x_n$ au moyen des équations (7), où l'on aura porté, à la place de $q_1, \dots, q_n$, les fonctions de $x_1, \dots, x_n$ trouvées. Car la variation de H est alors nulle, soit quand on fait varier la courbe, en gardant pour les q_i les fonctions trouvées; soit quand, laissant la courbe fixe, on fait varier les q_j ; elle est donc encore nulle quand on fait varier à la fois la courbe et les q_i , car toute variation de cette espèce générale s'obtient en superposant deux variations qui appartiennent respectivement aux deux catégories spéciales considérées.

Or ce calcul revient à prendre d'abord les dérivées

$$(13) \quad q_i = \frac{\partial t}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

d'une intégrale de l'équation (12), soit

$$(14) \quad t = V(x_1, \dots, x_n);$$

puis à déterminer les *transversales* de la famille de surfaces dépendant du paramètre t , représentées par l'équation (14), c'est-à-dire les courbes définies par la propriété que nous allons rappeler.

Chaque point M de l'une quelconque des surfaces (14) est l'origine d'une multiplicité d'onde (cf. n° 12), et sur cette multiplicité d'onde existe un point P, de coordonnées

$$(15) \quad X_i = x_i + \frac{\partial G}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

les q_i ayant les valeurs (13). Ce point est entièrement défini par le fait qu'il existe, en ce point, un plan tangent à la multiplicité

d'onde, de coefficients de direction $\lambda q_1, \dots, \lambda q_n$, c'est-à-dire parallèle au plan tangent en M à la surface (14) considérée (1). La direction MP, de coefficients de direction

$$(16) \quad p_i = \frac{\partial G}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

est dite *transversale* à l'élément de contact $(x_1, \dots, x_n; \lambda q_1, \dots, \lambda q_n)$ du point M et, par suite, transversale, en M, à la surface considérée.

Cela posé, les transversales d'une famille de surfaces à un paramètre (en supposant, pour simplifier, que par chaque point de l'espace ou de la portion d'espace considérée, passe une surface de la famille, et une seule) sont les courbes dont la direction, en chacun de leurs points, est transversale à la surface de la famille qui passe en ce point.

On remarquera que, dans le cas actuel, à cause de la condition $\sum_{i=1}^n q_i dx_i > 0$, les transversales de la famille de surfaces (14) doivent être supposées décrites dans le sens des V croissants.

27. La construction précédente donne, réciproquement, toutes les extrémales. Partons en effet d'une surface initiale (S_0) , et à chacun de ses éléments de contact $(x_1^0, \dots, x_n^0; q_1^0, \dots, q_n^0)$, dont les coordonnées pourront être supposées satisfaire à la condition (2), associons l'intégrale du système (4), qui satisfait, pour $t = 0$, aux conditions initiales $x_i = x_i^0; q_i = q_i^0$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Elle satisfera à la condition (2). A chaque point M_0 de (S_0) se trouvera associée la courbe extrémale issue de M_0 , qui est le lieu décrit par le point M, de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$, quand t varie à partir de la valeur $t = 0$. Ces courbes, au moins dans le voisinage de (S_0) , seront telles que par chaque point M de l'espace il en passe une et une seule (2). A ce point $(x_1, \dots, x_n)$ sera associée la valeur t de l'intégrale $\int \sum_{i=1}^n q_i dx_i$ prise depuis M_0 jusqu'à M, le long de l'arc

(1) Ce point doit être, par rapport au plan tangent en M à la surface considérée, du côté des V croissants.

(2) Ceci serait en défaut, si (S_0) satisfaisait à l'équation (aux dérivées partielles) $G(x_1^0, \dots, x_n^0 | q_1^0, \dots, q_n^0) = 0$; cas singulier que nous avons implicitement écarté.

d'extrémale passant en M , puisque les équations (4) entraînent l'équation (5) : t est ainsi une fonction $V(x_1, \dots, x_n)$.

Pour avoir sa différentielle totale, il suffit de faire varier M d'une manière quelconque ; il entraîne avec lui l'extrémale correspondante, dont le pied M_0 décrit (S_0) . Appliquons ⁽¹⁾ la formule (3), en remarquant qu'on a

$$\sum_{i=1}^n q_i^0 \delta x_i^0 = 0;$$

et il reste

$$(17) \quad \delta t = \sum_{i=1}^n q_i \delta x_i.$$

La fonction t , que nous avons construite, satisfait donc aux équations (13) et à l'équation aux dérivées partielles (12). Et, les équations (7) étant vérifiées, les extrémales qui ont servi à définir cette fonction sont les transversales de la famille de surfaces (14) qui lui correspond.

Enfin, il est clair que chaque extrémale sera transversale d'une infinité de familles de surfaces, de l'espèce indiquée. Car elle correspond (*cf.* nos 16 et 18) à au moins une solution canonique ; et il suffira que l'une des surfaces de la famille comprenne l'un des éléments $(x_1, \dots, x_n; q_1, \dots, q_n)$ fournis par cette solution, pour que tous les autres interviennent dans les autres surfaces de la famille ⁽²⁾.

Remarquons encore qu'on pourrait essayer de substituer à la surface (S_0) une multiplicité à $n - 1$ dimensions, mais dont le support ponctuel ait moins de $(n - 1)$ dimensions. La construction fera encore intervenir ∞^{n-1} solutions canoniques, mais, si l'équation (12) a seulement ∞^{2n-2} courbes caractéristiques (extrémales

⁽¹⁾ Cette méthode, fondée sur la formule aux limites, est employée par M. Hadamard (*loc. cit.*, p. 169). Le principe en est dû à M. Darboux (*Théorie des surfaces*, t. II, n° 536).

⁽²⁾ Le cas singulier signalé dans une note précédente ne peut, ici, se produire, puisque tous les éléments d'une solution canonique satisfont à l'équation (2).

Mais il faudra, en général, limiter l'arc d'extrémale considérée, pour obtenir une famille de surfaces (et de transversales) telles que par chaque point du domaine considéré il en passe une et une seule.

Nous ne voulons pas reprendre ici cette discussion bien connue.

Cf. HADAMARD, *loc. cit.*, p. 360 et suivantes.

du problème A), il pourra arriver qu'on obtienne moins de ∞^{n-1} extrémales et que, par suite, celles-ci ne remplissent pas l'espace voisin de (S_0) . La définition de la fonction V serait alors en défaut. Cela arrivera certainement, toujours en supposant $\gamma > 0$, si (S_0) est remplacé par un point de l'espace, et, plus généralement, si le support employé a moins de γ dimensions.

Même en supposant $\gamma = 0$, mais $\alpha > 0$, et en partant d'un point M_0 pris pour multiplicité initiale, les extrémales employées balayeront bien un espace à n dimensions, mais cet espace se terminera au point considéré sous une forme singulière, puisque les extrémales issues de ce point n'en partent pas dans toutes les directions : il ne contiendra pas tous les points du domaine de M_0 , ni même tous ceux de ces points qui sont d'un même côté d'une surface passant en M_0 et ayant un plan tangent en ce point.

28. Les familles de surfaces qui viennent de s'introduire sont formées des états successifs d'une même onde (c'est-à-dire d'un lieu de points ébranlés à un même instant) quand on considère le mode de propagation défini au n° 12. Il faut admettre seulement que l'état d'une onde, au temps $t + dt$, se déduit de l'état de cette onde au temps t , à des infiniment petits près d'ordre supérieur, en prenant l'enveloppe des ondes élémentaires issues de divers points de la multiplicité qui figure l'état de l'onde au temps t .

Nous renverrons, sur ce point, à notre article des *Annales de l'École Normale*, 3^e série, t. XXVI, 1909, p. 405; car l'interprétation en question est une conséquence des résultats du n° 5 de cet article, et les raisonnements qui y conduisent, reposant sur la représentation tangentielle des ondes élémentaires, ne cessent pas d'être applicables quand le support ponctuel de la multiplicité d'onde a moins de $n - 1$ dimensions, pourvu que le support tangentiel ait bien $n - 1$ dimensions.

Ici encore on peut concevoir les extrémales [qui sont les caractéristiques de l'équation (12)] comme les trajectoires de la propagation des divers éléments de contact.

Observons encore que les équations (4) définissent, quand on considère $(x_1, \dots, x_n; q_1, \dots, q_n)$ comme les coordonnées homogènes d'un élément de contact, un groupe de transformations de contact à un paramètre, et que les états successifs d'une même

onde proviennent, d'après ce qui précède, de l'application à l'un d'eux de ces diverses transformations de contact. C'était là le point de vue de notre article publié dans ce *Bulletin* (t. XXXIV, 1906), mais nous avions supposé alors que le hessien de G était de rang 1, tandis que nous ne faisons ici aucune restriction à son égard.

Les transformations de contact finies de ce groupe sont définies par la correspondance établie entre chaque point de l'espace et l'onde qui résulte, au bout d'un temps déterminé t , d'un ébranlement produit en ce point.

Dans le cas où l'équation (12) a seulement $\infty^{2n-2-\gamma}$ courbes caractéristiques, il y en a $\infty^{n-1-\gamma}$ passant par un point; de sorte que les multiplicités particulières ponctuelles qui interviennent ici ont $n-1-\gamma$ dimensions seulement. On a donc affaire alors à des transformations de contact définies toutes par $\gamma+1$ équations entre les coordonnées $x_1, \dots, x_n$ et $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ des points des deux espaces intertransformés.

29. Les remarques des numéros précédents, indépendamment de leur intérêt analytique, conduisent très simplement aux conditions suffisantes pour l'extremum du problème A, en le ramenant à l'extremum du problème B. Comme nous allons le voir, *il y aura minimum pour A s'il y a maximum pour B.*

Imaginons en effet une extrémale de A, et deux points fixes M_0 et M_1 sur cette extrémale. Admettons que ces points soient assez rapprochés pour qu'on puisse associer à l'arc M_0M_1 d'extrémale une famille de surfaces (14) remplissant les conditions énumérées au n° 27, à savoir : il existe une portion d'espace, à n dimensions, continue et d'un seul tenant, telle que par chacun de ses points passe une surface (14) et une seule; l'arc M_0M_1 est tout entier intérieur à cet espace, ne rencontre chacune des surfaces qu'en un point au plus et est transversal à chacune d'elles.

Nous désignerons par $\mathcal{C}$ l'arc d'extrémale considéré, et par $\odot$ un autre arc ⁽¹⁾ allant de M_0 en M_1 , dans la même portion d'espace; et différant de $\mathcal{C}$, par ses points et ses tangentes, d'aussi peu qu'on le voudra.

(¹) Il doit, bien entendu, dans le cas $\alpha > 0$, vérifier les équations de Monge (II). (Cf. n° 25.)

L'intégrale $J_{\mathcal{C}}$, puisqu'on y peut prendre, pour les q_i , les dérivées $\frac{\partial V}{\partial x_i}$ (n° 26), est l'intégrale de dV prise de M_0 à M_1 , et ne change pas, si on la prend suivant l'arc $\mathcal{C}$. On a donc

$$(18) \quad J_{\mathcal{C}} = J_{\mathcal{C}} = - \left(\int_{\mathcal{C}} \sum_{i=1}^n q_i dx_i - \int_{\mathcal{C}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} dx_i \right) = - (\Pi_{\mathcal{C}} - \Pi'_{\mathcal{C}}),$$

et l'on aperçoit dans le second membre la différence de deux intégrales, relatives à la courbe $\mathcal{C}$, de la nature de celles qui figurent dans l'énoncé du problème B, la première écrite correspondant, par hypothèse, à un système de fonctions $q_1, \dots, q_n$ qui annule la variation de cette intégrale. De plus, les valeurs de $q_1, \dots, q_n$ seront aussi voisines qu'on voudra des valeurs

$$q'_1 = \frac{\partial V}{\partial x_1}, \quad \dots, \quad q'_n = \frac{\partial V}{\partial x_n},$$

en tout point de $\mathcal{C}$, pourvu que $\mathcal{C}$ soit assez voisin de $\mathcal{C}$ (par points et tangentes).

L'arc $\mathcal{C}$ fournira donc un minimum faible pour J, si le système $(q_1, \dots, q_n)$ fournit un maximum pour H prise le long de $\mathcal{C}$.

30. Or la discussion du maximum, dans le problème B, est immédiate. Car on a

$$(19) \quad \Pi_{\mathcal{C}} - \Pi'_{\mathcal{C}} = \int_0^1 \sum_{i=1}^n (q_i - q'_i) dx_i.$$

En posant, comme au n° 12,

$$(20) \quad dx_i = \omega p_i du \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

avec [équation (64), n° 19]

$$(21) \quad \omega du = \sum_{i=1}^n q_i dx_i,$$

il vient

$$(20) \quad \Pi_{\mathcal{C}} - \Pi'_{\mathcal{C}} = - \int_0^1 \sum_{i=1}^n (q'_i p_i - 1) \omega du$$

L'élément ω du étant, par hypothèse, essentiellement positif, non seulement sur $\mathcal{C}$, mais aussi sur les courbes suffisamment voisines, on voit que, pour que le premier membre soit positif, il est nécessaire et suffisant que la condition

$$(21) \quad \sum_{i=1}^n p_i q'_i - 1 < 0$$

soit vérifiée, sur chacune des multiplicités d'onde ayant leurs origines aux divers points de $\mathcal{C}$, pour l'élément de contact (E) $(p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n)$ que fait intervenir l'intégrale $H_{\mathcal{C}}$.

Si l'on se reporte au n° 10, on voit que chacune de ces multiplicités doit être concave, en (E), vers son origine.

Donc, pour que l'intégrale H , prise suivant un arc de courbe $\mathcal{C}$ satisfaisant aux équations de Monge (11), ait un maximum pour un système de fonctions $q_1, \dots, q_n$, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient remplies : 1° la direction positive de la tangente en chaque point $(x_1, \dots, x_n)$ de $\mathcal{C}$ perce la multiplicité d'onde ayant ce point pour origine en un point auquel correspond un élément de contact dont le plan a

pour équation $\sum_{i=1}^n q_i (X_i - x_i) = 1$; 2° en cet élément de contact,

la multiplicité d'onde est concave vers son origine, en ce sens que le point de cet élément est du même côté que l'origine par rapport aux plans des éléments de contact voisins.

31. Cette condition sera remplie pour $\mathcal{C}$ si elle est remplie pour $\mathcal{C}$ dans le domaine des éléments de contact de chacune des multiplicités d'onde, qui résultent de la construction précédente appliquée à $\mathcal{C}$. Car alors, on peut faire varier infiniment peu la courbe sans que la condition cesse d'être réalisée : il est entendu, toujours, que la variation altère infiniment peu les courbes et les tangentes.

Nous arrivons donc à la conclusion suivante :

Un arc d'extrémale du problème A fournit un minimum pour l'intégrale J (dans le cas où les extrémités de l'arc d'intégration restent fixes), s'il satisfait aux conditions suivantes :

1° une au moins des familles d'onde coupées transversalement par cette extrémale remplit d'une manière régulière ⁽¹⁾ une portion de l'espace qui entoure de tous côtés l'arc considéré, et satisfait en plus au critérium suivant; 2° soient M un point quelconque de l'arc d'extrémale, Π le plan tangent, en ce point M , à celle des ondes considérées qui y passe; la direction positive de la tangente à l'extrémale en M perce la multiplicité d'onde, qui a M pour origine, en un point P , et il résulte de la transversalité que ce point P forme, avec un plan parallèle au plan Π , un élément de contact (E) de cette multiplicité d'onde : dans le domaine de cet élément de contact (E) , la multiplicité d'onde doit être concave vers son origine.

Les développements des n^{os} 10 et 11 donnent les moyens analytiques de vérifier, dans des cas étendus, si ce critérium se trouve vérifié. On y peut encore faire intervenir uniquement la fonction G .

On remarquera que, dans le cas de minimum que nous venons d'expliquer, les ondes élémentaires issues des points d'une onde de la famille considérée sont convexes vers leur enveloppe, qui constitue l'onde consécutive de cette même famille : le mot d'enveloppe a donc ici son sens étymologique, et, en quelque sorte, physique. Et l'image qui en résulte est bien d'accord avec l'idée même de la propagation, une onde quelconque devant être le *front* des ondes élémentaires d'où on la considère comme provenant, quand on applique le principe des ondes enveloppes.

32. Dans la remarque précédente, nous avons substitué à la considération de la multiplicité d'onde celle de l'onde élémentaire. Ces deux multiplicités étant homothétiques par rapport à leur origine commune, cette substitution est légitime, car elles sont, en même temps, soit convexes, soit concaves. Il semble même que l'onde élémentaire fasse mieux image, car elle est plus immédiatement associée à l'élément différentiel de l'intégrale considérée.

Cela est vrai surtout, dans le cas où cet élément différentiel ω du

(²) Cela veut dire que, par chaque point, passe une surface de la famille et une seule.

est susceptible de changer de signe, sur l'arc de courbe considéré : cas dont il nous reste à dire un mot, pour terminer.

Reportons-nous, pour cela, aux transformations employées aux n^{os} 20 et 21. Les formules (76) et (81) du n^o 21, appliquées simultanément à deux éléments de contact voisins, donnent

$$(22) \quad \sum_{i=1}^n \bar{p}_i \bar{q}'_i - 1 = \sum_{i=1}^n \frac{p_i(q'_i + \Pi_i)}{1 + \sum_{j=1}^n \Pi_j p_j} - 1 = \frac{\sum_{i=1}^n p_i q'_i - 1}{1 + \sum_{j=1}^n \Pi_j p_j}.$$

En tenant compte encore de la formule (75) du n^o 21, il reste

$$(23) \quad \bar{\omega} \left(\sum_{i=1}^n \bar{p}_i \bar{q}'_i - 1 \right) = \omega \left(\sum_{i=1}^n p_i q'_i - 1 \right).$$

Si la condition suffisante du minimum est remplie pour l'intégrale transformée, à élément différentiel positif, $\int \bar{\omega} du$, le premier membre de cette identité (33) est négatif. Il en est donc de même du second.

Par conséquent, la deuxième condition suffisante du minimum se traduit par la concavité, ou la convexité, de la multiplicité d'onde, suivant que ω est positif ou négatif. Mais le point qui intervient ici est, de plus, sur la direction positive, ou négative, de la tangente suivant que ω est positif ou négatif. On pourrait dire qu'il y a convexité vers la direction positive de la tangente.

Il paraît plus simple de se borner à l'onde élémentaire

$$(24) \quad \begin{cases} F(x_1, \dots, x_n | X_1, \dots, X_n) = \omega du \\ F_h(x_1, \dots, x_n | X_1, \dots, X_n) = 0 \end{cases} \quad (h = 1, 2, \dots, \alpha),$$

pour laquelle le point à considérer est toujours (dans le système de coordonnées qui a, pour origine, l'origine $(x_1, \dots, x_n)$ de cette onde

$$(25) \quad X_i = dx_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Les valeurs de $q_1, \dots, q_n$ à associer à ce point sont toujours définies par la solution canonique considérée; ou encore par la

famille de surfaces définie par l'équation (14), qui correspond à l'une des solutions de l'équation de Jacobi-Hamilton (12).

Mais il se présente ici un fait digne de remarque, quand on applique la construction du n° 27 pour trouver l'une des solutions correspondant à l'extrémale considérée. Quand on passe par un point de l'extrémale pour lequel ωdu s'annule en changeant de signe, la valeur de t cesse de croître (par exemple) pour commencer à décroître; elle reprend donc, au delà d'un tel point N, les valeurs qu'elle avait prise en deçà. Les surfaces obtenues ne coupent donc plus l'arc d'extrémale chacune en un seul point. En N, la surface correspondante est tangente à l'arc d'extrémale,

puisque $\sum_{i=1}^n q_i dx_i$ est alors nul, et dans le voisinage de cette surface particulière, celles qui coupent l'extrémale la coupent en deux points, de part et d'autre de N.

33. En un tel point N, il ne faudra, naturellement, pas conserver le dernier membre ($= dt$) dans les équations canoniques (4) pour la définition même de l'extrémale. Bien plus, comme nous l'avons remarqué au n° 22, ce système canonique est inutilisable, en ce point, sous cette forme (4), car les dérivées de G seront, en général, infinies. Mais cette difficulté disparaîtra si l'on introduit l'équation de Jacobi-Hamilton sous une forme moins restrictive que la forme (12), que nous avons spécialisée en vue de la théorie seulement.

Rappelons-nous en effet que cette équation, sous la forme primitive (2), définit le support tangentiel de la multiplicité d'onde, et, d'après les raisonnements du n° 21, ce support s'obtient en éliminant les rapports de $X_1, \dots, X_n; \lambda_1, \dots, \lambda_n$ entre les équations (1)

$$(26) \quad q_i = \frac{\partial \Gamma(x | X)}{\partial X_i} + \sum_{h=1}^{\alpha} \lambda_h \frac{\partial \Gamma_h(x | X)}{\partial X_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

(1) Les lettres X_i désignent ici les différentielles dx_i , au lieu des dérivées $\frac{dx_i}{du}$; mais cela ne change rien aux raisonnements du n° 21, que, pour abréger, nous ne reprenons pas.

et les équations de condition

$$(27) \quad 0 = F_h(x | X) \equiv F_h(x_1, \dots, x_n | X_1, \dots, X_n) \quad (h = 1, 2, \dots, \alpha).$$

Si le résultat de cette élimination est obtenu sous une forme quelconque

$$(28) \quad G_0(x_1, \dots, x_n | q_1, \dots, q_n) = 0,$$

dG_0 et dG seront liées par une identité de la forme

$$(29) \quad dG \equiv M(x_1, \dots, x_n | q_1, \dots, q_n) dG_0,$$

pour tous les éléments $(x_1, \dots, x_n; q_1, \dots, q_n)$ qui satisfont à l'équation (2) ou à l'équation (28), supposée équivalente. Le système canonique (4) et l'équation (2) seront donc remplacés par l'équation (18), et le système canonique plus général

$$(30) \quad \frac{\frac{dx_1}{dG_0}}{\frac{\partial q_1}{\partial G_0}} = \dots = \frac{\frac{dx_n}{dG_0}}{\frac{\partial q_n}{\partial G_0}} = \frac{\frac{dq_1}{dG_0}}{-\frac{\partial G_0}{\partial x_1}} = \dots = \frac{\frac{dq_n}{dG_0}}{-\frac{\partial G_0}{\partial x_n}}.$$

Ainsi seront déterminées les solutions canoniques, et t dépendra toujours de la quadrature de la différentielle

$$(31) \quad dt = \sum_{i=1}^n q_i dx_i.$$

Cette différentielle, d'après les équations (30), s'annule en même temps que l'expression

$$(32) \quad D = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \frac{\partial G_0}{\partial q_i}.$$

Et cette expression intervient précisément quand on cherche à déduire G de G_0 , puisqu'il s'agit de résoudre, par rapport à G , l'équation

$$(33) \quad G_0\left(x_1, \dots, x_n \left| \frac{q_1}{G}, \dots, \frac{q_n}{G} \right. \right) = 0.$$

Si l'on tient compte de ce que G doit avoir la valeur 1 sur la multiplicité considérée, on tire de cette équation, par différentiation totale,

$$(34) \quad dG_0 = \left(\sum_{i=1}^n q_i \frac{\partial G_0}{\partial q_i} \right) dG.$$

ce qui montre que D est l'inverse du coefficient M de la formule (29). Ce coefficient M devient donc infini, pour les éléments de contact exceptionnels qui font l'objet de notre discussion (1).

A un autre point de vue, ces éléments se trouvent exceptionnels dans les mêmes conditions que les éléments qui avaient été écartés au n° 1, car les plans qui y figurent passent par l'origine des coordonnées (origine de l'onde élémentaire). Mais la difficulté disparaît ici, parce que les éléments de contact de l'onde élémentaire ont des coordonnées $(x_1, \dots, x_n; q_1, \dots, q_n)$, qui, d'après les formules (26) et (24), sont liées maintenant par la relation

$$(35) \quad \sum_{i=1}^n q_i X_i = \omega du;$$

ce qui équivaut à rétablir l'homogénéité des coordonnées $q_1, \dots, q_n$ dont nous nous étions privés au n° 1, afin de mieux indiquer la dualité des deux points de vue : ponctuel et tangentiel.

En résumé : *Les extrémales du problème de Lagrange sont données, sans imposer de condition de signe à l'élément différentiel de l'intégrale (1) (n° 12), par les solutions du système canonique (30), qui satisfait à l'équation (28) : celle-ci est l'équation tangentielle de l'onde élémentaire (24), les coordonnées $(X_1, \dots, X_n; q_1, \dots, q_n)$ d'un élément de contact de cette onde étant liées par la condition (35). Un arc d'extrémale ainsi obtenu fournit un minimum pour le problème considéré, si les conditions (suffisantes) suivantes sont remplies : 1° au moyen de cette extrémale et de ∞^{n-1} extrémales voisines, con-*

(1) Il est facile d'étudier ces particularités sur des exemples. On peut prendre, comme très simple, le suivant : $\omega du = \sqrt{dx^2 + dy^2} - 2y dy$. On considérera l'extrémale $y = x$, et les extrémales voisines $y = x + c$, qui donnent comme famille d'ondes les paraboles égales $\frac{x+y}{\sqrt{2}} - y^2 = V = \text{const.}$ Les ondes élémentaires sont des coniques faciles à discuter.

Par le procédé du n° 20, cette intégrale $\int \omega du$ se ramène à $\int \bar{\omega} du$, où $\bar{\omega} du = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

Le point exceptionnel N de l'extrémale est ici $x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

venablement choisies, se construit, par le procédé du n° 27, une famille de surfaces (famille d'ondes) remplissant d'une manière régulière une portion de l'espace qui contient et entoure de tous côtés l'arc d'extrémale considéré; 2° l'onde élémentaire qui a pour origine chaque point $(x_1, \dots, x_n)$ de cet arc et qui passe par le point consécutif, infiniment voisin, de cet arc, est concave ou convexe vers son origine [dans le domaine de l'élément de contact de cette onde élémentaire qui contient ce point et dont le plan a pour coefficients de direction les quantités $(q_1, \dots, q_n)$ associées à $(x_1, \dots, x_n)$ dans la solution du système (28), (30) que l'on considère], suivant que l'élément différentiel $F(x_1, \dots, x_n | dx_1, \dots, dx_n) \equiv \omega$ du est positif ou négatif.

SUR LA RÉDUCTION DES FORCES D'INERTIE ;

PAR M. ÉMILE COTTON.

Soient S un système matériel, Σ_1 un système invariable de comparaison; en faisant usage d'un système intermédiaire Σ on décompose le mouvement absolu (de S par rapport à Σ_1) dans les deux mouvements suivants : mouvement relatif (de S par rapport à Σ), mouvement d'entraînement (de Σ par rapport à Σ_1).

Soit M un point matériel ou, comme nous dirons plus brièvement, une molécule de S . Un théorème bien connu apprend que l'accélération absolue de M est la résultante de l'accélération relative, de l'accélération d'entraînement et de l'accélération de Coriolis ou accélération complémentaire. A chacune de ces accélérations on peut faire correspondre une force d'inertie égale au produit de cette accélération par $-m$, m étant la masse de M . La force d'inertie absolue est donc la résultante des forces suivantes : force d'inertie d'entraînement (ou force centrifuge), force d'inertie relative, force d'inertie complémentaire (ou force de Coriolis).

Nous effectuons ici la réduction géométrique ⁽¹⁾ des diverses

(¹) Par réduction géométrique d'un système de vecteurs, nous entendons la

forces d'inertie correspondant à toutes les molécules de S ; nous indiquons ensuite l'intérêt de cette réduction en Mécanique appliquée.

1. Appelons D_a le système des *forces d'inertie absolues* de S . Les calculs mêmes qu'on fait au début de la Dynamique des systèmes (voir, par exemple, APPELL, *Mécanique rationnelle*, t. II, nos 328 et 335) conduisent au résultat suivant :

La résultante de translation de D_a est équipollente à la force d'inertie absolue de la masse entière de S concentrée au centre de gravité.

Le moment résultant de D_a par rapport à un point O_1 fixe (par rapport à Σ_1) s'obtient de la façon suivante : On imagine le moment résultant $O_1 h_{1a}$ des quantités de mouvement absolues, moment pris par rapport à O_1 , et la vitesse absolue $h_{1a} h'_{1a}$ du point h_{1a} . On construit $O_1 \eta_{1a}$ équipollent à $h_{1a} h'_{1a}$, ce vecteur représente le moment résultant cherché.

Au lieu d'effectuer la réduction par rapport à un point fixe, on peut l'effectuer par rapport au centre de gravité G de S , qui, en général est mobile par rapport à Σ_1 . On voit alors, à l'aide de calculs simples, que *le moment résultant de D_a par rapport au centre de gravité G de S s'obtient ainsi : par G on mène des axes de directions fixes (par rapport à Σ_1) ; soit Σ'_1 le système invariable défini par ces axes. On prend le moment résultant $G h_a$, par rapport à G , des quantités de mouvement correspondant au mouvement de S par rapport à Σ'_1 (mouvement autour du centre de*

détermination de la résultante de translation et du moment résultant par rapport à un point. Deux systèmes de vecteurs sont dits *géométriquement équivalents*, si les résultats de leur réduction géométrique sont identiques. On sait que, lorsque les vecteurs correspondent à des *forces appliquées à un solide* absolument rigide, tel qu'on les imagine en Mécanique rationnelle, deux systèmes de forces (dynamiques) géométriquement équivalents sont aussi mécaniquement équivalents, c'est-à-dire peuvent être remplacés l'un par l'autre sans qu'il y ait de modifications dans l'équilibre ou le mouvement du corps.

Dans le cas d'un système S quelconque, il n'en est généralement plus ainsi, mais l'intérêt que présente encore cette réduction géométrique tient à ce qu'elle donne les éléments essentiels pour l'application des théorèmes généraux du début de la Dynamique des systèmes, concernant les quantités de mouvement (projections et moments) et où les forces intérieures s'éliminent.

gravité). On construit $h_a h'_a$ vitesse de h_a dans son mouvement par rapport à Σ'_1 et enfin l'on mène $G\tau_a$ équipollent à $h_a h'_a$.

2. Pour ce qui concerne la réduction du système D_r des forces d'inertie relatives, il suffit évidemment de remplacer, dans les constructions précédentes, Σ_1 par Σ .

Donc, la résultante de translation de D_r égale la force d'inertie relative de la masse entière de S concentrée en son centre de gravité, et le moment résultant $G\tau_r$ est équipollent à $h_r h'_r$ vitesse du point h_r , extrémité du moment résultant Gh_r de quantités de mouvement de S , ces quantités de mouvement et cette vitesse se rapportant aux mouvements de S et de h_r par rapport à un système Σ' d'axes dont la direction est invariable par rapport à Σ .

3. Considérons maintenant le système D_c des forces centrifuges ou forces d'inertie d'entraînement.

Ces forces ne dépendent que du mouvement d'entraînement et de la position à l'instant t considéré de S par rapport à Σ . On peut donc, pour effectuer la réduction, substituer à S un solide fictif obtenu en imaginant que les diverses molécules de S conservent par rapport à Σ les positions qu'elles ont effectivement à l'instant t et appliquer les résultats du n° 1.

En particulier, la résultante de translation des forces centrifuges est égale à la force centrifuge de la masse entière de S concentrée en son centre de gravité.

4. Il nous reste à étudier le système D_c des forces centrifuges composées ou forces d'inertie complémentaires.

Pour cela, considérons des axes Ox, Oy, Oz fixes par rapport à Σ . Soit M une molécule de S , de masse m , de coordonnées x, y, z ; les projections de la force de Coriolis de cette molécule sont :

$$(1) \quad 2m \left(r \frac{dy}{dt} - q \frac{dz}{dt} \right), \quad 2m \left(p \frac{dz}{dt} - r \frac{dx}{dt} \right), \quad 2m \left(q \frac{dx}{dt} - p \frac{dy}{dt} \right),$$

p, q, r désignant les composantes de la rotation instantanée dans le mouvement d'entraînement.

En ajoutant les expressions analogues correspondant aux diverses molécules de S , on voit d'abord que la résultante de trans-

lation de D_c est égale à la force centrifuge composée de la masse entière de S concentrée au centre de gravité, ce qu'on aurait pu voir aussi en rapprochant les uns des autres les résultats précédents.

Par le centre de gravité G menons les axes Gx' , Gy' , Gz' , parallèles à Ox , Oy , Oz . Soient α, β, γ les projections de la vitesse de G par rapport à Σ et x', y', z' les coordonnées de M dans le nouveau système. Les expressions (1) de la force centrifuge composée de ce point peuvent s'écrire

$${}_2m \left(r \frac{dy'}{dt} - q \frac{dz'}{dt} \right) + {}_2m (r\beta - q\gamma), \dots$$

Le moment de cette force par rapport à Gx' est donné par une formule bien connue; en ajoutant les expressions analogues, les termes contenant α, β, γ disparaissent et il reste pour le moment résultant par rapport à Gx'

$$(2) \quad \lambda = - {}_2p \sum m \left(y' \frac{dy'}{dt} + z' \frac{dz'}{dt} \right) + {}_2q \sum m y' \frac{dx'}{dt} + {}_2r \sum m z' \frac{dx'}{dt},$$

la sommation étant étendue à toutes les molécules de S .

On peut écrire

$$(3) \quad \begin{cases} {}_2y' \frac{dx'}{dt} = \frac{d}{dt} (x'y') + y' \frac{dx'}{dt} - x' \frac{dy'}{dt}, \\ {}_2z' \frac{dx'}{dt} = \frac{d}{dt} (z'x') + z' \frac{dx'}{dt} - x' \frac{dz'}{dt}. \end{cases}$$

Désignant par A, B, C les moments d'inertie de S par rapport à Gx', Gy', Gz' ; par D, E, F les produits d'inertie relatifs aux plans coordonnées se croisant suivant ces axes, on a

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt} \sum m (y'^2 + x'^2) \\ \quad = {}_2 \sum m \left(y' \frac{dy'}{dt} + z' \frac{dz'}{dt} \right), & \frac{dB}{dt} = \dots, & \frac{dC}{dt} = \dots, \\ \frac{dD}{dt} = \frac{d}{dt} \sum m y' z' = \sum m \frac{d}{dt} (y' z'), & \frac{dE}{dt} = \dots, & \frac{dF}{dt} = \dots \end{cases}$$

Posons

$$(5) \quad {}_2\mathfrak{C} = \frac{dA}{dt} p^2 + \frac{dB}{dt} q^2 + \frac{dC}{dt} r^2 - {}_2 \frac{dD}{dt} qr - {}_2 \frac{dE}{dt} rp - {}_2 \frac{dF}{dt} pq$$

et désignons par f , g , h les projections sur les axes du moment résultant par rapport à G des quantités de mouvement par rapport à $Gx'y'z'$

$$(6) \quad \begin{cases} f = \sum m \left(y' \frac{dz'}{dt} - z' \frac{dy'}{dt} \right), & g = \sum m \left(z' \frac{dx'}{dt} - x' \frac{dz'}{dt} \right), \\ h = \sum m \left(x' \frac{dy'}{dt} - y' \frac{dx'}{dt} \right). \end{cases}$$

On a ainsi, pour le moment résultant cherché du dynamisme D_c , les projections suivantes sur Gx' , Gy' , Gz'

$$(7) \quad \lambda = -\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial p} - qh + rg, \quad \mu = -\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial q} - rf + ph, \quad \nu = -\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial r} - pg + qf.$$

5. Dans le cas où S est un solide, on peut transformer les expressions trouvées pour λ, μ, ν , en introduisant les projections P, Q, R sur Ox, Oy, Oz de la rotation instantanée dans le mouvement de S par rapport à Σ . On a, en effet,

$$\frac{dx'}{dt} = Qz' - Ry', \quad \frac{dy'}{dt} = Rx' - Pz', \quad \frac{dz'}{dt} = Py' - Qx',$$

et, en portant ces valeurs dans les expressions telles que (2), il vient, tous calculs faits,

$$(8) \quad \begin{cases} \lambda = +2p(QE - RF) \\ \quad + q[2QD - R(A + C - B)] + r[Q(A + B - C) - 2RD], \\ \mu = p[R(B + C - A) - 2PE] \\ \quad + 2q(RF - PD) + r[2RE - P(B + A - C)], \\ \nu = p[2PF - Q(C + B - A)] \\ \quad + q[P(C + A - B) - 2QF] + 2r(PD - QE). \end{cases}$$

Nous poserons

$$(9) \quad 2I = A + B + C,$$

I représente le moment d'inertie de S relatif à G , c'est donc un invariant vis-à-vis de toute transformation d'axes rectangulaires, on le démontre d'ailleurs en géométrie analytique. Les formules (8) donnent alors

$$\lambda = 2Q(Ir + Ep + Dq - Cr) - 2R(Iq + Fp - Bq + Dr), \quad \dots$$

En écrivant

$$2\Theta = I(p^2 + q^2 + r^2) - (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Dqr - 2Erp - 2Fpq),$$

on voit que

$$(10) \quad \begin{cases} \lambda = 2 \left(Q \frac{\partial \Theta}{\partial r} - R \frac{\partial \Theta}{\partial q} \right), \\ \mu = 2 \left(R \frac{\partial \Theta}{\partial p} - P \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right), \\ \nu = 2 \left(P \frac{\partial \Theta}{\partial q} - Q \frac{\partial \Theta}{\partial p} \right). \end{cases}$$

Considérons le vecteur $G\gamma$ ayant pour projections $\frac{\partial \Theta}{\partial p}, \frac{\partial \Theta}{\partial q}, \frac{\partial \Theta}{\partial r}$; λ, μ, ν sont les projections du double de la vitesse de l'extrémité γ de ce vecteur tournant autour d'un axe passant par G ; la vitesse de rotation ayant pour projections P, Q, R , c'est précisément la vitesse de rotation de S par rapport aux axes $Gx'y'z'$ (vitesse de rotation dans le mouvement relatif).

Le vecteur $G\gamma$ se construit avec la vitesse de rotation p, q, r correspondant au mouvement d'entraînement et la quadrique

$$(11) \quad I(x^2 + y^2 + z^2) - (Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dyz - 2Ezx - 2Fxy) = 1,$$

comme le moment résultant des quantités de mouvement se construit dans la théorie de Poinsot à l'aide de l'ellipsoïde d'inertie ordinaire et de la vitesse instantanée de rotation.

Cette quadrique (11) n'est autre qu'un ellipsoïde lieu des points M obtenus en portant sur chaque axe passant par G une longueur GM égale à l'inverse de la racine carrée du moment d'inertie de S par rapport au plan perpendiculaire à cet axe mené par G .

6. L'intérêt des réductions précédentes apparaît quand on étudie le mouvement d'une machine par rapport au sol, que nous prendrons comme système Σ_1 .

Nous distinguerons dans la machine la pièce solide la plus importante (par exemple la coque pour un navire, le fuselage pour un aéroplane, etc.); nous admettrons qu'on peut la regarder avec une approximation suffisante comme absolument rigide; Σ sera invariablement lié à cette pièce. Le reste de la machine (moteur,

transmissions, roues ou hélices motrices, organes de direction) constitue (avec les passagers) le système S.

Appelons S' la pièce rigide principale envisagée comme système matériel; d'après le principe de d'Alembert appliqué à l'ensemble formé par S et S', on peut affirmer que l'ensemble des forces absolues d'inertie et des forces extérieures ordinaires appliquées à cet ensemble est géométriquement équivalent à zéro (c'est-à-dire que sa résultante de translation et son moment résultant, par rapport à un point quelconque, sont nuls).

Nous classerons les forces ordinaires extérieures à S et S' en forces de contact, telles que réactions de solides, poussées exercées par l'eau ou par l'air, et forces de profondeur. Nous admettons, ce qui est en général une approximation suffisante, que les forces de profondeur se réduisent aux poids des pièces mobiles. Elles sont alors géométriquement équivalentes au poids total du système, force fictive appliquée au centre de gravité, dont l'intensité et la direction (par rapport à Σ_1) ne varient pas.

Si nous regardons comme connus les mouvements de S par rapport à S' et de S' (ou Σ) par rapport au sol Σ_1 , nous pouvons d'après ce qui précède effectuer *la réduction géométrique des forces de contact*. Elles sont en effet géométriquement équivalentes à l'ensemble formé par une force Φ opposée au poids total et par les dynames ⁽¹⁾ suivants : dynames D_c , D'_c formés de forces respectivement opposées aux forces d'inertie d'entraînement ou forces centrifuges de S et de S'; dymame D_r constitué par les forces respectivement opposées aux forces d'inertie relatives de S; dymame D_e constitué par les forces opposées aux forces centrifuges composées de S.

7. D_r ne dépend à un instant donné que du mouvement de S par rapport à S', ou plus exactement de la distribution des accélérations dans ce mouvement à l'instant considéré; il ne changerait pas si S' était fixé au sol à cet instant. D_c , D'_c , D_e seraient alors équivalents à zéro.

⁽¹⁾ Nous avons cru pouvoir conserver ici le nom de *dymame* pour un système de forces, alors même que ces forces ne sont pas appliquées à un solide; il n'y a aucun inconvénient à cela, puisque nous ne nous occupons que de réductions ou d'équivalences géométriques.

Pour que D_r soit nul aussi, il faut que G soit en repos ou en mouvement uniforme par rapport à Σ , et que le moment résultant Gh_r des quantités de mouvement considéré au n° 2 soit nul. S'il en est ainsi, nous dirons que la machine est bien équilibrée pour l'inertie relative ⁽¹⁾. L'ensemble des forces extérieures de contact est alors, pour la machine fixe, équivalent à la force Φ opposée au poids total du système.

Supposons maintenant S' en mouvement par rapport au sol ; D_e et D'_e ne sont pas en général équivalents à zéro ⁽²⁾.

8. Peut-il arriver que D_e soit géométriquement équivalent à zéro, et cela pour tous les instants et pour tous les mouvements d'entraînement possibles ? Il faut que le centre de gravité G de S ait une vitesse relative nulle et que, quels que soient p, q, r , on ait (n° 4)

$$\lambda = -\frac{dA}{dt}p + \left(\frac{dF}{dt} - h\right)q + \left(\frac{dE}{dt} + g\right)r = 0,$$

$$\mu = \left(\frac{dF}{dt} + h\right)p - \frac{dB}{dt}q + \left(\frac{dD}{dt} - f\right)r = 0,$$

$$\nu = \left(\frac{dE}{dt} - g\right)p + \left(\frac{dD}{dt} + f\right)q - \frac{dC}{dt}r = 0,$$

ce qui donne

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dB}{dt} = \frac{dC}{dt} = \frac{dD}{dt} = \frac{dE}{dt} = \frac{dF}{dt} = 0,$$

$$f = g = h = 0.$$

L'ellipsoïde central d'inertie de S doit donc être invariable de forme et de position (par rapport à S') et le moment résultant (par rapport à G) des quantités de mouvement relatives (n° 2) doit être nul aussi.

⁽¹⁾ Dans une Note intéressante (*Comptes rendus*, 4 décembre 1911), M. Lecornu a montré la possibilité de réaliser cet équilibrage par l'emploi de masses additionnelles convenablement disposées.

⁽²⁾ Ils le sont toutefois lorsque le mouvement de S' par rapport au sol est un mouvement de translation rectiligne et uniforme, D_e est alors équivalent à zéro.

S'il y a translation non uniforme, D_e est encore nul, D_e et D'_e sont géométriquement équivalents à une force unique opposée à la force d'inertie de la masse totale concentrée au centre de gravité et qu'on peut composer avec la force Φ ; leur résultante est géométriquement équivalente aux forces extérieures de contact (On suppose toujours la machine bien équilibrée pour l'inertie relative.)

Quand ces conditions seront réalisées, nous dirons que la machine est *bien équilibrée pour les effets gyroscopiques* ⁽¹⁾; elle l'est alors aussi pour l'inertie relative.

Dans ces conditions ;

1° Les forces extérieures de contact sont géométriquement équivalentes à l'ensemble formé par Φ , D_e , D'_e .

2° La réduction géométrique des forces D_e et D'_e se fait exactement comme dans le cas d'un solide, car le centre de gravité de l'ensemble SS' et l'ellipsoïde central d'inertie de cet ensemble restent invariables par rapport à Σ .

9. Dans la pratique, on a cherché à réaliser d'une façon plus ou moins exacte cet équilibrage des machines mobiles ⁽²⁾. Bien qu'il soit pour ainsi dire impossible d'analyser avec précision les actions extérieures de contact et l'influence que peuvent avoir sur elles les mouvements de la pièce rigide principale et du reste de la machine, il apparaît, comme intuitif et comme fait d'expérience, qu'une distribution défectueuse des masses mobiles entraînerait dans la marche de la machine des trépidations qu'on ne saurait guère corriger par une manœuvre continue des appareils de direction.

En pratique, dans les machines mobiles, le système S' (abstraction faite des passagers et des appareils de direction) comparé à S constitue à peu près un système à liaisons complètes, dont la position dépend d'un seul paramètre θ , angle dont a tourné l'arbre principal ; cette position redevenant la même lorsque θ augmente d'une multiple convenable de 2π .

⁽¹⁾ On peut dire que le dymame D_e est le dymame des effets gyroscopiques. Voici pourquoi : Imaginons un gyroscope S bien centré tournant uniformément par rapport à sa monture (S') autour de son axe de figure. Pour faire tourner la monture uniformément autour d'un axe perpendiculaire à l'axe du gyroscope, axe passant par le centre de gravité supposé commun au gyroscope et à sa monture, on peut appliquer des efforts à la monture, ces efforts étant équivalents au dymame des effets gyroscopiques (il se réduit ici à un couple).

⁽²⁾ Voir, par exemple, pour ce qui concerne les locomotives, BOUSSAT, *Mécanique*, p. 386; pour les navires, FÖRRL, *Vorlesungen über technische Mechanik*, Band IV, p. 153.

Ces auteurs ne tiennent compte toutefois que des forces d'inertie relatives et des conditions du n° 7.

Voir aussi la note de M. Lecornu citée plus haut.

Posant alors $\frac{d\theta}{dt} = \omega$, $\frac{d\omega}{dt} = \omega'$, il est bien facile de voir que les vitesses relatives sont, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnelles à ω , et les accélérations relatives fonctions linéaires et homogènes de ω^2 et de ω' .

Si donc les conditions des n^{os} 7 et 8 ne sont pas réalisées, les coordonnées pluckériennes de D_c (dynamisme des effets gyroscopiques) sont proportionnelles (toutes choses égales d'ailleurs) à ω , et le dynamisme D_r peut être décomposé en deux, l'un dont les coordonnées sont proportionnelles à ω' sera surtout sensible lors de la mise en marche ou de l'arrêt de la machine, l'autre de coordonnées proportionnelles à ω^2 interviendrait lors de la marche normale.

Terminons ces indications rapides en donnant un exemple où l'équilibrage parfait pour les effets gyroscopiques est possible : Toutes les pièces de S sont des roues dont les axes sont fixes par rapport à S' ; de plus, ces roues sont bien centrées, au point de vue mécanique, c'est-à-dire que leur axe de rotation passe par leur centre de gravité et est un axe de révolution de l'ellipsoïde d'inertie relatif à ce point; enfin les roues engrenent les unes avec les autres de façon que les vitesses angulaires de rotation sont proportionnelles à des nombres fixes.

Il est alors manifeste que la fixité (par rapport à S') de l'ellipsoïde d'inertie de S est réalisée. Quant à la condition des moments, il est facile de la traduire analytiquement. Appelons G le moment d'inertie d'une roue, ω sa vitesse angulaire de rotation dans son mouvement par rapport à S' , α, β, γ les cosinus directeurs de son axe (par rapport à un trièdre de coordonnées lié à S'); il faudra

$$\sum G\omega\alpha = 0, \quad \sum G\omega\beta = 0, \quad \sum G\omega\gamma = 0,$$

conditions qu'on pourrait toujours réaliser en ajoutant au besoin une roue nouvelle engrenant avec les précédentes.

SUR LES ÉQUATIONS
DES PETITS MOUVEMENTS DE SURFACE DES FLUIDES PARFAITS;

PAR M. BOULIGAND.

I. — COMMENT SE POSE LE PROBLÈME DES ONDES LIQUIDES ⁽¹⁾.

Proposons-nous de rechercher comment se pose le problème des ondes liquides, en nous bornant à l'étude des petits mouvements d'un fluide parfait.

Soit un liquide incompressible, contenu dans un vase à parois fixes. Ce liquide étant d'abord au repos, provoquons son mouvement par une cause agissant pendant un temps très court. Il y aura un potentiel des vitesses. Prenons pour plan xOy le plan de la surface libre au repos, pour axe Oz la verticale ascendante. Soient u, v, w les composantes de la vitesse de la molécule liquide dont les coordonnées sont x, y, z à l'instant t . Il existe une fonction $\varphi(x, y, z, t)$ telle qu'on ait

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

L'équation de continuité s'écrit alors

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Soit ρ la densité du liquide, p la pression au point xyz . Nous avons

$$(2) \quad \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -z - \frac{p}{\rho},$$

en supposant que, dans le système d'unités adopté, on a pris, pour unité d'accélération, l'accélération g de la pesanteur.

⁽¹⁾ Voir les deux articles de M. HADAMARD, *Sur les ondes liquides* (*Comptes rendus* des 7 et 21 mars 1910).

Montrons alors que, si l'on connaît la forme de la surface libre à chaque instant, on peut en déduire le mouvement intérieur du fluide.

En effet prenons pour inconnue la dérivée ψ par rapport au temps du potentiel des vitesses. ψ est aussi une fonction harmonique

$$(3) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0.$$

Cherchons la valeur de ψ sur la surface libre (S) du liquide. En négligeant les carrés des vitesses, l'équation (2) nous donnera

$$\psi = -z - \frac{p}{\rho}.$$

Sur la surface (S), la pression est constante : rien n'empêche de la supposer nulle, l'action d'une pression constante s'exerçant en tous les points d'un fluide n'ayant aucune influence sur ses mouvements. Nous pouvons donc écrire

$$(4) \quad \psi_S = -z.$$

D'autre part, les points situés sur la paroi mouillée Σ sont animés de vitesses tangentes à cette paroi. Nous avons donc constamment

$$\left(\frac{d\varphi}{dn} \right)_{\Sigma} = 0,$$

et par suite

$$(5) \quad \left(\frac{d\psi}{dn} \right)_{\Sigma} = 0.$$

Donc, la surface libre une fois connue à chaque instant, nous pourrions déterminer la fonction ψ comme solution d'un problème mixte dont les données sont l'équation indéfinie (3) et les conditions aux limites (4) et (5).

Pratiquement, nous pouvons regarder un tel problème comme résolu si nous connaissons la fonction de Green correspondante $g(M, P)$. Soit r la distance MP . Par définition $g(M, P)$ est une fonction harmonique des coordonnées du point M . En outre, elle devient infinie en P comme $\frac{1}{r}$, elle s'annule sur la surface libre (S) et sa dérivée normale s'annule sur la paroi mouillée (Σ).

Si nous considérons les dénivellations de la surface libre comme infiniment petites et du premier ordre, les variations de cette fonction de Green sont aussi infiniment petites et du premier ordre (comme le montre la formule donnée par M. Hadamard pour calculer la variation de la fonction de Green).

Or calculons la fonction ψ : pour cela entourons le point P d'une sphère s de très petit rayon : en considérant toutes les dérivées normales comme prises suivant la normale intérieure, nous avons

$$\int \int_s \left(\psi \frac{dG}{dn} - G \frac{d\psi}{dn} \right) dS + \int \int_{\Sigma} = \int \int_s,$$

les trois intégrales portant sur le même élément. En remarquant que le second membre est indépendant du rayon de s et en faisant tendre ce dernier vers zéro, nous avons

$$(6) \quad \psi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \int \int_s \psi_s \frac{dG}{dn} dS = - \frac{1}{4\pi} \int \int_{\Sigma} z_M \frac{dG}{dn} dS_M.$$

De ce qui précède il résulte que la partie principale de $\psi(x, y, z, t)$ peut s'obtenir en remplaçant G par la fonction de Green G_1 du volume V délimité par (Σ) et le plan de la surface libre au repos, et en remplaçant aussi l'élément de la surface liquide par sa projection sur ce plan. Nous remplaçons ainsi la recherche de ψ par celle d'une fonction remplissant la même équation indéfinie (3) et les mêmes conditions aux limites (4) et (5), sous cette réserve que la condition (5) est portée non plus par la surface mobile de liquide, mais bien par le plan fixe $z = 0$ (nous l'appellerons dans la suite le plan S).

Soient M un point du plan S, P un point intérieur au fluide, P' son symétrique par rapport au plan S. Soit d'autre part $\gamma(M, P)$ la fonction de Neumann relative au volume V_1 , limité par la surface (Σ) et sa symétrique par rapport au plan S. [Nous supposons, dans ce qui suivra, que, en tous les points de la courbe (C) d'intersection de (Σ) et du plan (S), les plans tangents à Σ sont verticaux, de la sorte V_1 sera supposé limité par une surface qui n'offre pas de points anguleux.] Nous avons évidemment

$$G_1(M, P) = \gamma(M, P) - \gamma(M, P').$$

Nous désignerons par ξ, η, ζ les coordonnées de M (ici $\zeta = 0$) et par x, y, z celles de P.

L'équation (6) peut s'écrire, après ce que nous avons dit,

$$\psi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \int_S z_M \frac{\partial \zeta_1}{\partial \zeta_{\zeta=0}} dS_M.$$

D'ailleurs

$$\zeta_1(\xi, \eta, 0, x, y, z) = \gamma(\xi, \eta, 0, x, y, z) - \gamma(\xi, \eta, 0, x, y, -z);$$

en outre la symétrie du volume V_1 nous permet d'écrire

$$\gamma(\xi, \eta, \zeta, x, y, z) \equiv \gamma(\xi, \eta, -\zeta, x, y, -z);$$

d'où, en dérivant par rapport à ζ et en faisant $\zeta = 0$,

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \zeta}(\xi, \eta, 0, x, y, z) + \frac{\partial \gamma}{\partial \zeta}(\xi, \eta, 0, x, y, -z) = 0.$$

Nous en concluons

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial \zeta_{\zeta=0}} = 2 \frac{\partial \gamma}{\partial \zeta_{\zeta=0}},$$

donc

$$\psi(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_S z_M \frac{\partial \gamma}{\partial \zeta_{\zeta=0}} dS_M.$$

Cherchons à exprimer que le point P se trouve sur la surface libre : s'il en est ainsi sa cote z est une fonction de x, y, t et nous avons

$$w = \frac{\partial z}{\partial t} + u \frac{\partial z}{\partial x} + v \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Conformément à l'hypothèse de petits mouvements, négligeons les produits $u \frac{\partial z}{\partial x}$ et $v \frac{\partial z}{\partial y}$. Nous avons

$$w = \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

ou, en dérivant par rapport au temps,

$$(7) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

ψ au voisinage du plan S se comporte comme un potentiel de double couche. Donc sa dérivée normale $\frac{\partial}{\partial z}$ est continue pour $z = 0$.

Nous avons d'ailleurs

$$\gamma(M, P) = \frac{1}{MP} + H(M, P),$$

$H(M, P)$ étant une fonction analytique et holomorphe des deux points M et P, même lorsque ceux-ci sont confondus, avec cette restriction que M et P ne s'approchent pas simultanément de la courbe (C). Par suite

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{1}{r} + \frac{\partial H}{\partial \zeta} = - \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} + \frac{\partial H}{\partial \zeta}.$$

Donc, en tout point P intérieur au fluide, nous avons

$$2\pi \frac{\partial \psi}{\partial z} = - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int \int_S \frac{z_M}{r} dS_M + \int \int_S z_M \frac{\partial^2 H}{\partial z \partial \zeta} dS_M$$

ou encore

$$2\pi \frac{\partial \psi}{\partial z} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \int \int_S \frac{z_M}{r} dS_M + \int \int_S z_M \frac{\partial^2 H}{\partial z \partial \zeta} dS_M.$$

En exprimant la condition (7) nous voyons que la cote z d'un point de la surface liquide vérifie (au bénéfice de nos approximations) l'équation intégrro-différentielle linéaire

$$(8) \quad 2\pi \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \int \int_S \frac{z_M}{r} dS_M + \int \int_S z_M \frac{\partial^2 H}{\partial z \partial \zeta_{(z=\zeta_0)}} dS_M.$$

Nous l'écrirons sous forme plus condensée

$$(9) \quad 2\pi \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \Delta \int \int_S \frac{z_M}{MP} dS_M + \int \int_S z_M F(M, P) dS_M,$$

en posant

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

et

$$F(M, P) = \frac{\partial^2 H(M, P)}{\partial z \partial \zeta_{z=\zeta_0}}.$$

Remarques. — I. Dans le calcul précédent, z a joué deux rôles

bien distincts, celui d'une variable indépendante (cote d'un point quelconque à l'intérieur du liquide) et celui d'une fonction de x, y, t (cote d'un point de la surface libre). Le véritable sens à donner à z dans chaque cas est trop apparent pour qu'il soit utile d'insister.

II. L'équation (9) a pour conséquence immédiate

$$(10) \quad \int \int \frac{\partial^2 z_M}{\partial t^2} dS_M = 0,$$

car si nous désignons par $2\pi \frac{\partial \Psi}{\partial z}$ ce que devient son deuxième membre quand on y remplace le point $P(z=0)$ de la surface libre par un point $P(z \text{ quelconque})$ intérieur au volume V , il existe une fonction harmonique Ψ_P dans ce volume qui coïncide avec la fonction ψ précédemment définie. L'équation (9) peut alors s'écrire

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial \Psi}{\partial z_{z=0}},$$

le deuxième membre n'est autre que la dérivée normale de Ψ le long du plan S .

La dérivée normale de Ψ sur (Σ) étant nulle, et la fonction Ψ étant régulière dans V , nous devons avoir, quelle que soit la solution z considérée,

$$\int \int_S \frac{\partial \Psi_M}{\partial z_{z=0}} dS_M = 0,$$

ce qui nous conduit immédiatement à (10). Intégrons l'équation (10). Elle donne

$$\int \int_S \frac{\partial z_M}{\partial t} dS_M = a,$$

a étant une constante. Cette constante est nulle, car l'équation (9) admet, quel que soit t , la solution $\frac{\partial z}{\partial t} = 0$, $z = \text{const.}$ (cette dernière constante étant nulle lorsque le plan xOy est le plan de la surface libre au repos). Le fait que l'équation (9) admet cette solution conduit à l'identité suivante, qui nous sera utile dans la

suite :

$$\Delta \int \int_S \frac{dS_M}{MP} + \int \int_S F(M, P) dS_M = 0,$$

laquelle exprime que la fonction harmonique, évidemment constante sur S et dont la dérivée normale est nulle sur Σ , a une dérivée nulle par rapport à z .

II. — FLUIDE INDÉFINI. ÉQUATION DE CAUCHY.

Nous supposons que le mouvement s'éteint en tout point à l'infini.

Il suffit alors de prendre

$$\gamma(M, P) = \frac{1}{r} = \frac{1}{MP},$$

et l'équation (9) se réduit à

$$(11) \quad 2\pi \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \Delta \int \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z_M}{MP} dS_M.$$

Or, Cauchy, dans son *Mémoire sur la Théorie des ondes*, avait formé une équation aux dérivées partielles à laquelle satisfait la fonction $z(x, y, t)$.

On peut retrouver cette équation comme suit ⁽¹⁾ : rappelons-nous qu'à la surface libre nous avons

$$\begin{aligned} w &= \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \\ -z(x, y, t) &= \frac{\partial \varphi}{\partial t_{z=0}}. \end{aligned}$$

Ceci nous conduit à la condition suivante, pour les points de la surface. Soit $\tau(x, y, z, t)$ la fonction harmonique déterminée par

$$\tau = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

Elle est nulle pour $z = 0$, c'est-à-dire sur la surface libre. Elle

⁽¹⁾ Cette méthode est due à M. Boussinesq (*Applic. des potentiels*, etc., § IV, p. 578).

est nulle à l'infini, le potentiel des vitesses et ses dérivées devant s'éteindre pour des points très éloignés. Donc, elle est nulle dans toute la masse du liquide. Nous en déduisons évidemment

$$-\frac{\partial \tau}{\partial z} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0,$$

ou, en comparant à l'équation (1),

$$(12) \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0;$$

par suite, en dérivant par rapport au temps et en remplaçant dans ψ la variable indépendante z par zéro, il viendra

$$(13) \quad \frac{\partial^4 z}{\partial t^4} + \Delta z = 0.$$

C'est ce que nous appellerons l'équation de Cauchy.

Nous sommes alors amenés à nous poser avec M. Hadamard la question suivante : de l'équation (11) pouvons-nous déduire analytiquement l'équation (13)? Nous allons, dès maintenant, montrer que la chose est possible. Nous retrouverons d'ailleurs ce résultat comme conséquence de l'étude d'un liquide contenu dans un vase de forme quelconque.

Écrivons l'équation (11) sous la forme

$$(11 \text{ bis}) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{1}{2\pi} \Delta \int \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z(\xi, \eta, t)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} d\xi d\eta.$$

Introduisons une variable auxiliaire indépendante z et posons

$$\psi(x, y, z, t) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z(\xi, \eta, t)}{\sqrt{z^2 + (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} d\xi d\eta$$

(ici encore la distinction entre z fonction et z variable indépendante s'aperçoit immédiatement). Calculons ψ : nous reconnaissons qu'il n'est autre que la fonction harmonique de x, y, z qui s'annule à l'infini et prend sur le plan $z=0$ les valeurs $-z(x, y, t)$,

$$\psi(x, y, 0, t) = -z(x, y, t).$$

D'autre part, l'équation (11 bis) s'écrit

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial \psi}{\partial z_{z=0}}.$$

Donc en posant

$$\theta = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

θ est une fonction harmonique qui s'annule à la surface libre et à l'infini; donc elle est identiquement nulle. Faisons la combinaison

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0;$$

en vertu de l'équation (3), il vient

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial t^4} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0;$$

en annulant la variable indépendante z , nous trouvons bien l'équation (13). D'ailleurs, ce calcul ayant nécessité une différentiation, l'équation (13) est certainement plus générale que l'équation (11).

Elle admet, comme l'a remarqué M. Hadamard, une foule de solutions étrangères au problème. Tel est tout d'abord le cas de celles qu'on obtient en changeant le signe de l'un des membres de l'équation (11). Mais il y en a une infinité d'autres, puisque dans (13) nous pouvons nous donner arbitrairement z et ses trois dérivées premières par rapport à t pour $t = 0$. Au contraire, pour l'équation (11), la donnée de z et $\frac{\partial z}{\partial t}$ nous permettra de calculer $\frac{\partial^2 z}{\partial z^2}$ et $\frac{\partial^3 z}{\partial t^3}$. En somme, l'équation (11) est véritablement celle du problème. On achèvera de le déterminer en se donnant z et $\frac{\partial z}{\partial t}$ pour $t = 0$, c'est-à-dire la forme initiale de la surface et les vitesses de ses différents points. Dans l'hypothèse où le plan xOy est celui de la surface libre au repos, nous devons d'ailleurs supposer, afin de donner au problème un sens certain, que les deux intégrales $\int \int_{-\infty}^{+\infty} z_M dS_M$ et $\int \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_M dS_M$ (dont l'élément est connu à l'instant initial) sont absolument convergentes et ont pour valeur commune zéro.

Nous sommes alors amenés à nous demander si cette équation de Cauchy est susceptible de se généraliser pour un liquide contenu dans un vase de forme quelconque. Mais avant d'aborder ce problème, nous allons démontrer quelques théorèmes d'Analyse qui nous seront très utiles.

III. — QUELQUES THÉORÈMES ET FORMULES D'ANALYSE.

Soit une fonction symétrique $\varphi(M, P)$ des deux points M et P , régulière dans l'aire S et telle que

$$(x) \quad \Delta_P \varphi(M, P) \equiv \Delta_M \varphi(M, P).$$

Soit aussi $U(M)$ une fonction régulière dans l'aire S et munie de dérivées jusqu'au deuxième ordre inclus. La formule de Green nous donne immédiatement

$$(14) \quad \Delta \int_S U(M) \varphi(M, P) dS_M \\ = \int_S \Delta U(M) \varphi(M, P) dS_M + \int_S \left[\varphi(P, C) \frac{dU}{dn} - U \frac{d\varphi}{dn}(P, C) \right] ds.$$

Cette formule se généralise au cas où $\varphi(M, P)$ n'est plus régulière, mais possède quand M tend vers P une singularité de la forme $\frac{1}{MP}$.

Il suffit, pour le voir, de démontrer que

$$(15) \quad \Delta \int_S \frac{U(M)}{MP} dS_M \\ = \int_S \Delta \frac{U(M)}{MP} dS_M + \int_C \left(\frac{1}{PC} \frac{dU}{dn} - U \frac{d}{dn} \frac{1}{PC} \right) ds.$$

Cette formule s'établit sans difficulté par différentiation directe après avoir posé

$$(16) \quad \xi - x = u, \quad \eta - y = v.$$

De la sorte, les variables x et y n'entrent plus en dénominateur et l'on peut appliquer la règle habituelle (en faisant en sorte de ne pas omettre les termes provenant de la mobilité du contour).

Dans l'équation (14) nous pouvons donc considérer la fonction $\varphi(M, P)$ comme munie d'une singularité de la forme $\frac{1}{MP}$.

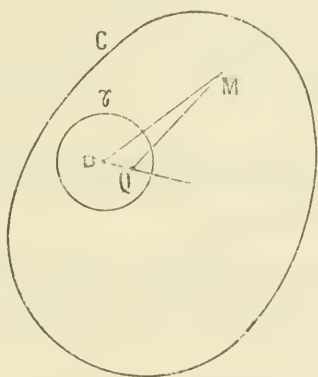
THÉOREME. — Soient une aire limitée par un contour C , P et Q deux points intérieurs à cette aire. On a

$$(17) \quad \int \int_S \frac{dS_M}{MP \cdot MQ} = 2\pi \log \frac{1}{PQ} + R(P, Q),$$

la fonction $R(P, Q)$ étant une fonction régulière ⁽¹⁾.

Tout d'abord cette intégrale est finie tant que les points P et Q

Fig. 1.



sont distincts. De plus, elle ne change pas quand on réduit toutes les dimensions de la figure formée par le contour et les deux points fixes dans un rapport donné quelconque. Soit donc P un point intérieur au contour C . Décrivons de P comme centre un cercle de rayon $\lambda \neq 0$, intérieur au contour C . Soit (γ) ce cercle. Si Q est extérieur à (γ) , l'intégrale est finie. Supposons que Q soit intérieur à (γ) et puisse se rapprocher indéfiniment du point P . La partie de l'intégrale relative au domaine (C, γ) est régulière. C'est dire que notre intégrale aura les mêmes singularités que si elle était étendue à un cercle ayant pour centre le point P . Calculons-la pour un tel cercle en prenant pour pôle le point P et pour axe polaire la droite PQ . Elle s'écrira

$$\int \int_{(\gamma)} \frac{d\rho \, d\omega}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho c \cos \omega + c^2}},$$

⁽¹⁾ Voir FRECHET et HEYWOOD, *L'équation de Fredholm et ses applications à la Physique mathématique*; Note de M. HADAMARD, *Sur l'itération des noyaux infinis*.

en désignant par c la longueur PQ, ou encore

$$\int_0^{2\pi} d\omega \int_0^\lambda \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho c \cos \omega + c^2}}.$$

Il nous faut intégrer par rapport à ω entre 0 et 2π la quantité

$$\text{Log} \left[\frac{\lambda - c \cos \omega + \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda c \cos \omega + c^2}}{c(1 - \cos \omega)} \right],$$

ce qui donnera

$$2\pi \text{Log} \frac{\lambda}{c} + \int_0^{2\pi} \text{Log} \left[\frac{1 - \frac{c}{\lambda} \cos \omega + \sqrt{1 - 2\frac{c}{\lambda} \cos \omega + \frac{c^2}{\lambda^2}}}{1 - \cos \omega} \right] d\omega.$$

Le deuxième terme est une fonction holomorphe de $\frac{c}{\lambda}$ pour $c = 0$, ce qui démontre le théorème.

Remarque. — Soient Q et Q' deux points intérieurs à (γ) , c et c' leurs distances au point P. Considérons l'intégrale

$$\iint_{(\gamma)} \left(\frac{1}{\overline{\text{MP}} \overline{\text{MQ}}} - \frac{1}{\overline{\text{MP}} \overline{\text{MQ}'}} \right) dS_M;$$

sa valeur est, d'après ce qui précède,

$$2\pi \text{Log} \frac{c'}{c} + \int_0^{2\pi} \text{Log} \left[\frac{1 - \frac{c}{\lambda} \cos \omega + \sqrt{1 - 2\frac{c}{\lambda} \cos \omega + \frac{c^2}{\lambda^2}}}{1 - \frac{c'}{\lambda} \cos \omega + \sqrt{1 - 2\frac{c'}{\lambda} \cos \omega + \frac{c'^2}{\lambda^2}}} \right] d\omega.$$

Faisons abstraction du contour C et faisons croître λ indéfiniment. Le deuxième terme tend vers zéro. Donc l'intégrale précédente étendue à tout le plan a pour valeur

$$2\pi \text{Log} \frac{\text{PQ}'}{\text{PQ}}.$$

IV. — FORMATION DE L'ÉQUATION DE SURFACE POUR UN VASE HÉMISPHERIQUE.

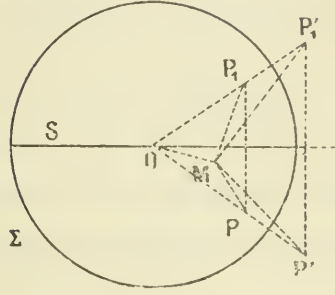
Pour le volume V, limité par la sphère tout entière, la fonction $\gamma(M, P)$ a pour expression

$$\frac{1}{r} + \frac{R}{\rho} \frac{1}{r'} + \frac{1}{R} \log \frac{2R^2 \tan \frac{\psi}{2}}{\rho \delta \sin \gamma},$$

en désignant par P' le conjugué de P , et en posant

$$\begin{aligned} OM = \rho, \quad OP = \delta, \quad MP = r, \quad MP' = r', \\ \widehat{MOP} = \gamma, \quad \widehat{MP'O} = \psi. \end{aligned}$$

Fig. 2.



Soient P_1 et P'_1 les symétriques de P et de P' par rapport au plan S .

Nous posons

$$MP_1 = r_1, \quad MP'_1 = r'_1, \quad \widehat{MOP_1} = \gamma_1, \quad \widehat{MP'_1O} = \psi_1.$$

Nous aurons

$$G(M, P) = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} + \frac{R}{\delta} \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r'_1} \right) + \frac{1}{R} \log \frac{\tan \frac{\psi}{2} \sin \gamma_1}{\tan \frac{\psi_1}{2} \sin \gamma}.$$

Les deux triangles OMP' et OMP'_1 nous donnent d'ailleurs

$$\sin \gamma = \frac{r' \sin \psi}{\rho}, \quad \sin \gamma_1 = \frac{r'_1 \sin \psi_1}{\rho},$$

d'où

$$\frac{\tan \frac{\psi}{2} \sin \gamma_1}{\tan \frac{\psi_1}{2} \sin \gamma} = \frac{r'_1 \cos^2 \frac{\psi_1}{2}}{r' \cos^2 \frac{\psi}{2}}.$$

Les mêmes triangles nous donnent

$$\begin{aligned} \rho^2 &= \left(\frac{R^2}{\delta} + r' \right)^2 - 4 \frac{R^2}{\delta} r' \cos^2 \frac{\psi}{2}, \\ \rho^2 &= \left(\frac{R^2}{\delta} + r'_1 \right)^2 - 4 \frac{R^2}{\delta} r'_1 \cos^2 \frac{\psi_1}{2}; \end{aligned}$$

d'où nous déduisons

$$\frac{r'_1 \cos^2 \frac{\psi_1}{2}}{r' \cos^2 \frac{\psi}{2}} = \frac{\left(\frac{R^2}{\delta} + r'_1 \right)^2 - \rho^2}{\left(\frac{R^2}{\delta} + r' \right)^2 - \rho^2}.$$

Finalement,

$$G(M, P) = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} + \frac{R}{\delta} \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r'_1} \right) + \frac{1}{R} \log \frac{\left(\frac{R}{\delta} + \frac{r'_1}{R} \right)^2 - \frac{\rho^2}{R^2}}{\left(\frac{R}{\delta} + \frac{r'}{R} \right)^2 - \frac{\rho^2}{R^2}}.$$

$G(M, P)$ est de la forme $\Gamma(M, P) - \Gamma(M, P_1)$ en posant

$$\Gamma(M, P) = \frac{1}{r} + \frac{R}{\delta} \frac{1}{r'} - \frac{1}{R} \log \left[\left(\frac{R}{\delta} + \frac{r'_1}{R} \right)^2 - \frac{\rho^2}{R^2} \right] = \frac{1}{r} + U(M, P).$$

Occupons-nous de $U(M, P)$. Il nous faut prendre $\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \zeta}$ pour $\zeta = z = 0$. Remarquons immédiatement que

$$\frac{\partial \rho}{\partial \zeta \zeta=0} = 0.$$

D'autre part,

$$r' = \sqrt{\left(\frac{R^2}{\delta^2} x - \xi \right)^2 + \left(\frac{R^2}{\delta^2} y - \eta \right)^2 + \left(\frac{R^2}{\delta^2} z - \zeta \right)^2};$$

par suite,

$$\left(\frac{\partial r'}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=0} = - \frac{R^2 z}{\delta^2 r'}.$$

Nous trouvons ainsi :

$$\frac{\partial U}{\partial \zeta \zeta=0} = \frac{R}{\delta} \frac{z}{r'} \left[\frac{R^2}{\delta^2} \frac{1}{r'^2} + 2 \frac{R^2 + \delta r'}{(R^2 + \delta r')^2 - \rho^2 \delta^2} \right].$$

Il reste à dériver par rapport à z et à prendre la valeur de cette dérivée pour $z = 0$. Remarquons pour cela que

$$\frac{\partial \delta}{\partial z z=0} = 0.$$

Grâce à ce fait, on constate aisément que $\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \zeta}$ pour $z = \zeta = 0$ se réduit à

$$(18) \quad \Gamma(M, P) = \frac{R}{\delta r'} \left[\frac{R^2}{\delta^2 r'^2} + 2 \frac{R^2 + \delta r'}{(R^2 + \delta r')^2 - \rho^2 \delta^2} \right].$$

Somme toute $U(M, P)$ joue ici par rapport à $G(M, P)$ le même rôle que la fonction $H(M, P)$ de la première section. L'équation de surface est donc précisément l'équation (9) où $F(M, P)$ doit être remplacée par la valeur donnée par (18).

Nous pouvons d'ailleurs écrire

$$F(M, P) = \frac{R^3}{\overline{OP}^3 \cdot \overline{MP}^3} + 2 \frac{R}{\overline{OP} \cdot \overline{MP}'} \frac{R^2 + \overline{OP} \cdot \overline{MP}'}{(R^2 + \overline{OP} \cdot \overline{MP}')^2 - \overline{OM}^2 \cdot \overline{OP}^2}.$$

Traçons le grand cercle C d'intersection du plan (S) et du vase. Marquons les points M et P ainsi que leurs conjugués M' et P' . La considération du point M' montre immédiatement que F est symétrique par rapport aux coordonnées des points M et P . Tout d'abord le produit $\overline{OM} \cdot \overline{OP}$ jouit évidemment de cette propriété. Quant aux deux produits $\overline{OP} \cdot \overline{MP}'$ et $\overline{OM} \cdot \overline{M}'P$, leur égalité est immédiate, eu égard à la similitude des triangles OMP' et OPM' .

Nous remarquerons encore qu'on a, quel que soit le point P ,

$$(19) \quad F(O, P) = F(P, O) = \frac{2}{R^3}.$$

V. — SINGULARITÉS AU VOISINAGE DU CONTOUR (C) .

Les considérations exposées dans la première section nous ont conduit à nous poser le problème des ondes liquides sous la forme suivante :

Considérons un volume V , limité d'une part par une portion de plan (S) et, d'autre part, par une surface (Σ) coupant ce plan à angle droit tout le long du contour (C) . Le plan (S) étant pris pour plan xOy , il s'agit de déterminer la fonction harmonique $\psi(x, y, z, t)$ dans le volume V et la fonction $z(x, y, t)$ dans l'aire (S) , de manière que l'on ait sur (Σ)

$$(5) \quad \frac{d\psi}{dn} = 0,$$

et sur S ,

$$(4) \quad \psi = -z,$$

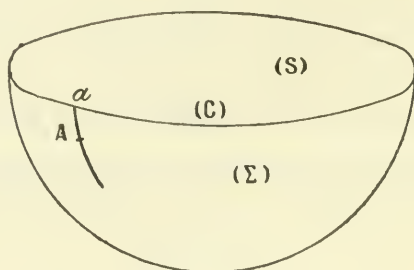
$$(7) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

Si, à un instant donné, $\frac{dz}{dn}$ est nul en tout point de la courbe (C) , il en sera de même de $\frac{d\psi}{dn}$, en vertu de l'équation (4), et grâce aussi à cette circonstance que (Σ) coupe orthogonalement le

plan (S) le long du contour (C). Autrement dit, la condition (5) sera alors remplie non seulement sur la paroi (Σ), mais encore en tout point de la courbe (C).

Au contraire, si $\frac{dz}{dn}$ n'est pas nul sur (C), la condition (5) sera remplie à la paroi (Σ) et non sur la courbe (C). De sorte que

Fig. 3.



lorsqu'on passera d'un point A de (Σ) très voisin de (C) au point (α) de (C) le plus rapproché de A, $\frac{d\psi}{dn}$ passera brusquement d'une valeur nulle à une valeur finie et $\neq 0$. Il s'ensuivra forcément pour les dérivées de ψ dans la direction limite de αA (c'est-à-dire par rapport à z) des singularités dans le voisinage du contour (C).

Je dis que $\frac{\partial\psi}{\partial z}$ calculé en un point P du plan (S) devient logarithmiquement infini quand ce point P tend vers le contour (C). Nous utiliserons pour cela les résultats de la troisième section. Il est à peu près évident qu'à cause de la nature même de ce que nous voulons obtenir, il suffira de vérifier cet énoncé pour une forme particulière de vase.

Nous nous adresserons au vase hémisphérique pour lequel nous avons appris à calculer explicitement $\frac{\partial\psi}{\partial z}$. Nous supposons qu'à l'instant considéré, z et Δz sont finis dans l'aire (S) et sur le contour (C). Nous pouvons alors écrire

$$\begin{aligned} 2\pi \frac{\partial\psi}{\partial z} = & \Delta_P \int_S \frac{z_M}{MP} dS_M + \frac{R^3}{\delta^3} \Delta_{P'} \int_S \frac{z_M}{MP'} dS_M \\ & + 2 \frac{R}{\delta} \int_S \frac{z_M}{r'} \frac{R^2 + \delta r'}{(R^2 + \delta r')^2 - \rho^2 \delta^2} dS_M. \end{aligned}$$

D'après une remarque déjà faite, le deuxième membre doit s'annuler quand on considère z_M comme une constante, ce qui nous

permet d'écrire

$$\frac{2R}{\delta} \int_S \int_s \frac{1}{r'} \frac{R^2 + \delta r'}{(R^2 + \delta r')^2 - \rho^2 \delta^2} dS_M = \int_C \left[\frac{d}{dn_c} \frac{1}{PC} + \frac{R^3}{\delta^3} \frac{d}{dn_c} \frac{1}{P'C} \right] ds.$$

D'autre part, en effectuant les différentiations, nous avons

$$\begin{aligned} 2\pi \frac{\partial \psi}{\partial z} &= \int_S \Delta z_M \left(\frac{1}{r} + \frac{R^3}{\delta^3} \frac{1}{r'} \right) dS_M + \int_C \frac{dz}{dn} \left(\frac{1}{r} + \frac{R^3}{\delta^3} \frac{1}{r'} \right) ds \\ &+ \frac{2R}{\delta} \int_S \int_s \frac{z_M}{r'} \frac{R^2 + \delta r'}{(R^2 + \delta r')^2 - \rho^2 \delta^2} dS_M - \int_C z \left[\frac{d}{dn} \frac{1}{r} + \frac{R^3}{\delta^3} \frac{d}{dn} \frac{1}{r'} \right] ds. \end{aligned}$$

Occupons-nous d'abord de la deuxième ligne. Nous supposons que le point P tende vers un point α du bord (C). Cette seconde ligne peut s'écrire

$$\begin{aligned} \frac{2R}{\delta} \int_S \int_s \frac{z_M - z_\alpha}{r'} \frac{R^2 + \delta r'}{(R^2 + \delta r')^2 - \rho^2 \delta^2} dS_M \\ - \int_C (z - z_\alpha) \left(\frac{d}{dn} \frac{1}{r} + \frac{R^3}{\delta^3} \frac{d}{dn} \frac{1}{r'} \right) ds. \end{aligned}$$

Nous avons

$$(R^2 + \delta r')^2 - \rho^2 \delta^2 = 4 R^2 \delta r' \cos^2 \frac{\psi}{2}.$$

L'intégrale double s'écrit donc

$$\frac{1}{2R\delta^2} \int_S \int_s \frac{z_M - z_\alpha}{r'^2} \frac{dS_M}{\cos^2 \frac{\psi}{2}} (R^2 + \delta r').$$

L'angle ψ étant en valeur absolue $\leq \frac{\pi}{2}$, $\cos^2 \frac{\psi}{2}$ reste compris entre $\frac{1}{2}$ et 1.

L'intégrale double à étudier se présente donc sous la forme

$$I = \int_S \int_s \frac{\varphi(M)}{\overline{MP}^2} dS_M,$$

$\varphi(M)$ étant une fonction régulière dans l'aire S.

Soit α le point de la circonférence vers lequel tendent simultanément P et P'. Prenons pour axe polaire O α ; soient (ρ, ω) les coordonnées d'un point M de l'aire S, (δ', θ) celles du point P'. L'inté-

grale I peut s'écrire

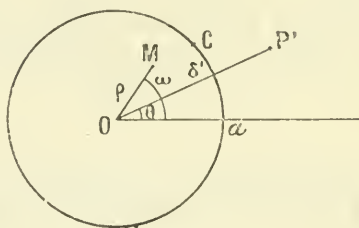
$$I = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(\rho, \omega)}{\delta'^2 - 2\delta'\rho \cos(\omega - \theta) + \rho^2} \rho d\rho d\omega.$$

Considérons l'intégrale

$$V(\rho, P') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(\rho, \omega) (\delta'^2 - \rho^2)}{\delta'^2 - 2\delta'\rho \cos(\omega - \theta) + \rho^2} d\omega;$$

c'est la fonction harmonique régulière du point P' à l'extérieur du

Fig. 4.



cercle de rayon ρ et qui prend sur ce cercle les valeurs $\varphi(\rho, \omega)$. Nous pourrons écrire dès lors

$$I = 2\pi \int_0^R \frac{V(\rho, P')}{\delta'^2 - \rho^2} \rho d\rho,$$

Intégrons par parties : nous aurons

$$I = -\pi V(\rho, P') \text{Log}(\delta'^2 - \rho^2) \Big|_0^R + \pi \int_0^R \text{Log}(\delta'^2 - \rho^2) \frac{\partial V}{\partial \rho}(\rho, P') d\rho.$$

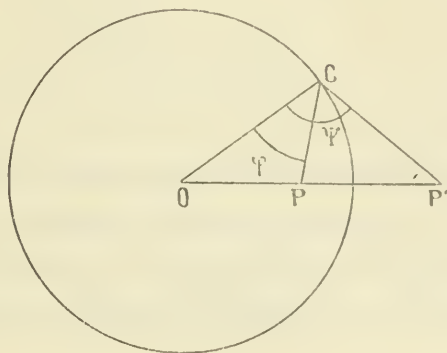
Cette dernière intégrale reste finie. Quant au terme tout intégré, que devient-il lorsque P' tend vers a . Remarquons ici que $\varphi(M)$ contenant $z_M - z_a$ en facteur s'annule au point a . Il s'ensuit $V(R, a) = 0$. Cherchons l'ordre infinitésimal de $V(R, P')$, le point P' étant très voisin de a . Comme nous l'avons déjà vu, $V(R, P')$ est la fonction harmonique à l'extérieur du cercle de rayon R et qui prend sur ce cercle des valeurs telles que

$$(z_c - z_a) \psi_1(c),$$

la fonction ψ_1 étant régulière. Par hypothèse z possède dans l'aire S et sur le contour C des dérivées des deux premiers ordres, il

nous suffit ici de tabler sur l'existence de ces dérivées pour affirmer que les valeurs prises par $V(R, c)$ sur le contour C au voisinage de a sont de l'ordre de ac : les propriétés générales des fonctions harmoniques nous montrent alors que $V(R, P')$, lorsque

Fig. 5.



P' est très voisin de a , est de l'ordre de aP' . Donc les termes tout intégrés restent également finis.

Prenons maintenant l'intégrale curviligne

$$J = \int_C (z - z_a) \left(\frac{d}{dn} \frac{1}{r} + \frac{R^3}{\delta^3} \frac{d}{dn} \frac{1}{r'} \right) ds;$$

nous avons, puisque le point C est sur la circonférence,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dn} \frac{1}{r} + \frac{R^3}{\delta^3} \frac{d}{dn} \frac{1}{r'} &= \frac{1}{PG^2} \left(\cos \varphi + \frac{R}{\delta} \cos \psi \right), \\ \cos \varphi + \frac{R}{\delta} \cos \psi &= \frac{1}{2Rr} \left[R^2 + r^2 - \delta^2 + \frac{R^2}{\delta^2} (\delta^2 + r^2 - R^2) \right]. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} J &= \int_C \frac{z - z_a}{2Rr^3} \left[R^2 - \delta^2 + r^2 - \frac{R^2}{\delta^2} (R^2 - \delta^2 - r^2) \right] ds, \\ J &= \frac{1}{2R\delta^2} \int_C \frac{z - z_a}{r^3} [r^2(\delta^2 + R^2) - (R^2 - \delta^2)^2] ds, \\ &= \frac{R^2 + \delta^2}{2R\delta^2} \int_C \frac{z - z_a}{r} ds - \frac{(R^2 - \delta^2)^2}{2R\delta^2} \int_C \frac{z - z_a}{r^3} ds. \end{aligned}$$

C'est un résultat bien connu dans la théorie du potentiel newtonien (courbes attirantes), que la première des deux intégrales reste finie quand P tend vers a . En effet le potentiel d'une ligne

attirante est logarithmiquement singulier sur cette courbe, sauf aux points où la densité est nulle pour lesquels il est fini. Pour voir comment se comporte la deuxième intégrale, il nous suffit d'étudier

$$(R - \delta)^2 \int_C \frac{z - z_a}{r^3} ds,$$

ou

$$\int_C \frac{z - z_a}{r} \frac{\overline{aP}^2}{r^2} ds;$$

le facteur $\frac{\overline{aP}^2}{r^2}$ étant constamment < 1 , nous sommes amenés à la même conclusion que pour la première intégrale.

Donc la seconde ligne précédemment considérée reste finie.

Quant à la première, son intégrale double est finie quel que soit le point P.

Son intégrale curviligne s'écrit

$$\int_C \frac{dz}{dn} \left(\frac{1}{r} + \frac{R^3}{\delta^3} \frac{1}{r'} \right) ds$$

ou

$$\left(1 + \frac{R^2}{\delta^2} \right) \int_C \frac{dz}{dn} \frac{1}{r} ds;$$

C'est un potentiel newtonien de ligne attirante de densité $\frac{dz}{dn}$: il devient donc logarithmiquement infini aux points où $\frac{dz}{dn}$ est $\neq 0$.

Donc nous arrivons avec M. Hadamard à la conclusion suivante :

Si $\frac{dz}{dn}$ n'est pas nul sur (C), c'est-à-dire si la condition (5) n'est pas remplie sur la frontière (C) de (Σ), la valeur de $\frac{\partial \psi}{\partial z}$ calculée en un point du plan S devient logarithmiquement infinie quand ce point s'approche du contour C. Aux points où $\frac{dz}{dn}$ est nulle, $\frac{\partial \psi}{\partial z}$ reste finie.

Resterait à étudier comment se propagent dans le temps les singularités affectées par $\frac{\partial \psi}{\partial z}$ au voisinage du contour (C), étude rendue très difficile par la nature même de l'équation de surface.

VI. — L'ÉQUATION DU QUATRIÈME ORDRE.

Reprenons l'équation

$$(9) \quad 2\pi \frac{\partial^2 z_P}{\partial t^2} = \Delta \int \int_S \frac{z_M}{MP} dS_M + \int \int_S z_M F(M, P) dS_M.$$

Dans le cas du vase hémisphérique, nous avons montré que, si le point P tend vers le contour (C), $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ est au plus logarithmiquement infini. Admettons-le en général. Il s'ensuit que, si le point P n'est pas sur le contour (C), les expressions

$$\alpha = \Delta \int \int_S 2\pi \frac{\partial^2 z_M}{\partial t^2} \frac{dS_M}{MP},$$

$$\beta = \int \int_S 2\pi \frac{\partial^2 z_M}{\partial t^2} F(M, P) dS_M$$

ont un sens. Nous admettrons qu'en un point P qui n'appartient pas à (C), la somme $\alpha + \beta$ représente, conformément à la règle habituelle de dérivation, la quantité $4\pi^2 \frac{\partial^4 z_P}{\partial t^4}$.

Nous avons, en tenant compte de (9),

$$\alpha = \Delta \int \int_S \frac{\Delta \int \int_S \frac{z_Q}{MQ} dS_Q + \int \int_S z_Q F(Q, M) dS_Q}{MP} dS_M.$$

Ici, des précautions sont nécessaires : nous ne pouvons immédiatement écarter les deux parties du numérateur au risque d'obtenir séparément deux intégrales infinies. Si nous considérons par exemple l'intégrale

$$\int \int_S \Delta \int \int_S \frac{z_Q}{MQ} dS_Q \frac{dS_M}{MP},$$

la formule (15) nous permet de l'écrire

$$\int \int_S \left[\int \int_S \frac{\Delta z_Q}{MQ} dS_Q + \int_C \left(\frac{dz}{dn} \frac{1}{MC} - z \frac{d}{dn} \frac{1}{MC} \right) ds \right] \frac{dS_M}{MP}.$$

Or l'intégrale

$$\int \int_S \frac{1}{MP} \int_C z \frac{d}{dn} \frac{1}{MC} ds dS_M$$

n'a pas de sens, car, lorsque M tend vers (C) , la parenthèse devient infinie comme l'inverse de la distance de M au contour (C) .

L'intégrale

$$\int \int_S \frac{1}{MP} \int \int_S z_Q F(Q, M) dS_Q dS_M$$

serait aussi dépourvue de sens. En réalité, la nature du problème est telle que les éléments infinis de ces deux intégrales se détruisent et que l'expression totale de α a un sens.

Traçons un contour (C') intérieur à (C) , limitant l'aire S' et contenant le point P . Nous pouvons écrire

$$\alpha = \Delta \int \int_{S'} 2\pi \frac{\partial^2 z_M}{\partial t^2} \frac{dS_M}{MP} + \Delta \int \int_{(C, C')} 2\pi \frac{\partial^2 z_M}{\partial t^2} \frac{dS_M}{MP},$$

on peut appliquer la règle ordinaire de dérivation à la seconde intégrale qui tendra vers zéro lorsque (C') tendra vers (C) . Nous pouvons donc considérer α comme la limite de α' défini par

$$\alpha' = \Delta \int \int_{S'} \frac{\Delta \int \int_S \frac{z_Q}{MQ} dS_Q + \int \int_S z_Q F(Q, M) dS_Q}{MP} dS_M;$$

appliquant l'équation (15), nous aurons

$$\alpha' = \Delta \int \int_{S'} \frac{\int \int_S \frac{\Delta z_Q}{MQ} dS_Q + \int_C \left(\frac{dz}{dn} \frac{1}{MC} - z \frac{d}{dn} \frac{1}{MC} \right) ds + \int \int_S z_Q F(Q, M) dS_Q}{MP} dS_M;$$

actuellement, chaque terme donne, pour l'intégrale double sous le Δ , une portion finie.

En changeant l'ordre des intégrations, nous avons

$$\begin{aligned} \alpha' = \Delta \bigg[& \int \int_S \Delta z_Q \int \int_{S'} \frac{dS_M}{MP \cdot MQ} dS_Q \\ & + \int_C \frac{dz}{dn} \int \int_{S'} \frac{dS_M}{MP \cdot MC} ds - \int_C z \frac{d}{dn} \int \int_{S'} \frac{dS_M}{MP \cdot MC} ds \bigg] \\ & + \Delta \int \int_S z_Q \int \int_{S'} \frac{F(Q, M)}{MP} dS_M dS_Q. \end{aligned}$$

Appliquons au crochet la formule de Green dans l'aire comprise entre le contour (C) lui-même et une petite circonférence γ de

centre P et de rayon λ . Nous avons, en vertu de (17),

$$(17') \quad \int \int_S \frac{dS_M}{MP \cdot MQ} = 2\pi \log \frac{1}{PQ} + R'(P, Q),$$

R' étant une fonction régulière qui tendra vers $R(P, Q)$ quand (C') tendra vers (C) . Lorsque λ tend vers zéro, R' donne dans α' un terme qui tend aussi vers zéro, et le terme logarithmique donne naissance au résidu $-4\pi^2 z_P$. Il vient donc

$$\alpha' = -4\pi^2 \Delta z_P + \Delta_P \left\{ \int \int_S z_Q \left[\Delta_Q \int \int_S \frac{dS_M}{MP \cdot MQ} + \int \int_S \frac{F(Q, M)}{MP} dS_M \right] dS_Q \right\};$$

à la limite, quand (C') tend vers (C) , et en remarquant que

$$\Delta_Q \int \int_S \frac{dS_M}{MP \cdot MQ} = \Delta_Q R(P, Q),$$

nous avons

$$\alpha = -4\pi^2 \Delta z_P + \int \int_S z_Q \Delta_P \left[\Delta_Q R(P, Q) + \int \int_S \frac{F(Q, M)}{MP} dS_M \right] dS_Q.$$

Le crochet, dont il faut prendre le Δ_P , est une fonction parfaitement régulière de deux points P et Q quand ceux-ci sont intérieurs à l'aire S. Supposons que le point Q vienne sur le contour C. Notre crochet s'écrit en général

$$\Delta_Q \int \int_S \frac{dS_M}{MP \cdot MQ} + \int \int_S \frac{F(Q, M)}{MP} dS_M.$$

Or nous avons montré pour un vase hémisphérique et admis pour un vase quelconque le résultat suivant : soit $U(M)$ une fonction quelconque mais finie des coordonnées du point M ainsi que son Δ . L'expression

$$\Delta_Q \int \int_S U(M) \frac{dS_M}{MQ} + \int \int_S U(M) F(Q, M) dS_M$$

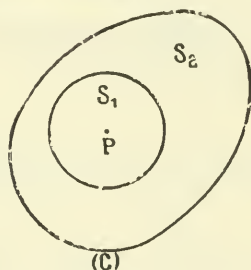
est au plus logarithmiquement infinie quand Q tend vers le contour (C). Si la fonction $\frac{1}{MP}$ était partout finie, il nous suffirait de poser $U(M) = \frac{1}{MP}$ pour voir que notre crochet est aussi logarithmique-

ment infini : en réalité la singularité introduite par le point P ne nous gêne pas : nous pouvons toujours entourer le point P d'un cercle de rayon fini ayant pour centre ce point et intérieur à l'aire S. La partie de notre crochet provenant de l'aire de ce cercle est essentiellement finie. Pour la région comprise entre la circonférence et le contour (C), la fonction $\frac{1}{MP}$ est finie et la remarque précédente s'applique. Nous en concluons que l'intégrale

$$\int \int_S z_Q \left[\Delta_Q R(P, Q) + \int \int_S \frac{F(Q, M)}{MP} dS_M \right] dS_Q$$

a un sens. Il faut encore démontrer que son Δ_P a aussi un sens. Désignons par A le crochet. Traçons un cercle de centre P et

Fig. 6.



intérieur à l'aire S, celle-ci se trouvera divisée en deux portions S₁ et S₂ (fig. 6). Nous poserons

$$A_1 = \Delta_Q \int \int_{S_1} \frac{dS_M}{MP \cdot MQ} + \int \int_{S_1} \frac{F(Q, M)}{MP} dS_M,$$

$$A_2 = \Delta_Q \int \int_{S_2} \frac{dS_M}{MP \cdot MQ} + \int \int_{S_2} \frac{F(Q, M)}{MP} dS_M;$$

de la sorte nous aurons

$$A = A_1 + A_2.$$

Considérons d'abord

$$\int \int_S z_Q A_1 dS_Q.$$

L'opération qui consiste à prendre le Δ_P de cette expression ne soulève pas de difficulté : dans toute l'aire S, la fonction A₁ est régulière quel que soit le point Q. A supposer même que Q soit en P, le terme $\Delta_Q \int \int_{S_1} \frac{dS_M}{MP \cdot MQ}$ est régulier (l'opération Δ_Q faisant dis-

paraître le terme logarithmique de $\int \int_{S_1} \frac{dS_M}{MP \cdot MQ}$. Quant au terme $\int \int_{S_1} \frac{F(Q, M)}{MP} dS_M$, nous avons même appris à former explicitement son Δ_P .

Considérons maintenant

$$\int \int_S z_Q A_2 dS_Q.$$

L'étude est délicate et je n'ai pu la pousser à fond. On peut voir que $\Delta_P A_2$ est logarithmiquement infini quand Q vient sur (C) , ce qui assure un sens à l'intégrale

$$\int \int_S z_Q \Delta_P A_2 dS_Q.$$

En effet, nous avons

$$\Delta_P A_2 = \Delta_Q \int \int_{S_2} \frac{dS_M}{MP^3 \cdot MQ} + \int \int_{S_2} \frac{F(M, Q)}{MP^3} dS_M;$$

ceci représente l'accélération au point Q (au facteur $\frac{1}{2\pi}$ près) quand la dénivellation à l'instant considéré est zéro en tout point de l'aire S_1 et $\frac{1}{PQ^3}$ en tout point Q de l'aire S_2 . Donc $\Delta_P A_2$ est bien logarithmiquement infini quand Q tend vers le contour (C) . Il résulte que l'intégrale $\int \int_S z_Q \Delta_P A_2 dS_Q$ a un sens. Mais il n'est pas absolument certain ⁽¹⁾ qu'elle représente le Δ_P de $\int \int z_Q A_2 dS_Q$.

⁽¹⁾ On peut cependant, dans le cas de l'hémisphère, donner une idée de cette dernière démonstration. Il résulte des considérations exposées dans la cinquième section qu'on peut écrire

$$A_2 = U(P, Q) + 2 \int_{(C)} \frac{1}{CQ} \frac{d}{dn} \frac{1}{CP} ds,$$

la fonction $U(P, Q)$ étant finie quand le point Q vient sur le contour C . Nous en tirons

$$\Delta_P A_2 = \Delta_P U(P, Q) + 2 \int_{(C)} \frac{1}{CQ} \frac{d}{dn} \frac{1}{CP} ds;$$

Reste à calculer le terme β :

$$\beta = \int \int_S 2\pi \frac{\partial^2 z_M}{\partial t^2} F(M, P) dS_M;$$

P étant intérieur à l'aire S, $F(M, P)$ sera toujours finie. Seulement, ici encore, nous ne pourrions sans précautions remplacer $2\pi \frac{\partial^2 z_M}{\partial t^2}$ par sa valeur tirée de (9) et séparer les intégrales obtenues sous peine d'obtenir des termes infinis. Il faudra alors recourir à l'artifice du contour (C') et de l'aire (S') et prouver que les intégrales obtenues à la limite ont un sens : il n'est du reste pas nécessaire de reprendre tous les calculs, ils se déduisent des précédents en en substituant $F(M, P)$ à $\frac{1}{MP}$. Seulement ici, pour appliquer la formule de Green, il sera inutile d'isoler le point P : nous trouverons seulement

$$\beta = \int \int_S z_Q \left[\Delta_Q \int \int_S \frac{F(M, P)}{MQ} dS_M + \int \int_S F(M, P) F(Q, M) dS_M \right] dS_Q,$$

mais si nous nous reportons à l'expression précédente de $\Delta_P \Lambda_2$, nous avons aussi

$$\Delta_P \Lambda_2 = V(P, Q) + 2 \int_{(C)} \frac{1}{CQ} \frac{d}{dn} \frac{1}{CP^3} ds,$$

la fonction $V(P, Q)$ étant finie. Il s'ensuit que la fonction $\Delta_P U(P, Q)$ est identique à $V(P, Q)$. Elle est donc elle-même finie, quel que soit le point Q. De sorte que l'expression

$$\int \int_S z_Q \Delta_P U(P, Q) dS_Q$$

est certainement le Δ_P de

$$\int \int_S z_Q U(P, Q) dS_Q.$$

Finalement, nous sommes ramenés à montrer qu'on a bien

$$\Delta_P \int \int_S z_Q \int_C \frac{1}{CQ} \frac{d}{dn} \frac{1}{CP} ds dS_Q = \int \int_S z_Q \int_C \frac{1}{CQ} \frac{d}{dn} \frac{1}{CP^3} ds dS_Q.$$

Pour cela, il suffira d'abord de vérifier qu'on a bien

$$\int \int_S z_Q \int_C \frac{1}{CQ} \frac{d}{dn} \frac{1}{CP} ds dS_Q = \int_C \frac{d}{dn} \frac{1}{CP} \int \int_S \frac{z_Q}{CQ} dS_Q ds.$$

Puis, sous cette dernière forme donnée à l'intégrale, on constatera que la démonstration s'achève sans difficulté.

en posant $U(M) = F(M, P)$ et en remarquant que U et ΔU sont finis tant que P est intérieur à l'aire S , nous voyons que le coefficient de z_Q est au plus logarithmiquement infini au voisinage de (C) . Donc β a un sens, ce qui permet notre passage à la limite.

Finalement, nous déduisons de l'équation (9) l'équation

$$(20) \quad 4\pi^2 \left(\frac{\partial^4 z_P}{\partial t^4} + \Delta z_P \right) = \int \int_S z_Q K(P, Q) dS_Q,$$

en posant

$$(21) \quad K(P, Q) = \Delta_P \Delta_Q \int \int_S \frac{dS_M}{MP \cdot MQ} + \Delta_P \int \int_S \frac{F(Q, M)}{MP} dS_M \\ + \Delta_Q \int \int_S \frac{F(M, P)}{MQ} dS_M + \int \int_S F(M, P) F(Q, M) dS_M;$$

$F(M, P)$ étant symétrique en M et P , l'expression précédente nous montre que la fonction $K(P, Q)$ est symétrique en P et Q . D'où le résultat suivant, dû à M. Hadamard :

Conclusion. — A moins que la fonction $K(P, Q)$ ne soit identiquement nulle, le calcul précédent nous montre qu'on ne peut déduire de l'équation (9) celle de Cauchy. Donc en général *l'équation de Cauchy n'est pas vérifiée par les petits mouvements de surface contenu dans un vase de forme quelconque.*

Il faut bien remarquer que l'équation (20) n'a été obtenue que pour un point P différent du contour (C) , et que, pour un point du bord, la méthode de calcul que nous avons donnée est complètement en défaut.

Du reste, il est bien certain que toutes les fois que $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ est singulier sur (C) , il en sera de même de $\frac{\partial^4 z}{\partial t^4}$, et les singularités de $\frac{\partial^4 z}{\partial t^4}$ seront d'ordre plus élevé que celles de $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ lui-même.

Remarque. — Considérons deux solutions $u(M, P, t)$ et $v(M, P, t)$ de l'équation (9) telles qu'on ait

$$u(M, P, 0) = \frac{1}{MP} = u_0, \quad v(M, P, 0) = F(M, P) = v_0.$$

L'équation (9) s'écrit de la sorte :

$$2\pi \frac{\partial^2 z_P}{\partial t^2} = \Delta_P \int \int_S z_M u_0 dS_M + \int \int_S z_M v_0 dS_M,$$

et l'équation (20) que nous en avons déduite pourra se mettre sous une forme assez frappante. Nous avons en effet

$$2\pi \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{t=0} = \Delta_Q \int \int_S \frac{dS_M}{MP \cdot MQ} + \int \int_S \frac{F(Q, M)}{MP} dS_M,$$

$$2\pi \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right)_{t=0} = \Delta_Q \int \int_S \frac{F(M, P)}{MQ} dS_M + \int \int_S F(M, P) F(Q, M) dS_M.$$

Mais dans ces conditions l'équation (20) s'écrit

$$2\pi \left(\frac{\partial^4 z_P}{\partial t^4} + \Delta z_P \right) = \Delta_P \int \int_S z_M \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} dS_M + \int \int_S z_M \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} dS_M.$$

Cas du fluide indéfini. — L'équation de surface est alors

$$2\pi \frac{\partial^2 z_P}{\partial t^2} = \Delta_P \int \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z_M}{MP} dS_M.$$

Nous faisons l'hypothèse suivante : c'est que les deux intégrales

$$\int \int_{-\infty}^{+\infty} z_M dS_M \quad \text{et} \quad \int \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial z_M}{\partial t} dS_M$$

sont absolument convergentes. (Nous avons dit qu'on était amené à les considérer comme nulles.) Dans ces conditions on peut écrire

$$\Delta_P \int \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z_M}{MP} dS_M = \int \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta z_M}{MP} dS_M$$

nous avons donc

$$4\pi^2 \frac{\partial^4 z_P}{\partial t^4} = \int \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\int \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta \Delta z_Q}{MQ} dS_Q}{MP} dS_M.$$

Considérons un deuxième point P'. Écrivons l'égalité analogue et retranchons membre à membre les deux équations obtenues.

Nous avons

$$4\pi^2 \left(\frac{\partial^4 z_P}{\partial t^4} - \frac{\partial^4 z_{P'}}{\partial t^4} \right) = \overline{\int \int_{-\infty}^{+\infty}} \frac{\frac{\Delta \Delta z_Q}{MQ} dS_Q}{MP} dS_M \\ - \overline{\int \int_{-\infty}^{+\infty}} \frac{\frac{\Delta \Delta z_Q}{MQ} dS_Q}{MP'}. dS_M$$

D'ailleurs l'intégrale

$$\overline{\int \int_{-\infty}^{+\infty}} \left(\frac{1}{MP \cdot MQ} - \frac{1}{MP' \cdot MQ} \right) dS_M$$

est bien définie et égale à $2\pi \log \frac{P'Q}{PQ}$. Appliquons alors la formule de Green au deuxième membre dans l'aire comprise entre un cercle de rayon très grand et deux autres très petits de centres P et P', et passons à la limite, il vient

$$\frac{\partial^4 z_P}{\partial t^4} - \frac{\partial^4 z_{P'}}{\partial t^4} + \Delta z_P - \Delta z_{P'} = 0,$$

quels que soient les points P et P'. Donc

$$\frac{\partial^4 z_P}{\partial t^4} + \Delta z_P = \text{fonction du temps.}$$

Cette équation doit admettre la solution $z = 0$. Donc le deuxième membre est identiquement nul et nous retrouvons l'équation de Cauchy

$$\frac{\partial^4 z}{\partial t^4} + \Delta z = 0.$$

La fonction K(P, Q) n'est pas en général identiquement nulle. — Nous allons vérifier ce résultat dans le cas de l'hémisphère en calculant la valeur de cette fonction quand P et Q sont au centre.

Souvenons-nous que si l'un des points M ou P vient au centre, la fonction $F(M, P)$ se réduit à la constante $\frac{2}{R^3}$. D'autre part

$$K(P, Q) = \Delta_P \Delta_Q \int \int_S \frac{dS_M}{MP \cdot MQ} + \Delta_P \int \int_S \frac{F(M, Q)}{MP} dS_M \\ + \Delta_Q \int \int_S \frac{F(M, P)}{MQ} dS_M + \int \int_S F(M, P) F(M, Q) dS_M$$

La dernière intégrale au centre donnera $\frac{4\pi}{R^3}$. La seconde et la troisième donneront des résultats égaux. Prenons la seconde en supposant Q en O,

$$\Delta_P \int \int_S \frac{F(M, O)}{MP} dS_M = \frac{2}{R^3} \Delta_P \int \int_S \frac{dS_M}{MP} = - \frac{2}{R^3} \int_C \frac{d}{dn} \frac{1}{PC} ds;$$

quand P est en O, cela donne $-\frac{4\pi}{R^3}$. Donc

$$K(O, O) = \left(\Delta_P \Delta_Q \int \int_S \frac{dS_M}{MP \cdot MQ} \right)_{0,0} - \frac{4\pi}{R^3}.$$

Nous avons d'ailleurs

$$\Delta_Q \int \int_S \frac{dS_M}{MP \cdot MQ} = \Delta_P \int \int_S \frac{dS_M}{MP \cdot MQ} + \int_C \left(\frac{1}{QC} \frac{d}{dn} \frac{1}{PC} - \frac{1}{PC} \frac{d}{dn} \frac{1}{QC} \right) ds,$$

Si Q est en O, nous déduisons de cette formule

$$\Delta_Q \int \int_S \frac{dS_M}{MP \cdot MO} = \Delta_P \int \int_S \frac{dS_M}{MP \cdot MO} + \int_C \left(\frac{1}{R} \frac{d}{dn} \frac{1}{PC} - \frac{1}{R^2} \frac{1}{PC} \right) ds.$$

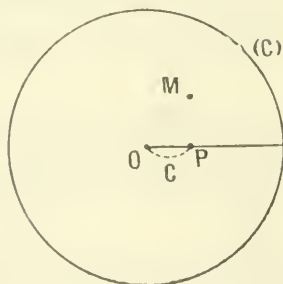
Donc

$$\Delta_P \Delta_Q \int \int_S \frac{dS_M}{MP \cdot MO} = \Delta_P \Delta_P \int \int_S \frac{dS_M}{MP \cdot MO} + \int_C \left(\frac{1}{R} \frac{d}{dn} \frac{1}{PC^3} - \frac{1}{R^2} \frac{1}{PC^3} \right) ds.$$

Quand P est en O, l'intégrale curviligne donne $\frac{4\pi}{R^3}$. Donc

$$K(O, O) = \lim_{P \rightarrow O} \Delta_P \Delta_P \int \int_S \frac{dS_M}{MP \cdot MO}.$$

Fig. 7.



Il suffit de montrer que cette expression n'est pas nulle.

L'intégrale à différentier s'écrit

$$\int_0^{2\pi} d\omega \int_0^R \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho c \cos \omega + c^2}}$$

$$\int_0^{2\pi} \text{Log} \left[\frac{R - c \cos \omega + \sqrt{R^2 - 2Rc \cos \omega + c^2}}{c(1 - \cos \omega)} \right] d\omega.$$

La partie intéressante de l'élément différentiel est

$$\text{Log} \left[1 - \frac{c}{R} \cos \omega + \sqrt{1 - 2 \frac{c}{R} \cos \omega + \frac{c^2}{R^2}} \right]$$

$$= \text{Log} 2 + a_1 c + a_2 c^2 + a_3 c^3 + \dots,$$

et il faut lui faire subir l'opération

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial c^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial c} \right)^{(2)} = \frac{\partial^4}{\partial c^4} + \frac{2}{c} \frac{\partial^3}{\partial c^3} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial c^2} + \frac{1}{c^3} \frac{\partial}{\partial c},$$

ce qui donne

$$\frac{9a_3}{c} + 64a_4 + \dots,$$

nous devons donc trouver

$$\int_0^{2\pi} a_3 d\omega = 0,$$

pour assurer la continuité du $\Delta\Delta$, et pour notre objet même nous devons vérifier

$$\int_0^{2\pi} a_4 d\omega = 0.$$

Posons

$$\frac{c}{R} = x,$$

nous avons

$$\sqrt{1 - 2x \cos \omega + x^2} = 1 - x \cos \omega + \frac{x^2}{2} \sin^2 \omega + \frac{2x^3}{4} \sin^2 \omega \cos \omega$$

$$- \frac{x^4}{8} (1 - 6 \cos^2 \omega + 5 \cos^4 \omega) + \dots$$

Soit Λ la quantité sous le logarithme

$$\Lambda = 1 - x \cos \omega + \frac{x^2}{4} \sin^2 \omega + \frac{x^3}{4} \sin^2 \omega \cos \omega$$

$$- \frac{x^4}{16} (1 - 6 \cos^2 \omega + 5 \cos^4 \omega) + \dots$$

Le développement de $\log A$, changé de signe, nous donne

$$\begin{aligned} x \cos \omega - \frac{x^2}{4} \sin^2 \omega - \frac{x^3}{4} \sin^2 \omega \cos \omega + \frac{x^4}{16} (1 - 6 \cos^2 \omega + 5 \cos^4 \omega) + \dots \\ + \frac{x^2}{2} \cos^2 \omega - \frac{x^3}{4} \sin^2 \omega \cos \omega + \frac{x^4}{32} (\sin^4 \omega - 8 \sin^2 \omega \cos^2 \omega) + \dots \\ + \frac{x^3}{3} \cos^3 \omega - \frac{x^4}{4} \sin^2 \omega \cos^3 \omega + \dots \\ + \frac{x^4}{4} \cos^4 \omega + \dots \end{aligned}$$

On voit immédiatement que

$$\int_0^{2\pi} a_3 d\omega = 0.$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} -32 a_4 &= 2 - 28 \cos^2 \omega + 34 \cos^4 \omega + \sin^4 \omega, \\ -32 \int_0^{2\pi} a_4 d\omega &= \left(-24 + \frac{105}{4} \right) \pi. \end{aligned}$$

Le résultat est $\neq 0$. Donc la vérification est faite.

SUR L'ENSEIGNEMENT DE LA CINÉMATIQUE;

PAR M. KOENIGS.

1. Depuis une dizaine d'années, j'ai adopté, dans l'enseignement de la Cinématique, une méthode que je puis qualifier de purement cinématique qui diffère, en beaucoup de points, de celle que j'ai suivie dans mes *Leçons de cinématique* publiées en 1897. Comme j'ai l'habitude de rédiger d'avance un résumé de mes leçons et de laisser ensuite ce résumé à la disposition de mes auditeurs dans le local du Laboratoire de Mécanique, il ne m'a pas paru nécessaire jusqu'ici de les publier. Mais M. Delassus ayant donné récemment, dans le *Bulletin de la Société mathématique de France*, un article dont les idées se rapprochent des miennes, il me semble

naturel de donner ici les principes de ma méthode. Il me suffit, pour cela, de transcrire mes notes de cours (1).

2. Je pars de ce théorème dont je passe la démonstration, laquelle s'établit au moyen d'une considération élémentaire de Cinématique infinitésimale :

Si M, N sont deux points mobiles, O un point fixe et $\overline{OS}$ un vecteur équipollent au vecteur $\overline{MN}$, la vitesse de S est la différence géométrique de la vitesse de M et de celle de N

$$\overline{V_S} = \overline{V_N} - \overline{V_M}.$$

Si, en particulier, le vecteur $\overline{MN}$ a une longueur constante, auquel cas M et N forment un système invariable, le point S décrit une trajectoire sphérique, en sorte que sa vitesse est normale à $\overline{OS}$. Il en résulte que $\overline{V_M}$, $\overline{V_N}$ ont une différence géométrique rectangulaire avec $\overline{MN}$, en sorte que $\overline{V_M}$, $\overline{V_N}$ se projettent sur la droite MN suivant deux vecteurs égaux.

Si en particulier $\overline{V_M}$ est perpendiculaire à MN, sa projection y est nulle. Il doit dès lors en être de même de $\overline{V_N}$ qui est nulle ou bien perpendiculaire à MN, ce qui donne ce théorème, base des recherches de Mannheim : *Si une droite est normale à la trajectoire d'un de ses points, tout autre point de cette droite, invariablement lié au premier, a lui aussi, une trajectoire normale à la droite.*

Il en résulte aussitôt que si trois points A, B, C formant triangle dans un solide en mouvement ont une vitesse nulle, il en est de même de tout autre point M du solide.

Si, en effet, M est hors du plan ABC, les droites MA, MB, MC forment un trièdre et les projections sur ces droites de $\overline{V_M}$ sont toutes nulles, car elles sont respectivement égales aux projections sur ces mêmes droites des vitesses $\overline{V_A}$, $\overline{V_B}$, $\overline{V_C}$, lesquelles sont nulles. Il en résulte que $\overline{V_M}$ elle-même est nulle.

(1) Il va de soi que, dans des questions si classiques, il ne saurait s'agir que de la forme pédagogique. Au point de vue de la nouveauté scientifique, il n'y a rien qui ne soit foncièrement connu. Voilà longtemps, par exemple que Möbius a développé le rôle des système des vecteurs dans la composition des rotations.

Le raisonnement tombe en défaut si M est dans le plan ABC ; mais on peut alors établir le théorème pour deux autres points D, E du corps solide non situés dans le plan ABC et formant avec A , par exemple, un triangle dont le plan ne contient pas M ; à ce triangle ADE et au point M est alors applicable le raisonnement précédent.

3. Considérons deux mouvements différents $[\Sigma, \Sigma']$, $[\Sigma, \Sigma'']$ d'un même corps Σ par rapport à deux autres Σ', Σ'' . Il se peut que dans ces deux mouvements, à un instant donné, tout point de Σ ait la même vitesse. Nous dirons alors que ces deux mouvements sont *tangents*.

4. Nous supposons démontré le principe général de la composition des vitesses. Si Σ est un corps mobile par rapport à un autre Σ_1 , Σ_1 mobile par rapport à un autre Σ_2 , Σ_2 mobile par rapport à un autre Σ_3 , et ainsi de suite jusqu'à un corps Σ_{n-1} mobile par rapport à un dernier corps Σ_n , P étant un point de Σ et $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$ les points de $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_{n-1}$ avec lesquels il coïncide à l'instant t considéré, nous appellerons $\overline{V}_P^1$ la vitesse de P dans le mouvement $[\Sigma, \Sigma_1]$, $\overline{V}_{P_1}^2$ la vitesse de P_1 dans le mouvement $[\Sigma_1, \Sigma_2]$, $\dots$, $\overline{V}_{P_{n-1}}^n$ la vitesse de P_{n-1} dans le mouvement $[\Sigma_{n-1}, \Sigma_n]$ et enfin $\overline{V}_P^n$ la vitesse de P dans le dernier corps Σ_n . On a, en vertu de la composition des vitesses, l'égalité géométrique

$$\overline{V}_P^n = \overline{V}_P^1 + \overline{V}_{P_1}^2 + \overline{V}_{P_2}^3 + \dots + \overline{V}_{P_{n-1}}^n.$$

5. Appliquons ceci à l'hypothèse où les mouvements $[\Sigma, \Sigma_1]$, $[\Sigma_1, \Sigma_2]$, $[\Sigma_2, \Sigma_3]$, $\dots$, $[\Sigma_{n-1}, \Sigma_n]$ consistent en des mouvements de rotation autour d'un axe commun, $\Delta, \Delta_1, \dots, \Delta_{n-1}$ pour chacun des couples de corps respectivement : de plus, représentons par un vecteur $\overline{\Omega}$ porté par Δ , $\overline{\Omega}_1$ porté par $\Delta_1, \dots, \overline{\Omega}_{n-1}$ porté par Δ_{n-1} , les vitesses angulaires de ces mouvements de rotations respectifs. Les vitesses $\overline{V}_P^1, \overline{V}_{P_1}^2, \overline{V}_{P_2}^3, \dots, \overline{V}_{P_{n-1}}^n$ seront les moments de $\overline{\Omega}$ au point P , de $\overline{\Omega}_1$ au point P_1 , de $\overline{\Omega}_2$ au point $P_2, \dots$, de $\overline{\Omega}_{n-1}$ au

point P_{n-1} , en sorte qu'en définitive, $\overline{V_p^{n-1}}$ sera le moment résultant au point P du système des vecteurs $\overline{\Omega}, \overline{\Omega_1}, \overline{\Omega_2}, \dots, \overline{\Omega_{n-1}}$.

Ainsi : *Si deux corps Σ, Σ_n sont les membres extrêmes d'une chaîne de corps articulés et $\overline{\Omega}, \overline{\Omega_1}, \dots, \overline{\Omega_{n-1}}$, les vecteurs représentatifs des vitesses angulaires avec lesquelles jouent les diverses articulations, la vitesse de tout point de Σ dans Σ_n sera le moment résultant en ce point du système des vecteurs $\overline{\Omega}, \overline{\Omega_1}, \overline{\Omega_2}, \dots, \overline{\Omega_{n-1}}$.*

Ce qui donne quelque valeur théorique à la considération de ce mouvement spécial, c'est que *tout mouvement admet un mouvement à articulations* (c'est-à-dire du genre précédent) *tangent*.

6. Pour le voir, démontrons d'abord ce théorème.

Si deux mouvements différents $[\Sigma, \Sigma']$, $[\Sigma, \Sigma'']$ d'un même corps Σ sont tels que trois points A, B, C formant triangle aient même vitesse à un instant donné dans les deux mouvements, ces deux mouvements sont tangents.

En effet, si P est un point de Σ , P' le point de Σ' avec lequel il coïncide, comme $[\Sigma, \Sigma'']$ peut être regardé comme résultant des deux mouvements $[\Sigma, \Sigma']$ et $[\Sigma', \Sigma'']$ en appelant $\overline{V_p'}$ la vitesse de P dans Σ' , $\overline{V_p''}$ sa vitesse dans Σ'' et $\overline{V_{p'}''}$ la vitesse de P' dans Σ'' , on a, par la composition des vitesses

$$\overline{V_p''} = \overline{V_{p'}''} + \overline{V_p'}.$$

Si l'on prend pour P le point A, en appelant A' le point de Σ' avec lequel P coïncide actuellement, on aura, par application de cette formule,

$$\overline{V_A''} = \overline{V_{A'}''} + \overline{V_A'}.$$

Or, par hypothèse, $\overline{V_A''} = \overline{V_{A'}'}$, donc $\overline{V_{A'}''} = 0$.

On verra de même que si B', C' sont les points de Σ' avec lesquels B, C coïncident actuellement, on a aussi

$$\overline{V_{B'}''} = 0 \quad \overline{V_{C'}''} = 0.$$

Il existe donc dans Σ' trois points A', B', C' formant triangle et

qui ont une vitesse nulle dans le mouvement $\boxed{\Sigma', \Sigma''}$. Il en résulte que tout point P' de Σ' a une vitesse nulle dans ce mouvement, et puisque $\overline{V}_{P'}'' = 0$, il en résulte

$$\overline{V}_{P'}'' = \overline{V}_{P'},$$

ce qui démontre bien que les mouvements $\boxed{\Sigma, \Sigma'}$, $\boxed{\Sigma, \Sigma''}$ sont tangents.

7. Ceci étant, passons à la démonstration du théorème général.

Soient A, B deux points quelconques du corps Σ et $\overline{V}_A$, $\overline{V}_B$ leurs vitesses. Excluons d'abord le cas où quels que soient dans Σ les points A, B, ces vitesses seraient parallèles. On peut aussi toujours exclure le cas où AB serait normal à $\overline{V}_A$. Dans ces conditions, les plans Π_A , Π_B normaux en A et B à $\overline{V}_A$ et à $\overline{V}_B$ ne seront pas parallèles et se couperont suivant une droite CD différente de AB. Sur CD, je place un vecteur $\overline{Q'}$ tel que son moment en A soit justement $\overline{V}_A$. Cela est possible, car V_A est normal au plan Π_A mené par A et CD.

Je dis que $\overline{V}_B$ sera aussi le moment de $\overline{Q'}$ en B. En effet, $\overline{V}_B$ est normale au plan Π_B mené par B et CD, en sorte que $\overline{V}_B$ et le moment $\overline{\mu}_B$ dont il s'agit sont portés par la même droite. Or la projection de $\overline{V}_B$ sur AB est égale à la projection de $\overline{V}_A$, en vertu du théorème du début. D'un autre côté, la projection du moment $\overline{\mu}_B$ est aussi égale à la projection du moment $\overline{\mu}_A$ de $\overline{Q'}$ au point A, d'après une propriété élémentaire des moments. Il en résulte que $\overline{\mu}_B$ et $\overline{V}_B$, portés par la même droite, ont même projection sur AB: ils coïncident donc.

Prenons maintenant sur la droite CD un point C. Soit $\overline{V}_C$ sa vitesse. La projection de $\overline{V}_C$ sur CA est égale à la projection de $\overline{V}_A$ sur cette même droite (théorème initial); or cette dernière projection est nulle car CA est dans le plan Π_A auquel V_A est perpendiculaire. En conséquence, $\overline{V}_C$ a une projection nulle sur CA. On prouverait de même que $\overline{V}_C$ a une projection nulle sur CB. Dès lors $\overline{V}_C$ est normale au plans Π_C mené par C et AB. Nous pla-

cerons sur AB un vecteur $\overline{\Omega}$ dont $\overline{V}_C$ soit le moment au point C, ce qui sera possible, puisque V_C est normale au plan Π_C , mené par AB et par C.

Considérons alors une chaîne articulée $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2$ de trois corps dont le premier est le corps Σ , les axes d'articulations étant AB pour Σ et Σ_1 , CD pour Σ_1 et Σ_2 et concevons que les vitesses angulaires de ces articulations soient représentées respectivement par les vecteurs $\overline{\Omega}, \overline{\Omega}'$. Dans le mouvement $[\Sigma, \Sigma_2]$ la vitesse de tout point sera le moment résultant en ce point des vecteurs $\overline{\Omega}, \overline{\Omega}'$.

Or il est clair que en A, B, C, ces moments résultants, seront précisément $\overline{V}_A, \overline{V}_B, \overline{V}_C$ respectivement.

Les mouvements $[\Sigma, \Sigma'], [\Sigma, \Sigma_2]$ donnent ainsi lieu à des vitesses égales pour trois points A, B, C de Σ formant triangle, ces deux mouvements sont en conséquence tangents, ce qui établit le théorème.

REMARQUE. — On a supposé qu'on peut trouver dans le corps Σ deux points A, B dont les vitesses $\overline{V}_A, \overline{V}_B$ ne soient pas parallèles.

Supposons que deux points A, B, quelconques du corps aient leurs vitesses parallèles; comme $\overline{V}_A, \overline{V}_B$ ont sur AB des projections égales, en général non nulles, puisque A, B sont quelconques, $\overline{V}_A$ et $\overline{V}_B$ sont égales. Tous les points du corps ont alors même vitesse. Mais, si l'on imagine un couple de vecteurs $\overline{\Omega}, \overline{\Omega}'$ dont le moment en tout point soit précisément la vitesse $\overline{V}$, sans indice, commune à tous les points du corps, on pourra encore imaginer une chaîne articulée de trois corps où $\overline{\Omega}, \overline{\Omega}'$ représentent les vitesses angulaires des articulations et l'on retombe sur le théorème général.

8. Maintenant qu'on a introduit dans la distribution des vitesses d'un solide en mouvement, la considération des systèmes de vecteurs et du moment où ceux-ci n'interviennent que par leur moment résultant, il sera permis d'y opérer toutes les transformations qui les laissent équivalents à eux-mêmes. On aura toujours la ressource d'interpréter chaque forme particulière au moyen

d'une chaîne articulée d'un nombre de membres aussi grand qu'on voudra.

En particulier, en envisageant la représentation canonique, on arrivera à la notion du *mouvement hélicoïdal tangent*. Pareillement, par ce moyen, la composition des mouvements en ce qui concerne les vitesses, problème qui porte le nom générique de *composition des rotations*, se ramène immédiatement à la composition des systèmes de vecteurs.

9. Nous ferons remarquer encore que cette méthode n'est pas seulement commode pour parvenir par une voie cinématique aux résultats généraux qu'on vient de rappeler, mais elle s'applique aussi avec la plus grande souplesse à tous les cas particuliers.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse du mouvement d'une figure plane dans son plan. En réalité, cette figure est solidaire d'un corps Σ qui glisse par une face plane ε sur une face plane ε' d'un second corps Σ' . Prenons deux points A, B dans le plan ε et un point C hors de ce plan dans le corps Σ , sur une perpendiculaire en A au plan ε .

Excluons encore le cas où tous les points du corps auraient leurs vitesses parallèles, auquel cas elles seront en outre égales (mouvement de translation tangent). Les plans Π_A , Π_B normaux en A, B aux vitesses $\overline{V}_A$, $\overline{V}_B$ des points A, B sont normaux aux plans ε , car $\overline{V}_A$, $\overline{V}_B$ sont évidemment dans ce plan. Appelons Δ la droite d'intersection de Π_A , Π_B . Plaçons sur Δ un vecteur $\overline{\Omega}$ dont $\overline{V}_A$ soit le moment en A. On verra, comme plus haut, que $\overline{V}_B$ est aussi le moment de $\overline{\Omega}$ en B. Enfin, le point C décrit dans un plan parallèle à ε une trajectoire égale à celle de A et avec la même vitesse, en sorte que $\overline{V}_C$ sera aussi le moment de $\overline{\Omega}$ en C. Dès lors, si l'on imagine un corps Σ_1 par rapport auquel Σ tournerait autour de Δ avec la vitesse angulaire figurée par le vecteur $\overline{\Omega}$, les points A, B, C formant triangle auront mêmes vitesses $\overline{V}_A$, $\overline{V}_B$, $\overline{V}_C$ que dans le mouvement donné $[\Sigma, \Sigma']$; en conséquence, ce dernier mouvement et le mouvement $[\Sigma, \Sigma_1]$ sont tangents, c'est ce qu'on exprime en disant qu'il existe une *rotation tangente*.

Je ne crois pas devoir insister, car ces exemples de raisonnement donnent une idée suffisante du parti qu'on peut tirer de cette méthode.

10. Un mot en terminant.

Les personnes habituées à raisonner au moyen des déplacements infiniment petits pourront, au premier abord, trouver cette méthode indirecte, peut-être même artificielle. Cependant elle correspond plus que toute autre à la réalité des choses, et la notion des mouvements tangents sur laquelle elle s'appuie met bien en relief ce fait essentiel que ce n'est qu'au point de vue des vitesses que les mouvements qu'on y considère peuvent se substituer les uns aux autres. Elle n'est pas non plus si abstraite, puisque, par la considération de la chaîne articulée tangente, elle fournit une interprétation très claire, susceptible de s'accorder avec la plus scrupuleuse logique.

SUR LES GROUPES PSEUDO-NULS ET NON COMMUTATIFS DE QUANTITÉS HYPERCOMPLEXES.

PAR M. LÉON AUTONNE.

INTRODUCTION.

Dans deux Notes précédentes ⁽¹⁾ j'ai étudié les groupes commu-

(¹) I. FROBENIUS, *Theorie der hyperkomplexen Grössen* (*Sitzungsberichte de l'Académie de Berlin*, avril 1903).

II. CARTAN, *Sur les groupes bilinéaires et les systèmes de nombres complexes* (*Annales de l'Université de Toulouse*, t. XII, 1898).

III. AUTONNE, *Sur la fonction monogène d'une variable hypercomplexe dans un groupe commutatif* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, 1909).

IV. AUTONNE, *Sur les groupes commutatifs de quantités hypercomplexes*, (même Recueil, 1911).

On renverra à la présente liste par une notation telle que celle-ci (*Index*, II), pour désigner, par exemple, le travail de M. Cartan.

Un Mémoire assez étendu sur les groupes commutatifs et pseudo-nuls paraîtra dans les *Annales de l'Université de Lyon* en 1912.

tatifs et pseudo-nuls de quantités hypercomplexes. Dans cette troisième Note, je me propose d'examiner jusqu'à quel point les résultats obtenus s'étendent aux groupes pseudo-nuls généraux, c'est-à-dire non commutatifs.

Les notations et la terminologie précédemment employées sont conservées ; cela me dispensera de les rappeler ici.

Dans un groupe (ε) , m -aire, pseudo-nul et non commutatif, de quantités hypercomplexes x , la matrice antistrophe $T(x) = T_x$ ne se confond plus avec la matrice $S(x) = S_x$ du groupe. On a, pour x et y arbitraires, la relation $S_x T_y = T_y S_x$, qui exprime que dans (ε) la multiplication est associative.

Voici les principaux résultats qu'on trouve :

A tout groupe (ε) correspond sans ambiguïté un système de k entiers positifs g_λ , $\{\lambda = 1, 2, \dots, k; k \leq m\}$, $\sum_\lambda g_\lambda = m$, tels que (pour un choix convenable de variables) on ait à la fois

$$(\lambda, \mu, \nu = 1, 2, \dots, k), \quad S_x = (p_{\rho\mu}(x)), \quad T_x = (q_{\lambda\mu}(x)),$$

où $p_{\lambda\mu}$ et $q_{\lambda\mu}$ sont des Tableaux à g_λ lignes et g_μ colonnes, formés avec des éléments de S_x et de T_x avec $p_{\lambda\mu}(x) \equiv 0$, $q_{\lambda\mu}(x) \equiv 0$, pour $\mu \geq \lambda$.

On a ainsi une *forme réduite* entièrement analogue à celle qui se présente pour les groupes commutatifs.

Répartissons comme précédemment (*Index*, IV, 18) les m unités ε_α , $\{\alpha = 1, 2, \dots, m\}$ en k systèmes ε_λ , à g_λ termes. On a encore la proposition : *le produit d'une unité de ε_μ par une unité de ε_ν ne dépend que des unités de ε_γ , $\varepsilon_{\lambda_1}, \dots, \varepsilon_k$, λ étant le plus petit entier qui surpasse à la fois μ et ν .*

Le *prolongement* d'un groupe se fait comme en matière de groupes commutatifs.

J'en profite pour démontrer que tous les groupes, où $g_\lambda = 1$ et, par suite, $k = m$, sont commutatifs et sont parmi ceux construits précédemment.

Décembre 1911.

CHAPITRE I.

GÉNÉRALITÉS.

1. Prenons un groupe non commutatif (ε) , dont les m unités ε_α , $\{\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots, m\}$ se multiplient suivant les formules (les $a_{\alpha\beta\gamma}$ étant des constantes ordinaires, réelles ou complexes),

$$(1) \quad \varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma = \sum_{\alpha} \varepsilon_\alpha a_{\alpha\beta\gamma}.$$

Si $z = xy$ est le produit des deux quantités hypercomplexes $x = \sum_{\beta} \varepsilon_\beta x_\beta$ et $y = \sum_{\gamma} \varepsilon_\gamma y_\gamma$, dans l'ordre indiqué des facteurs, on a

$$(2) \quad z_\alpha = \sum_{\beta\gamma} a_{\alpha\beta\gamma} x_\beta y_\gamma.$$

2. Nommons $u_\alpha, x_\beta, y_\gamma$, trois m paramètres quelconques et $F(u, x, y)$ la forme trilinéaire

$$(3) \quad F(u, x, y) = \sum_{\alpha\beta\gamma} a_{\alpha\beta\gamma} u_\alpha x_\beta y_\gamma.$$

Soient

$$r_{\beta\gamma}(u) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_\beta \partial y_\gamma} = \sum_{\alpha} u_\alpha a_{\alpha\beta\gamma}$$

$$s_{\alpha\gamma}(x) = \frac{\partial^2 F}{\partial u_\alpha \partial y_\gamma} = \sum_{\beta} x_\beta a_{\alpha\beta\gamma},$$

$$t_{\alpha\beta}(y) = \frac{\partial^2 F}{\partial u_\alpha \partial x_\beta} = \sum_{\gamma} y_\gamma a_{\alpha\beta\gamma}.$$

M. Frobenius (*Index*, I) introduit trois matrices m -aires :
la matrice du groupe

$$S(x) = S_x = [s_{\alpha\gamma}(x)],$$

la matrice antistrophe

$$T(y) = T_y = [t_{\alpha\beta}(y)],$$

la matrice parastrophe

$$R(u) = R_u = [r_{\beta\gamma}(u)].$$

Le groupe (ε) est défini sans ambiguïté par une quelconque de ces trois matrices.

3. Désignons par $f_\alpha(x; y)$ la forme bilinéaire (1)

$$z_\alpha = (xy)_\alpha = \sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta\gamma} x_\beta y_\gamma;$$

on a

$$s_{\alpha\gamma}(x) = \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_\gamma}; \quad t_{\alpha\beta}(y) = \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\beta}.$$

La connaissance des m formes bilinéaires $f_\alpha(x; y)$ assure sans ambiguïté celle du groupe (ε) et l'on peut écrire

$$(\varepsilon) = (f_1, f_2, \dots, f_\alpha, \dots, f_m).$$

Pour que (ε) soit commutatif, il faut et il suffit que chacune des formes bilinéaires f_α soit symétrique.

4. Rappelons enfin les formules (*Index*, I)

$$\begin{aligned} S(xy) &= S_x S_y; & T(xy) &= T_y T_x, \\ S_x T_y &= T_y S_x & \text{ou} & & R_u S_x &= T'_x R_u \end{aligned}$$

pour x, y, u quelconques, dont les deux dernières expriment, l'une ou l'autre, que la multiplication est, dans le groupe (ε) , associative.

D'ailleurs tout système de m^3 constantes $a_{\alpha\beta\gamma}$, telles que : 1° S_x et T_y soient échangeables; 2° les deux déterminants $|\rho E - S_x|$ et $|\rho E - T_y|$ soient égaux à ρ^m , définit sans ambiguïté un groupe pseudo-nul (ε) .

5. Soit $B = (b_{\alpha\beta})$ une matrice m -aire quelconque; posons

$$Y_\alpha = \sum_{\beta} X_\beta b_{\alpha\beta}.$$

On écrira symboliquement $Y = B[X]$.

Alors on voit que la formule (2) du n° I s'écrit

$$(1) \quad xy = S_x[y] = T_y[x].$$

6. $C = (c_{\alpha\beta})$ étant une matrice invertible, posons (*Index*, I, § 9)

$$\varepsilon = C' [\bar{\varepsilon}] \text{ c'est-à-dire } \varepsilon_{\beta} = \sum_{\alpha} \bar{\varepsilon}_{\alpha} c_{\alpha\beta}.$$

On aura $\bar{x} = C[x]$, pour

$$x = \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} x_{\alpha} = \sum_{\alpha} \bar{\varepsilon}_{\alpha} \bar{x}_{\alpha},$$

et les formules de multiplication

$$\bar{\varepsilon}_{\beta} \bar{\varepsilon}_{\gamma} = \sum_{\alpha} \bar{\varepsilon}_{\alpha} \bar{a}_{\alpha\beta\gamma}.$$

Nommons $\bar{S}$, $\bar{T}$, $\bar{R}$ les matrices construites avec les $\bar{a}_{\alpha\beta\gamma}$, comme S , T , R sont construites avec les $a_{\alpha\beta\gamma}$. On a les formules

$$\begin{aligned} S_x &= C^{-1} \bar{S}(\bar{x}) C, & T_y &= C^{-1} \bar{T}(\bar{y}) C, \\ R_u &= C' \bar{R}(\bar{u}) C, & R'_u &= C' \bar{R}'(\bar{u}) C \end{aligned}$$

avec $u = C' [\bar{u}]$.

Comme la forme bilinéaire $f_{\alpha}(x, y)$ n'est pas autre chose que la coordonnée $(xy)_{\alpha}$ de xy , on a

$$\bar{f}_{\alpha}(\bar{x}; \bar{y}) = C[f(x; y)],$$

en vertu des formules ci-dessus.

7. Supposons que (ε) soit un groupe pseudo-nul et prenons dans (ε) la quantité hypercomplexe quelconque x .

Nommons σ le plus petit entier positif tel que $x^{\sigma} = 0$. Comme $S(0) = T(0) = 0$, il vient

$$0 = S(x^{\sigma}) = S_x^{\sigma} = T(x^{\sigma}) = T_x^{\sigma}$$

et

$$|\rho E - S_x| = |\rho E - T_x| = \rho^m.$$

Une certaine puissance de S_x et T_x est nulle; soient p et q les entiers positifs minima, tels que

$$S_x^p = S(x^p) = 0, \quad T_x^q = T(x^q) = 0.$$

Les formules (1) du n° 3 donnent

$$x^{p+1} = S_x[x] = 0, \quad x^{q+1} = T_x[x] = 0;$$

donc

$$\sigma \leq p + 1, \quad \sigma \leq q + 1.$$

Les déterminants $|\rho E - S_x|$ ou $|\rho E - T_x|$ décomposés en leurs successifs (*Elementarteiler*) donnent, en vertu de théories connues,

$$\begin{aligned} |\rho E - S_x| &= \rho^p \rho^{p'}, & \dots & \quad p \geq p' \geq \dots, \\ |\rho E - T_x| &= \rho^q \rho^{q'}, & \dots & \quad q \geq q' \geq \dots \end{aligned}$$

Cela fournit la manière de calculer p et q . Il est évident que si l'on particularise x en lui attribuant une valeur $x = \xi$ convenablement choisie, on peut avoir une autre décomposition

$$\begin{aligned} |\rho E - S_\xi| &= \rho^\pi \rho^{\pi'}, & \dots & \quad \pi \geq \pi' \geq \dots, \\ |\rho E - T_\xi| &= \rho^\chi \rho^{\chi'}, & \dots & \quad \chi \geq \chi' \geq \dots \end{aligned}$$

seulement, en vertu même de la théorie des successifs, $\pi \leq p$, $\chi \leq q$.

Voici comment on s'en assure :

Nommons par exemple $\Delta_{\alpha\beta}(\rho; x)$, les premiers mineurs du déterminant $|\rho E - S_x|$, $\{\alpha, \beta = 1, 2, \dots, m\}$. On aura, par définition,

$$\Delta_{\alpha\beta}(\rho; x) = \rho^{m-p} \{ P_{\alpha\beta_0}(x) + \rho P_{\alpha\beta_1}(x) + \dots \},$$

ou au moins des m^2 polynomes $P_{\alpha\beta_0}(x)$ étant donné $\neq 0$. Pour $x = \xi$, il peut se faire que tous les polynomes $P_{\alpha\beta_0}(\xi)$, $P_{\alpha\beta_1}(\xi)$, ..., $P_{\alpha\beta, h-1}(\xi)$ soient nuls à la fois. Les $\Delta_{\alpha\beta}(\rho; \xi)$ sont divisibles par ρ^{m-p+h} , sans l'être par $\rho^{m-p+h+1}$. Il vient alors par définition $\pi = p - h \leq p$.

De même pour le déterminant $|\rho E - T_x|$.

CHAPITRE II.

FORME RÉDUITE.

8. Un théorème dû à M. Cartan (*Index*, II, 35) dit ceci : *dans tout groupe pseudo-nul, il existe au moins un nombre τ_1 , $\tau_1 \neq 0$, tel que, pour x quelconque dans le groupe, on ait à la fois $y\tau_1 = \tau_1 x = 0$.*

Alors [formules (1) du n° 5]

$$0 = S_{\eta}[x] = T_{\eta}[x];$$

comme x est quelconque, il vient les $2 m^2$ équations

$$S_{\eta} = 0 = s_{\alpha\beta}(\eta), \quad T_{\eta} = 0 = t_{\alpha\beta}(\eta)$$

aux m inconnues η_{α} .

Ces $2 m^2$ équations doivent se réduire à h distinctes, $h < m$, qu'on peut toujours (6) supposer être $\eta_1 = \eta_2 = \dots = \eta_h = 0$, $\eta_{h+1}, \dots, \eta_m$ restant arbitraires. S_{η} et T_{η} ne contiennent que $\eta_1, \dots, \eta_h$; par suite

$$\begin{aligned} \text{pour } S_{\eta}, a_{\alpha\beta\gamma} &= 0 & (\text{pour } \beta > h, \alpha \text{ et } \gamma \text{ quelconques}), \\ \text{pour } T_{\eta}, a_{\alpha\beta\gamma} &= 0 & (\text{pour } \gamma > h, \alpha \text{ et } \beta \text{ quelconques}); \\ t_{\alpha\beta}(\gamma) &\equiv 0 & (\text{pour } \alpha \text{ quelconque, } \beta > h), \\ s_{\alpha\gamma}(x) &\equiv 0 & (\text{pour } \alpha \text{ quelconque, } \gamma > h). \end{aligned}$$

S_x et T_y ont, pour x et y quelconques, leurs $m - h$ dernières colonnes composées de zéros.

Par suite

$$S_x = \begin{pmatrix} \mathfrak{L}(x) & 0 \\ \mathfrak{Q}(x) & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} h \\ m-h \end{matrix}, \quad T_y = \begin{pmatrix} \mathfrak{M}(y) & 0 \\ \mathfrak{Q}(y) & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} h \\ m-h \end{matrix},$$

$$\begin{matrix} h, & m-h, \\ h, & m-h, \end{matrix}$$

$\mathfrak{L}(x), \mathfrak{M}(y) =$ matrice h -aire

$\mathfrak{Q}(x), \mathfrak{Q}(y) =$ Tableau à $m - h$ lignes et h colonnes.

9. Les matrices S_x et T_y sont échangeables (4); les matrices h -aires $\mathfrak{L}(x)$ et $\mathfrak{M}(y)$ le sont donc aussi.

Les relations (7)

$$|\rho E - S_x| = |\rho E - T_y| = \rho^m$$

entraînent, $\{E_h = h$ -aire unité}

$$|\rho E_h - \mathfrak{L}(x)| = |\rho E_h - \mathfrak{M}(y)| = \rho^h.$$

Donc (n° 4, in fine) $\mathfrak{L}(x)$ et $\mathfrak{M}(y)$ sont la matrice et la matrice antistrophe d'un groupe ($\mathfrak{S}$) h -aire et pseudo-nul, aux h unités $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_h$.

On peut reprendre sur ($\mathfrak{S}$) le même raisonnement que sur ($\mathfrak{z}$) et

les mêmes considérations que précédemment (*Index*, IV, 16 à 22). On arrive ainsi à diverses propositions que j'énoncerai sans démonstration et qui sont la généralisation de ce qui se passe pour les groupes commutatifs.

10. S_x et T_y peuvent se mettre sous la *forme réduite*

$$S_x = \begin{vmatrix} 0 & & & & & & \\ p_{21} & 0 & & & & & \\ p_{31} & p_{32} & 0 & & & & \\ \dots & \dots & \dots & & & & \\ p_{\lambda 1} & p_{\lambda 2} & \dots & p_{\lambda \mu} & \dots & p_{\lambda, k-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & & \dots \\ p_{k1} & \dots & & & & p_{k, k-1} & 0 \end{vmatrix},$$

$$T_y = \begin{pmatrix} 0 & & \\ q_{21} & 0 & \\ \dots & \dots & \end{pmatrix},$$

où $p_{\lambda \mu} = p_{\lambda \mu}(x)$ et $q_{\lambda \mu} = q_{\lambda \mu}(y)$ sont des Tableaux à g_λ lignes et g_μ colonnes empruntées respectivement à S_x et T_y , avec $m = g_1 + g_2 + \dots + g_k$, $\{\lambda, \mu = 1, 2, \dots, k\}$, $k \leq m$. De plus, $p_{\lambda \mu}(x) = q_{\lambda \mu}(y) \equiv 0$ pour $\mu \geq \lambda$.

Si l'on considère $p_{\lambda \mu}$ ou $q_{\lambda \mu}$ comme une lettre unique, on a deux matrices k -aires

$$P = (p_{\lambda \mu}), \quad Q = (q_{\lambda \mu})$$

qui sont respectivement le canevas de S_x et de T_y .

11. On répartira

Les unités ε_α	en systèmes...	$\mathfrak{E}_\lambda$
Les variables x_α	»	$\mathfrak{X}_\lambda$
Les variables y_α	»	$\mathfrak{Y}_\lambda$
Les formes bilinéaires $f_\alpha(x, y)$.	»	$\mathfrak{F}_\lambda$
$(\alpha = 1, 2, \dots, m)$		$(\lambda = 1, 2, \dots, k)$.

de la même façon que précédemment (*Index*, IV, 18), le système d'indice λ étant à g_λ termes.

On dira que l'entier α , pris dans la suite $1, 2, \dots, m$, appartient à l'indice λ , pris dans la suite $\lambda = 1, 2, \dots, k$, si x_α , par exemple, figure dans le système $\mathfrak{X}_\lambda$. Pour mettre en évidence

les k entiers g_λ , on emploiera la notation

$$(\varepsilon) = \{ x_1, \dots, x_{g_1}; x_{g_1+1}, \dots, x_{g_1+g_2}; \dots; \dots, x_{m-1}, x_m \}.$$

Autrement dit, on séparera :

- 1° Par le point et virgule, les différents systèmes $\mathcal{N}_\lambda$;
- 2° Par la virgule, les différentes variables x_α d'un même système $\mathcal{N}_\lambda$.

12. On aura encore (*Index*, IV, 20) la proposition que voici :
le produit d'une unité du système $\mathcal{E}_\mu$ par une unité du système $\mathcal{E}_\nu$ ne dépend que des unités de $\mathcal{E}_\lambda$, $\mathcal{E}_{\lambda+1}$, ..., $\mathcal{E}_k$, où λ désigne le plus petit entier qui dépasse à la fois μ et ν .

13. Les formes bilinéaires $f_\alpha(x; y)$ du système $\mathcal{F}_\lambda$ ne contiennent que les variables des systèmes $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \dots, \mathcal{N}_{\lambda-1}$ et $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \dots, \mathcal{N}_{\lambda-1}$. Si une variable x_α de $\mathcal{N}_{\lambda-1}$ ne figure dans aucune des expressions $f_\alpha(x; y)$ de $\mathcal{F}_\lambda$, alors la variable y_α de $\mathcal{N}_{\lambda-1}$ figurera sûrement dans une au moins des formes bilinéaires $f_\alpha(x; y)$ de $\mathcal{F}_\lambda$.

Cela résulte immédiatement du raisonnement du paragraphe 8.

CHAPITRE III.

PROLONGEMENT D'UN GROUPE.

14. Je dirai qu'un groupe (ζ) pseudo-nul et $(m+1)$ -aire a la forme Z (*Index*, IV, 27) si l'on a, pour un nombre quelconque x de (ζ) ,

$$x \varepsilon_{m+1} = \varepsilon_{m+1} x = 0.$$

Tout groupe peut être mis sous la forme Z, car tout groupe peut-être mis sous la forme réduite, laquelle n'est qu'un cas particulier de la forme Z.

Un groupe conserve la forme Z après transformation par une collinéation (*Index*, IV, 27)

$$G = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} m \\ 1 \end{matrix}$$

$m+1$.

laquelle, laissant ε_{m+1} fixe, soumet les m premières unités à une collinéation quelconque m -aire D.

15. Si, pour x quelconque $x\varepsilon_{m+1} = \varepsilon_{m+1}x = 0$, on a

$$\begin{aligned} 0 &= \varepsilon\beta\varepsilon_{m+1} = \varepsilon_{m+1}\varepsilon\beta \\ 0 &= a_{\alpha\beta, m+1} = a_{\alpha, m+1, \beta} \quad \} \alpha, \beta = 1, 2, \dots, m+1. \end{aligned}$$

Nommons S_x et $\mathfrak{S}_y$ la matrice et la matrice antistrophe du groupe $(m+1)$ -aire (ζ) . On voit que S_x et $\mathfrak{S}_y$ ont leur dernière colonne composée de zéros :

$$S_x = \begin{pmatrix} S_x & 0 \\ L_x & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} m \\ 1 \end{matrix}, \quad \mathfrak{S}_y = \begin{pmatrix} T_y & 0 \\ M_y & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} m \\ 1 \end{matrix}.$$

Le même raisonnement qu'au n° 9 montre que S_x et T_y sont la matrice et la matrice antistrophe d'un groupe m -aire (ε) pseudo-nul.

On dira encore (*Index*, IV, 29) que le groupe (ζ) est le *prolongement* du groupe (ε) , qu'on passe de (ε) à (ζ) par *prolongement*, qu'on obtient (ζ) en *prolongeant* (ε) , etc.

16. (ζ) reste le prolongement de (ε) quand on fait intervenir la collinéation $(m+1)$ -aire C du n° 14. On peut profiter de l'indétermination de la collinéation m -aire D , qui transforme (ε) , pour mettre (ε) sous forme réduite. Donc encore (*Index*, IV, 30) *tous les groupes $(m+1)$ -aires pseudo-nuls s'obtiennent en prolongeant des groupes pseudo-nuls m -aires, mis sous forme réduite.*

17. Voici comment (*Index*, IV, 31) s'opérera le calcul effectif du groupe prolongé (ζ) , le groupe (ε) étant supposé connu et pris sous forme réduite.

On a à exprimer que les deux matrices $(m+1)$ -aires S_x et $\mathfrak{S}_y$ (15) sont échangeables. Les deux matrices m -aires S_x et T_y le sont déjà par hypothèse. On n'a donc plus qu'à écrire les m égalités $\{\beta = 1, 2, \dots, m\}$

$$(o) \quad \sum_{\rho} s_{m+1, \rho}(x) t_{\rho\beta}(y) = \sum_{\rho} t_{m+1, \rho}(y) s_{\rho\beta}(x),$$

où $\rho = \beta + 1, \beta + 2, \dots, m$, puisque, dans les matrices T_y et S_x , sont nuls les éléments où le premier indice ne surpasse pas le

second. Cela résulte de la forme réduite. Les formules (o) développées sont

$$\sum_{\rho} \sum_{\lambda} x_{\lambda} a_{m+1, \lambda \rho} \sum_{\mu} y_{\mu} a_{\rho \beta \mu} = \sum_{\rho} \sum_{\mu} a_{m+1, \rho \mu} y_{\mu} \sum_{\lambda} x_{\lambda} a_{\rho \lambda \beta}.$$

Identifions de part et d'autre les coefficients de $x_{\lambda} y_{\mu}$; il vient

$$\sum_{\rho} a_{m+1, \lambda \rho} a_{\rho \beta \mu} = \sum_{\rho} a_{m+1, \rho \mu} a_{\rho \lambda \beta};$$

sont connus tous les coefficients $a_{\alpha \beta \gamma}$ où $\alpha < m + 1$, puisque ces coefficients figurent dans le groupe (ε). Posons $a_{m+1, \beta \gamma} = b_{\beta \gamma}$. Les m^2 quantités $b_{\beta \gamma}$ ($\beta, \gamma = 1, 2, \dots, m$) sont ceux de la forme bilinéaire $f_{m+1}(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_m)$.

18. Tout compte fait, on a à résoudre par rapport aux m^2 inconnues $b_{\beta \gamma}$ le système des m^3 équations linéaires et homogènes, $\{\beta = 1, 2, \dots, m\}$

$$[\beta] \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{\rho} b_{\lambda \rho} a_{\rho \beta \mu} = \sum_{\rho} b_{\rho \mu} a_{\rho \lambda \beta} \\ (\rho = m, m-1, \dots, \beta+1; \lambda, \mu = 1, 2, \dots, m). \end{array} \right.$$

CHAPITRE IV.

APPLICATIONS.

19. J'ai construit (*Index*, IV, 23 à 25) les groupes commutatifs et pseudo-nuls, pour lesquels, dans la forme réduite (10), $k = m$ et tous les g_{λ} sont égaux à l'unité. Ces groupes se confondent avec les groupes commutatifs et pseudo-nuls de rang maximum, c'est-à-dire avec ceux où la matrice S_x a le rang maximum $m - 1$. On a pour la forme réduite $s_{\alpha \beta}(x) = x_{\alpha - \beta}$.

20. On va montrer que *tous les groupes, où tous les g_{λ} sont égaux à l'unité, sont des groupes commutatifs*. On ne parle, bien entendu, que des groupes pseudo-nuls.

Faisons d'abord $m = 2$ et, avec les notations du n° 11, (ε) = $(x_1; x_2)$. Alors $f_1(x; y) = 0$, $f_2(x; y) = a_{211} x_1 y_1$. Les deux

formes bilinéaires $f_x(x; y)$ sont symétriques et le groupe est commutatif (3).

Montrons que, si la proposition est vraie pour $m - 1$, elle est vraie aussi pour m .

Il est évident que, pour construire le groupe m -aire cherché, il faut prolonger le groupe commutatif $(m - 1)$ -aire de rang maximum.

21. On a à appliquer les formules des nos 17 et 18, en changeant m en $m - 1$.

Il faut calculer les coefficients de la forme bilinéaire $f_m(x; y)$, où ne peuvent figurer ni x_m , ni y_m , mais où figure effectivement une au moins des deux variables x_{m-1} et y_{m-1} des systèmes $\mathcal{X}_{m-1}$ et $\mathcal{Y}_{m-1}$ (13). On ne peut donc avoir simultanément

$$s_{m, m-1}(x) = \frac{\partial f_m}{\partial y_{m-1}} = 0, \quad t_{m, m-1}(y) = \frac{\partial f_m}{\partial x_{m-1}} = 0.$$

22. Exprimons que les deux matrices S_x et T_y du groupe m -aire cherché sont échangeables. Il suffira, en vertu de la théorie du prolongement, d'exprimer que $(S_x T_y)_{m\beta} = (T_y S_x)_{m\beta}$, pour $\beta = 1, 2, \dots, m - 2$, car on a évidemment

$$0 = (S_x T_y)_{mm} = (T_y S_x)_{mm} = (S_x T_y)_{m, m-1} = (T_y S_x)_{m, m-1}.$$

Il vient ainsi les $m - 2$ équations

$$\left(\begin{array}{l} \beta \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{\rho} s_{m, \rho}(x) t_{\rho \beta}(y) = \sum_{\sigma} t_{m, \sigma}(y) s_{\sigma \beta}(x) \\ (\rho, \sigma = \beta + 1, \beta + 2, \dots, m - 1; \beta = 1, 2, \dots, m - 2). \end{array} \right.$$

Les deux sommes comprennent $m - 1 - \beta$ termes.

23. Posant

$$s_{m, \rho}(x) = \frac{\partial f_m}{\partial y_{\rho}} = s_{\rho}(x),$$

$$t_{m, \sigma}(y) = \frac{\partial f_m}{\partial x_{\sigma}} = t_{\sigma}(y),$$

et remarquant que (19) $s_{\sigma \beta}(x) = x_{\sigma - \beta, \rho \beta}(y) = y_{\rho - \beta}$, on écrira

plus simplement

$$\sum_{\rho} y_{\rho-\beta} s_{\rho}(x) = \sum_{\sigma} x_{\sigma-\beta} t_{\sigma}(y).$$

Tout compte fait, les expressions $s_{\rho}(x)$ et $t_{\sigma}(y)$ sont liées par les $m-2$ relations, $\{\beta = 1, 2, \dots, m-2\}$

$$[\beta] \quad y_1 s_{\beta+1}(x) + y_2 t_{\beta+2}(x) + \dots + y_{m-1-\beta} s_{m-1}(x) \\ = x_1 t_{\beta+1}(y) + \dots + x_{m-1-\beta} t_{m-1}(y).$$

24. Désignons par $Q_{\sigma}(x; y) = Q_{\sigma}(y; x)$ la forme bilinéaire symétrique $x_1 y_{\sigma-1} + x_2 y_{\sigma-2} + \dots + x_{\sigma-1} y_1$.

LEMME. — On a $s_{\rho}(x) = t_{\rho}(x) = Q_{m+1-\rho}(K; x)$, les K étant des constantes.

Je dis que le lemme est vrai pour $\rho = m-1$. En effet, la relation $[\beta]$ ci-dessus donne

$$y_1 s_{m-1}(x) = x_1 t_{m-1}(y).$$

On ne peut avoir (21)

$$s_{m,m-1}(x) = s_{m-1}(x) = t_{m,m-1}(y) = t_{m-1}(y) = 0;$$

done

$$s_{m-1}(x) = t_{m-1}(x) = k_1 x_1 = Q_2(K; x),$$

ce qui est conforme au lemme.

On va établir que, si le lemme est vrai pour

$$\rho = m-1, m-2, \dots, \beta+2,$$

il est vrai aussi pour $\beta+1$, c'est-à-dire que le lemme est vrai pour $\rho = m-1, m-2, \dots, 3, 2$.

Cela suffit pour établir la symétrie de la forme bilinéaire $f_m(x; y)$, c'est-à-dire la commutabilité du groupe m -aire.

En effet, des égalités

$$s_{\rho}(x) = s_{m\rho}(x) = \sum_{\alpha} a_{m\alpha\rho} x_{\alpha} \\ t_{\rho}(x) = t_{m\rho}(x) = \sum_{\alpha} a_{m\rho\alpha} x_{\alpha} \quad (\rho = 2, 3, \dots, m-1)$$

on tire

$$a_{m\alpha\rho} = a_{m\rho\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, m-1; \rho = 2, 3, \dots, m-1).$$

la symétrie de la forme bilinéaire $(m-1)$ -aire $f_m(x; y)$ devient évidente.

25. Si le lemme est supposé vrai pour

$$\rho = \beta + 2, \beta + 3, \dots, m-1,$$

la relation $[\beta]$ du n° 23 devient

$$[\beta_1] \quad y_1 s_{\beta+1}(x) + \Omega(y; x) = x_1 t_{\beta+1}(y) + \Omega(x; y),$$

où

$$\begin{aligned} \Omega(y; x) &= y_2 Q_{m-1-\beta}(K; x) + y_3 Q_{m-2-\beta}(K; x) + \dots \\ &\quad + y_{m-1-\beta} Q_2(K; x) \\ &= y_2 (K_1 x_{m-2-\beta} + K_2 x_{m-3-\beta} + K_3 x_{m-4-\beta} + \dots \\ &\quad + K_{m-3-\beta} x_2 + K_{m-2-\beta} x_1) \\ &\quad + y_3 (K_1 x_{m-3-\beta} + K_2 x_{m-4-\beta} + K_3 x_{m-5-\beta} + \dots \\ &\quad + K_{m-4-\beta} x_2 + K_{m-3-\beta} x_1) + \dots \\ &\quad + y_{m-2-\beta} (K_1 x_2 + K_2 x_1) + y_{m-1-\beta} K_1 x_1 \\ &= K_1 (x_1 y_{m-1-\beta} + x_2 y_{m-2-\beta} + \dots + x_{m-3-\beta} y_3 + x_{m-2-\beta} y_2) \\ &\quad + K_2 (x_1 y_{m-2-\beta} + \dots + x_{m-4-\beta} y_3 + x_{m-3-\beta} y_2) + \dots \\ &\quad + K_{m-2-\beta} x_1 y_2 \\ &= K_1 [Q_{m-\beta}(x; y) - y_1 x_{m-\beta-1}] \\ &\quad + K_2 [Q_{m-1-\beta}(x; y) - y_1 x_{m-2-\beta}] + \dots \\ &\quad + K_{m-2-\beta} [Q_3(x; y) - y_1 x_2] \\ &= \Phi(x; y) - y_1 (K_1 x_{m-\beta-1} + K_2 x_{m-\beta-2} + \dots + K_{m-2-\beta} x_2), \end{aligned}$$

où

$$\Phi(x; y) = \Phi(y; x) = K_1 Q_{m-\beta}(y; x) + \dots + K_{m-2-\beta} Q_3(x; y).$$

26. Transportons dans la relation $[\beta_1]$ ci-dessus les expressions de $\Omega(x; y)$ et de $\Omega(y; x)$ qui viennent d'être construites. L'expression symétrique Φ en x et y disparaît de part et d'autre et il reste la relation

$$\begin{aligned} [\beta_2] \quad & y_1 [s_{\beta+1}(x) - K_1 x_{m-\beta-1} - \dots - K_{m-\beta-2} x_2] \\ &= x_1 [t_{\beta+1}(y) - K_1 y_{m-\beta-1} - \dots - K_{m-\beta-2} y_2]. \end{aligned}$$

Introduisons la constante arbitraire $K_{m-\beta-1}$; la condition $[\beta_2]$ donne

$$s_{\beta+1}(x) = Q_{m-\beta}(x; K), \quad t_{\beta+1}(y) = Q_{m-\beta}(y; K).$$

C. Q. F. D.

SUR LES SYSTÈMES DE DEUX FONCTIONS UNIFORMES D'UNE VARIABLE
LIÉES PAR UNE RELATION ALGÈBRIQUE;

PAR M. ÉMILE PICARD.

I. Mon attention s'est reportée récemment sur une proposition générale que j'ai donnée jadis ⁽¹⁾, d'après laquelle *il ne peut exister de relation algébrique de genre supérieur à un entre deux fonctions uniformes d'une variable ayant un point singulier essentiel isolé.*

Comme je viens de l'indiquer dans les *Comptes rendus* ⁽²⁾, la méthode suivie peut être utilisée pour démontrer une proposition analogue à celle par laquelle M. Landau a généralisé, en 1904, mon premier théorème sur les fonctions entières. J'ai obtenu ainsi la proposition suivante :

Soit

$$(1) \quad f(x, y) = 0$$

une courbe de genre au moins égal à deux. Considérant un point (a, b) de cette courbe, on met à la place de x , dans l'équation (1), une fonction méromorphe de z dans un certain domaine autour de l'origine, dont le développement taylorien dans le voisinage de $z = 0$ est donné par la formule

$$x = a + a_1 z + \dots$$

On tire de (1) la fonction y de z , prenant pour $z = 0$ la valeur b . Les deux fonctions x et y de z ne pourront être simultanément méromorphes dans un cercle ayant l'origine pour centre et un rayon supérieur à $R(a, a_1)$, expression qui dépend seulement de a et de a_1 , et nullement des autres coefficients du développement de x .

Cet énoncé, qui présente une analogie évidente avec la propo-

⁽¹⁾ *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1883, et *Acta mathematica*, t. XI, 1887.

⁽²⁾ *Comptes rendus*, 15 janvier 1912.

sition de M. Landau, en diffère par le fait qu'il n'y a pas à envisager ici de valeurs exceptionnelles.

2. Le théorème précédent peut être généralisé en utilisant, au lieu de la fonction $\lambda(x, y)$ de ma Communication des *Comptes rendus*, une autre fonction de même nature. Je rappelle que, étant envisagée la courbe (1) de genre au moins égal à deux, il résulte de la théorie des fonctions fuchsienues de M. Poincaré qu'on peut former une fonction $\lambda(x, y)$ du point analytique (x, y) , holomorphe dans le voisinage de tout point de la surface de Riemann correspondant à (1), et pour laquelle le coefficient de i est toujours positif. Les diverses déterminations de $\lambda(x, y)$ se déduisent d'ailleurs de l'une d'elles par des substitutions linéaires et, de plus, l'inversion de λ conduit à exprimer x et y par des fonctions automorphes.

Au lieu d'employer la fonction $\lambda(x, y)$ dans les raisonnements, on peut utiliser une fonction $\pi(x, y)$ jouissant de propriétés analogues, sauf qu'elle admettra sur la surface de Riemann des points singuliers de nature logarithmique

$$(2) \quad (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \dots, (\alpha_q, \beta_q),$$

l'entier q étant quelconque.

Considérons maintenant deux fonctions x et y d'une variable z , satisfaisant à (1), méromorphes à l'intérieur du cercle C de rayon R ayant l'origine pour centre, et telles que le point (x, y) ne coïncide dans ce cercle avec aucun des points (α_h, β_h) de la suite (2). Substituons alors dans la fonction $\pi(x, y)$, à la place de x et y , les fonctions méromorphes de z dont il vient d'être parlé; la fonction π devient une fonction de z , holomorphe dans le cercle C , et le coefficient de i dans cette fonction est positif.

Il n'y a plus alors qu'à raisonner comme dans ma Note citée pour voir que *le rayon R est inférieur à une certaine fonction de a et de a_1 , en désignant toujours par*

$$x = a + a_1 z + \dots$$

le développement taylorien de x dans le voisinage de $z = 0$.

En particulier, les q points (α, β) peuvent être les n points à

l'infini de la courbe (supposée de degré n), et alors les fonctions envisagées x et y sont *holomorphes* dans le cercle C .

On remarquera que si $q = 0$, on a le théorème des *Comptes rendus*. Si la courbe était de genre zéro (cas exclu), le nombre q serait au moins égal à trois, et l'on aurait le théorème de M. Landau.

3. Indiquons une autre conséquence du même genre d'analyse dans un ordre d'idées différent. Divers géomètres ont indiqué d'importants théorèmes sur la convergence des suites des fonctions ⁽¹⁾. En laissant de côté le théorème élémentaire de Weierstrass, nous avons d'abord le théorème donné par Stieltjes dans son célèbre Mémoire sur les fractions continues, qui n'est d'ailleurs qu'un cas particulier d'un théorème plus récent de M. Vitali, susceptible d'être ainsi formulé : soient les fonctions

$$f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z), \dots$$

holomorphes dans le cercle C de rayon un , et telles que l'on ait, quel que soit n ,

$$|f_n(z)| < g,$$

g étant un nombre fixe. On suppose que $f_n(z)$ ait une limite pour une infinité de points de C ayant au moins un point de condensation à l'intérieur de C . *Dans ces conditions, $f_n(z)$ a une limite pour tous les points de l'intérieur du cercle, et cette limite est une fonction holomorphe de z à l'intérieur de C .*

Dans leur Mémoire cité, MM. Carathéodory et Landau font connaître un théorème remarquable pour lequel l'énoncé est celui de M. Vitali, *sauf que la condition*

$$|f_n(z)| < g$$

est remplacée par la condition qu'aucune des fonctions $f_n(z)$ ne prend dans le cercle C les valeurs a et b (a et b étant deux constantes distinctes).

⁽¹⁾ Voir, pour la bibliographie, un Mémoire récent de MM. Carathéodory et Landau [*Beiträge zur Convergenz von Funktionenfolgen* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Berlin*, 18 mai 1911)]. On consultera aussi sur ce sujet deux importantes Notes de M. Montel (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 20 novembre et 26 décembre 1911).

4. Nous devons nous attendre à avoir, dans le domaine des courbes *de genre supérieur à un*, un théorème analogue à celui de MM. Carathéodory et Landau, *mais où l'énoncé n'aura pas à envisager des valeurs exceptionnelles*.

Reprenant la courbe (1), soient

$$(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n), \dots$$

des couples de fonctions de la variable z , méromorphes dans un cercle C ayant l'origine pour centre et satisfaisant à l'équation (1). Nous allons établir le théorème suivant :

Si le couple (x_n, y_n) a une limite pour une infinité de points de C possédant au moins un point de condensation à l'intérieur de C , le couple (x_n, y_n) aura une limite pour tous les points de l'intérieur de C , et les coordonnées de ce couple limite sont des fonctions méromorphes de z .

Il suffira de reprendre la fonction $\lambda(x, y)$ dont nous avons parlé plus haut, ou plutôt la combinaison déjà utilisée

$$\frac{\lambda(x, y) - \lambda(a, b)}{\lambda(x, y) - \lambda_0(a, b)},$$

en désignant par (a, b) un point déterminé de la courbe, et représentant par $\lambda_0(a, b)$ la quantité conjuguée de $\lambda(a, b)$.

La fonction de z

$$\frac{\lambda(x_n, y_n) - \lambda(a, b)}{\lambda(x_n, y_n) - \lambda_0(a, b)}$$

est une fonction $G_n(z)$ holomorphe dans le cercle C , et dont le module est inférieur à l'unité. Nous obtenons ainsi une infinité de fonctions

$$G_1(z), G_2(z), \dots, G_n(z), \dots$$

holomorphes dans C et pour lesquelles

$$|G_n(z)| < 1.$$

On peut alors leur appliquer le théorème de M. Vitali, puisque $G_n(z)$, comme le couple (x_n, y_n) , a une limite pour une infinité de points du cercle C possédant au moins un point de condensation dans C . De la limite de G_n se déduit de suite l'existence de la

limite du couple (x_n, y_n) , puisque l'inversion de λ se fait d'une manière uniforme. Le reste de la démonstration est immédiat.

5. On pourrait multiplier les exemples d'extension aux courbes de genre supérieur à un de résultats établis pour une seule fonction uniforme. Ce que ces extensions présentent de curieux, c'est que des énoncés, où devait être admise l'existence de valeurs exceptionnelles, ne portent plus trace de valeurs de cette nature.

LES FONCTIONS MONOGÈNES NON ANALYTIQUES;

PAR M. ÉMILE BOREL.

I. — LE DOMAINE D'EXISTENCE.

Notre but étant de définir les fonctions monogènes dans des domaines plus généraux que ceux considérés jusqu'ici dans la théorie des fonctions analytiques, il est nécessaire d'étudier d'abord les propriétés de ces nouveaux domaines.

J'appellerai *domaine weierstrassien*, ou *domaine W*, un domaine dans lequel peut être définie une fonction analytique, au sens de Weierstrass. J'appellerai *domaines de Cauchy*, ou *domaines C*, en l'honneur du créateur de la théorie des fonctions monogènes, les domaines plus généraux que les domaines W, et dans lesquels peut être définie une fonction monogène uniforme. Nous verrons que les propriétés essentielles des fonctions monogènes dans les domaines C que nous définissons, sont les mêmes que dans les domaines W; ceci n'exclut pas la possibilité de définir des domaines C' plus généraux encore que nos domaines C. En d'autres termes, nous ne pouvons pas affirmer que notre généralisation embrasse *toutes* les fonctions monogènes uniformes : mais elle nous conduit à définir une classe C de telles fonctions, classe plus générale que la classe W des fonctions analytiques de Weierstrass.

Je me bornerai à exposer la définition des domaines C dans un

cas particulier; si l'on utilise un théorème que j'ai démontré sur les ensembles de mesure nulle, d'après lequel tout ensemble de mesure nulle peut être défini au moyen de points fondamentaux et de domaines d'exclusion, on reconnaît que le cas particulier exposé se généralise beaucoup.

Considérons un domaine W ; ce sera, pour fixer les idées, un cercle de rayon 2 ($|z| < 2$) et considérons un domaine intérieur dans lequel sont définis des points fondamentaux en infinité énumérable, qui peuvent être denses partout; pour fixer les idées, nous admettrons que ces points fondamentaux a_n sont les points à coordonnées rationnelles intérieurs au cercle $|z| < 1$. Nous admettons qu'à chaque point a_n est attaché un nombre positif r_n , ces nombres r_n tendant très rapidement vers zéro lorsque n croît indéfiniment; nous préciserons plus loin ce mode de décroissance; pour l'instant, nous admettrons seulement que le reste de la série convergente $r_1 + r_2 + \dots + r_n + \dots$ est inférieur au quart du dernier terme conservé: nous appellerons domaine C_p le domaine obtenu en excluant du domaine W les points intérieurs aux cercles $S_{p,n}$ définis comme il suit. Considérons les cercles $S'_{p,n}$ ayant pour centres les points a_n et pour rayons respectifs $\frac{r_n}{2^p}$; le cercle $S_{1,n}$ a pour centre a_1 , et son rayon est le plus petit des nombres compris entre $\frac{r_1}{2^p}$ et $\frac{r_1}{2^{p+1}}$ et tel qu'il ne coupe ⁽¹⁾ aucun des cercles $S'_{p,n}$ ($p > 1$); ces divers cercles sont donc ou intérieurs à $S_{1,n}$ (en y comprenant ceux qui sont tangents intérieurement), ou extérieurs à $S_{1,n}$ (en y comprenant ceux qui sont tangents extérieurement). Nous ne tiendrons plus compte des cercles intérieurs, et nous désignerons par a_{k_2} le point fondamental de plus petit indice correspondant aux cercles extérieurs; le cercle $S_{2,n}$ aura pour centre a_{k_2} et son rayon sera le plus petit des nombres compris entre $\frac{r_{k_2}}{2^p}$ et $\frac{r_{k_2}}{2^{p+1}}$ tel qu'il ne coupe aucun des cercles $S'_{p,n}$ ($p > k_2$); il ne coupe pas non plus le cercle $S_{1,n}$ et ne lui est même pas tangent

(¹) Ceci est possible en vertu de l'hypothèse $r_1 > \frac{1}{4} \sum_2^{\infty} r_k$, qui entraîne :

$$\frac{r_1}{2^p} - \frac{r_1}{2^{p+1}} > 2 \sum_2^{\infty} \frac{r_k}{2^p}.$$

extérieurement, puisque son rayon est certainement inférieur au rayon $\frac{r_{k_2}}{2^p}$ du cercle $S'_{k_2,n}$, et de même il est extérieur aux cercles $S'_{p,n}$ d'indice p inférieur à k_2 , car ces cercles, d'après la manière dont a_{k_2} a été choisi, sont intérieurs à $S_{1,n}$. On définira de même le cercle $S_{3,n}$, etc., et l'on voit que, si l'on désigne par C'_p le domaine obtenu en excluant les points intérieurs aux cercles $S'_{p,n}$, et par C_p le domaine obtenu en excluant les points intérieurs aux cercles $S_{p,n}$, tous les points de C'_p appartiennent à C_p , tandis que tous les points de C_p appartiennent à C'_{p+1} ; la considération des domaines C_p est donc équivalente à celle des domaines C'_p et évite les difficultés qui proviendraient des intersections des cercles.

Les points des circonférences $S_{p,n}$ sont dits constituer la frontière de C_p ; les points de C_p qui n'appartiennent pas à cette frontière sont dits *intérieurs* à C_p ; il importe d'observer que nous prenons ici le mot *intérieur* dans un sens différent du sens usuel dans la théorie des domaines W : il n'existe pas en général de cercle ayant son centre en un point intérieur et dont tous les points soient intérieurs. Les points de l'ensemble C_p , situés à l'intérieur du cercle de rayon 1 forment un ensemble parfait, qui peut être considéré comme l'ensemble dérivé de l'ensemble de ses points frontières $S_{p,n}$. Le domaine C est par définition l'ensemble de tous les points tel que chacun d'eux soit intérieur à un C_p ; comme les points de C_p (y compris la frontière) sont évidemment intérieurs à C_{p+1} , il serait indifférent dans cette définition de C de considérer les points de la frontière de C_p aussi bien que les points intérieurs; mais il nous sera plus commode de n'avoir à considérer que les points intérieurs. Le domaine C n'est pas parfait, puisqu'il ne contient pas les points a_n , qui en sont des points limites. Il est aisé de voir que l'ensemble (de mesure nulle) des points qui n'appartiennent pas à C , a la puissance du continu. Nous dirons qu'un domaine T est *intérieur* ⁽¹⁾ à C , lorsque tous les points de T appartiennent à un même C_p , d'indice fixe. Parmi les domaines intérieurs à C , nous considérerons à peu près exclusivement les domaines C_p : tous les points de C_p sont intérieurs à C_{p+1} .

(1) Rappelons encore une fois que le mot *intérieur* a ici un sens différent de celui qu'on lui donne habituellement, et en particulier dans la théorie des domaines W .

Le domaine C sera dit appartenir à la classe (C) des domaines de Cauchy que nous étudions ici si les nombres r_n sont tels qu'on a ⁽¹⁾

$$(1) \quad \lim_{n=\infty} \frac{n}{\log \log \log \frac{1}{r_n}} = 0,$$

Il est clair que si cette condition est vérifiée pour deux domaines C et D, elle est vérifiée pour la partie commune à C et D.

En même temps que les domaines C_p et C, nous considérerons, comme moyen auxiliaire de démonstration, des domaines que nous appellerons *domaines réduits* et que nous désignerons par Γ_p et Γ . A un domaine C correspond un système bien déterminé de domaines C_p , et une infinité de systèmes de domaines réduits; voici la définition d'un de ces systèmes. Donnons-nous des nombres ρ_n , tendant rapidement vers zéro lorsque n augmente indéfiniment, mais beaucoup moins rapidement que les r_n ; plus précisément, nous supposons que l'on a

$$(2) \quad \frac{1}{\rho_n^2} < \log \log \frac{1}{r_n}$$

et, en même temps, quel que soit le nombre fixe α

$$(3) \quad \lim_{n=\infty} n^\alpha \rho_n = 0,$$

ces deux conditions (2) et (3) sont bien compatibles en vertu de (1) ⁽²⁾.

Les domaines Γ_p sont définis au moyen des ρ_n comme les C_p au moyen des r_n , c'est-à-dire sont limités par des cercles de rayons compris entre $\frac{\rho_n}{2^p}$ et $\frac{\rho_n}{2^{p+1}}$, extérieurs les uns aux autres. Le domaine Γ

⁽¹⁾ On constatera aisément que la plupart des raisonnements et des résultats que nous allons obtenir s'étendraient sans difficulté au cas où les cercles d'exclusion $S_{p,n}$ auraient des rayons exprimés par la formule $r'_n + \frac{r_n}{2^p}$, les r'_n étant indépendants de p , mais tendant vers zéro plus rapidement que les r_n lorsque n augmente indéfiniment, de sorte que pour toute valeur fixe de p , le terme r'_n est asymptotiquement négligeable. Dans ce cas, le domaine exclu à l'infini n'est pas de mesure nulle, mais de mesure $\pi \Sigma r_n'^2$. Je développerai ultérieurement l'étude de ce cas.

⁽²⁾ Depuis que ceci a été écrit, j'ai pu remplacer (1), (2), (3) par des conditions plus larges. Voir *Comptes rendus*, mai et juin 1912, où j'indique aussi d'autres modes d'exposition de la théorie, préférables lorsqu'on veut l'étendre au cas des fonctions multiformes.

est formé par l'ensemble des points *intérieurs* (au sens indiqué plus haut) à quelque Γ_p . Les domaines Γ_p sont parfaits, Γ n'est pas parfait; l'ensemble complémentaire de Γ est de mesure nulle et a la puissance du continu.

Il est manifeste que l'ensemble C comprend tous les points de Γ , puisque C_p comprend tous les points de Γ_p ; mais C comprend en outre bien des points qui n'appartiennent pas à Γ .

L'utilité principale de la considération de Γ résulte de la proposition suivante :

Si une fonction des deux variables x, y coordonnées d'un point M est définie pour tous les points de C et continue sur tout domaine C_p , la connaissance de ses valeurs en tous les points de Γ entraîne la connaissance de ses valeurs en tous les points de C .

D'une manière abrégée, deux fonctions continues dans C (c'est-à-dire définies dans tout C et continues dans tout domaine *intérieur* à C) ne peuvent pas coïncider dans tout Γ sans coïncider dans tout C ; ou, enfin, *une fonction continue dans C et nulle dans Γ est nulle dans C .*

Soit, en effet, A un point de C ; ce point appartient à un ensemble C_p intérieur à C ; c'est un point limite de l'ensemble formé par la frontière ⁽¹⁾ de C_p ; il suffit pour prouver que la fonction est nulle en A , puisqu'elle est continue sur C_p , de démontrer qu'elle est nulle sur chacune des circonférences qui constituent cette frontière (on a déjà fait remarquer que chacune de ces circonférences est *intérieure* à C_{p+1}); or, sur l'une de ces circonférences (comme sur toute courbe rectifiable tracée dans le plan), les points qui font partie de Γ sont denses partout; la fonction continue sur cette courbe est donc nulle partout sur cette courbe si elle est nulle en tous les points de Γ .

Lorsque nous parlerons d'un domaine réduit, nous admettrons qu'il s'agit d'un domaine bien déterminé, les ρ_n étant choisis d'une manière précise, satisfaisant aux inégalités (2) et (3). Il pourra

⁽¹⁾ Nous négligeons les points A qui seraient intérieurs à C au sens de Weierstrass; pour eux la proposition est évidente, puisqu'ils sont centres de cercles ne renfermant à leur intérieur aucun a_n , ils sont aussi intérieurs à Γ au sens de Weierstrass.

arriver que nous ayons à considérer simultanément un autre domaine Γ' défini par des nombres ρ'_n ; si l'on a

$$(4) \quad \rho'_n = \frac{1}{\rho_n^\beta},$$

nous dirons que Γ' est d'ordre β par rapport à Γ ; si le nombre β est supérieur à l'unité, il est clair que les nombres ρ'_n vérifient les inégalités (2) et (3) du moment que les ρ_n les vérifient; en ce cas, l'ensemble Γ'_p est intérieur à Γ_p , car les cercles exclus de rayons $\frac{\rho'_n}{2^p}$ sont plus grands que les cercles de rayons $\frac{\rho_n}{2^p}$ (puisqu'on peut évidemment toujours supposer $\rho_n < 1$).

Remarquons enfin que les points de C_p situés sur une courbe quelconque, sur une droite pour fixer les idées, y forment un ensemble parfait, défini par des intervalles contigus (au sens de M. Baire), cordes interceptées par les cercles sur la droite. Cet ensemble peut ou non comprendre des intervalles; mais, en tout cas, il est parfait, et par suite une fonction continue sur C_p et nulle en tous les points qui limitent les intervalles contigus est nulle en tous les points de l'ensemble ainsi que toutes ses dérivées sur C_p .

II. — LA FONCTION MONOGÈNE.

Nous dirons qu'une fonction $f(z)$ est monogène dans un domaine tel que C si :

1° Elle est continue *dans* C (c'est-à-dire, comme nous l'avons expliqué, continue sur tout C_p , *intérieur* à C; l'ensemble C_p étant parfait, la continuité sur C_p est uniforme);

2° Elle admet en tout point M de C, par rapport à $z = x + iy$, une dérivée unique et continue (pour définir la dérivée, on considérera un des ensembles C_p dont fait partie M et, désignant par M' un autre point quelconque de C_p , on cherchera la limite du rapport

$$(5) \quad \frac{f(M') - f(M)}{\overline{MM'}},$$

lorsque le vecteur $\overline{MM'} = z' - z$ tend vers zéro; si cette limite existe pour toute valeur de p , elle est évidemment indépendante de cette valeur de p , puisque tous les points de C_p appartiennent

à C_{p+q} ; c'est pour cela que cette limite s'appellera la dérivée de $f(z)$ dans C , c'est-à-dire sur tout domaine *intérieur* à C . La continuité de la dérivée *dans* C s'entend comme la continuité de la fonction *dans* C : continuité sur tout C_p *intérieur* à C . Cette hypothèse de la continuité de la dérivée est sans doute superflue; mais elle simplifie l'exposition.

L'ensemble C_p étant parfait, toute fonction continue sur C_p est *bornée* sur C_p .

Nous allons démontrer la propriété fondamentale suivante de la fonction $f(z)$:

$$(6) \quad \int_K f(z) dz = \sum_n \int_{S_{p,n}} f(z) dz,$$

la courbe K étant une courbe simple quelconque dont tous les points sont intérieurs à C_p , la somme $\sum_n$ se rapportant à tous les cercles $S_{p,n}$ qui sont à l'intérieur de K ; les intégrales sont toutes prises dans le sens direct.!

Nous poserons

$$(7) \quad f(z) = P(x, y) + iQ(x, y),$$

de sorte que l'égalité (6) revient à deux égalités dont il suffit de démontrer l'une, par exemple

$$(8) \quad \int_K P dx - Q dy = \sum_n \int_{S_{p,n}} P dx - Q dy.$$

Pour démontrer cette relation, nous allons définir une fonction $P_1(x, y)$, finie et bien déterminée en tous les points intérieurs à K , et coïncidant avec $P(x, y)$ aux points intérieurs à K qui appartiennent à C_p ; il reste donc à définir $P_1(x, y)$ à l'intérieur des cercles $S_{p,n}$; sur la circonférence de ces cercles, elle coïncide avec $P(x, y)$. Nous définirons P_1 à l'intérieur du cercle par la condition que sur les cordes du cercle parallèles à Oy elle varie linéairement (sa valeur aux extrémités étant connue, puisqu'elle y coïncide avec P). La fonction P_1 ainsi définie est continue à l'intérieur de K et y admet en tout point une dérivée $\frac{\partial P_1}{\partial y}$; cette dérivée est bornée d'après l'hypothèse que les dérivées de P sont bornées [ce qui résulte de l'existence et de la continuité des

dérivées de $f(z)$]; en effet, aux points intérieurs à C_p la dérivée de P_1 coïncide avec la dérivée de P ; aux points intérieurs à $S_{p,n}$ la dérivée de P_1 est constante sur une corde parallèle à Oy et égale au quotient de la différence des valeurs de P_1 (c'est-à-dire de P) aux extrémités de la corde, par la longueur de cette corde. La différence des valeurs de P est, si l'on désigne par AB l'arc sous-tendu par la corde

$$(9) \quad \int_{AB} \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy.$$

Cette intégrale est inférieure au produit par la longueur de l'arc AB par la somme $\left| \frac{\partial P}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial P}{\partial y} \right|$ et son quotient par la corde AB est au plus égal à

$$\frac{\pi}{2} \left| \frac{\partial P}{\partial x} \right| + \frac{\pi}{2} \left| \frac{\partial P}{\partial y} \right|,$$

et est par suite borné en même temps que les dérivées $\left| \frac{\partial P}{\partial x} \right|$ et $\left| \frac{\partial P}{\partial y} \right|$. De même, les valeurs de P_1 étant comprises entre les valeurs de P , $|P_1|$ admet la même borne que $|P|$ ⁽¹⁾.

On a, d'après un résultat classique, en désignant par (K) l'aire intérieure à K

$$\int \int_{(K)} \frac{\partial P_1}{\partial y} dx dy = - \int_K P_1 dx = - \int_K P dx,$$

puisque sur K , P_1 coïncide avec P .

De même, $Q_1(x, y)$ étant défini au moyen de $Q(x, y)$ de la même manière que P_1 au moyen de P (en prenant toutefois des parallèles à Ox au lieu de parallèles à Oy):

$$\int \int_{(K)} \frac{\partial Q_1}{\partial x} dx dy = \int_K Q_1 dy = \int_K Q dy.$$

Il en résulte

$$(10) \quad \int_K P dx - Q dy = - \int \int_{(K)} \left(\frac{\partial P_1}{\partial y} + \frac{\partial Q_1}{\partial x} \right) dx dy.$$

(1) La dérivée $\frac{\partial P_1}{\partial y}$ est discontinue aux points des circonférences; ceci n'a pas d'inconvénient pour les démonstrations; on peut éviter cette difficulté, si l'on veut, en modifiant la définition de P_1 (c'est-à-dire en raccordant par des courbes convenablement choisies au lieu de raccorder par des droites). On a des résultats assez simples en prenant la somme d'une parabole et d'une sinusoïde.

L'intégrale double du second membre se réduit à zéro pour les portions de l'aire (K) qui appartiennent à C_p , puisqu'en un point intérieur à C_p , on a ⁽¹⁾

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} + \frac{\partial Q_1}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0.$$

La formule (10) se réduit donc à

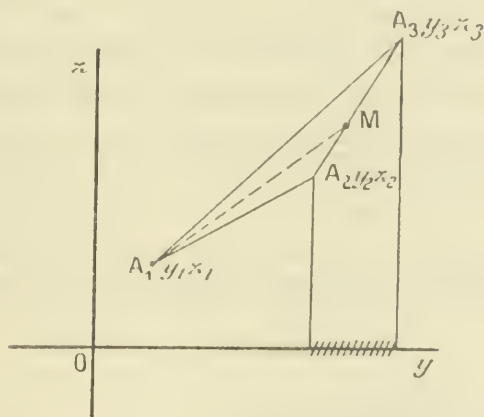
$$(11) \quad \int_K P \, dx - Q \, dy = - \sum \int \int_{(S_{pm})} \left(\frac{\partial P_1}{\partial y} + \frac{\partial Q_1}{\partial x} \right) dx \, dy.$$

Mais l'aire de $S_{p,n}$ est égale à $\frac{\pi r_n^2}{4^p}$; d'autre part, les modules de $\frac{\partial P_1}{\partial y}$ et $\frac{\partial Q_1}{\partial x}$ sont inférieurs à un nombre fixe indépendant de n (dépendant de p , mais p est fixe); on a donc

$$(12) \quad \left| \int_K P \, dx - Q \, dy \right| < M \sum r_n^2.$$

⁽¹⁾ Une explication complémentaire est peut-être ici nécessaire; à l'intérieur de C_p , P_1 coïncide avec P , mais P_1 est défini en des points où P n'est pas défini; peut-on dès lors conclure de l'existence de la dérivée de P , $\frac{\partial P}{\partial y}$, à l'existence de la dérivée de P_1 , et au fait que cette dérivée est égale à celle de P .

Si l'on considère la représentation géométrique de $P(x, y)$ pour $x = x_0$ fixe et y variable, soit $z = P(x_0, y)$, et que l'on désigne par A_2 et A_3 les points (y_2, z_2)



(y_3, z_3) qui correspondent à un intervalle contigu à C_p , y_2, y_3 , on remplace z dans cet intervalle par une droite A_2, A_3 ; la pente de la droite $A_1 M$ qui joint le point y_1, z_1 correspondant à un point y_1 de C_p à un point quelconque M de cette droite, $A_2 A_3$ est comprise entre les pentes $A_1 A_2$ et $A_1 A_3$ des droites qui joignent A_1 aux extrémités A_2 et A_3 ; par hypothèse les pentes de $A_1 A_2$ et $A_1 A_3$ tendent vers $\frac{\partial P}{\partial y}$ lorsque A_2 et A_3 tendent vers A_1 ; il en est de même de $A_1 M$, c'est-à-dire que $\frac{\partial P}{\partial y}$ existe et est égal à $\frac{\partial P}{\partial y}$.

Il est aisé de tirer de là la formule (6); la série $\sum r_n^2$ étant, en effet, convergente, nous pouvons choisir n de manière que le reste de cette série $\sum_{n+1}^{\infty} r_n^2$ soit inférieur à $\frac{\varepsilon}{M}$. Le nombre n étant ainsi choisi, désignons par K' le contour formé par le contour K parcouru dans le sens direct et les circonférences $S_{p,1}, S_{p,2}, \dots, S_{p,n}$ parcourues dans le sens rétrograde; nous pourrions raisonner sur K' comme nous avons fait sur K (en le complétant, si nous voulons, par des coupures rectilignes pour en faire un contour simple); nous obtiendrons ainsi

$$\left| \int_{K'} P dx - Q dy \right| < M \sum_{n+1}^{\infty} r_n^2 < \varepsilon,$$

c'est-à-dire, les intégrales étant prises dans le sens direct,

$$\left| \int_K P dx - Q dy - \sum_1^n \int_{S_{p,n}} P dx - Q dy \right| < \varepsilon.$$

En faisant tendre ε vers zéro, n croît indéfiniment, et l'on obtient bien la relation (8), d'où l'on conclut de suite la relation (6).

Nous allons, au moyen de (6), obtenir une expression analytique de $f(z)$ valable à l'intérieur du domaine réduit Γ_p . Soit x un point intérieur à Γ_p et σ_q un cercle ⁽¹⁾ de centre x , intérieur à C_p et dont le rayon soit compris entre $\frac{1}{2q}$ et $\frac{1}{2q+1}$.

⁽¹⁾ Il existe bien un tel cercle, quel que soit le nombre q (au moins à partir d'une certaine valeur de q). En effet, x étant intérieur à Γ_p , on a quel que soit n

$$|x - a_n| > \frac{1}{2p} \rho_n.$$

Par suite, les points a_n tels que l'on ait

$$|x - a_n| < \frac{1}{2q+1},$$

sont tels que l'on a

$$(13) \quad \frac{1}{2p} \rho_n < \frac{1}{2q+1},$$

Désignons par n_q la plus petite des valeurs de n à partir de laquelle cette inégalité (13) est vérifiée; tous les a_n intérieurs au cercle de centre x et de rayon $\frac{1}{2q+1}$ ont des indices supérieurs ou égaux à n_q ; la somme $\frac{1}{2p} \sum r_n$ des rayons des cercles

Considérons la fonction

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{z - x}$$

dans le domaine compris entre le contour K et σ_q ; il est clair que dans ce domaine cette fonction est monogène; nous obtenons donc la relation

$$\int_K \frac{f(z) dz}{z - x} - \int_{\sigma_q} \frac{f(z) dz}{z - x} = \sum' \int_{S_{p,n}} \frac{f(z) dz}{z - x},$$

la somme du second membre se rapportant aux $S_{p,n}$ qui sont compris entre K et σ_q .

Si l'on désigne par M le maximum de $|f(z)|$ dans C_p , le maximum de $|\varphi(z)|$ sur ces divers $S_{p,n}$ est évidemment $2^{q+1}M$; si l'on remplace q par $q+1$, il s'introduit dans le second membre une infinité de nouveaux termes, mais il est aisé de voir que les longueurs des chemins d'intégration (circonférences $S_{p,n}$ comprises entre σ_q et σ_{q+1}) ont une somme dont l'ordre de grandeur est de beaucoup inférieur à $\frac{1}{2^{q+1}}$; le second membre est donc une série convergente et l'on a

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \int_{\sigma_q} \frac{f(z) dz}{z - x} = \int_K \frac{f(z) dz}{z - x} - \sum \int_{S_{p,n}} \frac{f(z) dz}{z - x},$$

le signe Σ se rapportant maintenant à toutes les circonférences $S_{p,n}$ qui limitent C_p . Quant au premier membre, il résulte de la continuité de $f(z)$ au point x dans C_p , tous les σ_q étant intérieurs à C_p , qu'il est égal à $2\pi i f(x)$. On obtient donc la formule de Cauchy généralisée

$$(14) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(z) dz}{z - x} - \sum_n \frac{1}{2\pi i} \int_{S_{p,n}} \frac{f(z) dz}{z - x}.$$

correspondants dans C_p est donc extrêmement petite par rapport à $\frac{1}{2^p} \rho_{n_q}$ puisque les r_n sont beaucoup plus petits que les ρ_n correspondants; cette somme étant extrêmement petite par rapport à $\frac{1}{2^{q-1}}$, il existe des cercles de centre x et de rayon compris entre $\frac{1}{2^q}$ et $\frac{1}{2^{q+1}}$ et qui ne coupent aucun de ces cercles $S_{p,n}$; ils ne coupent pas *a fortiori* les cercles $S_{p,n}$ dont les centres sont plus éloignés de x , car les rayons $\frac{r_n}{2^p}$ de ces autres cercles sont très petits par rapport aux $\frac{\rho_n}{2^p}$ et leurs centres sont plus distants de x que $\frac{\rho_n}{2^p}$.

On déduit de cette formule les conséquences classiques, et en particulier le fait que la *monogénéité* (*existence de la dérivée première*) dans le domaine G entraîne l'existence des dérivées de tous les ordres.

III. — LE PROLONGEMENT PAR LES SÉRIES (M).

Nous allons maintenant supposer que le point x est intérieur à un domaine réduit Γ'_p , d'ordre égal à 2 par rapport à Γ_p (les cercles d'exclusion sont définis au moyen de nombres φ'_n qui sont égaux à $\sqrt{\varphi_n}$); il est alors évident que l'on peut tracer une infinité de droites issues du point x et intérieures à Γ_p . Plus précisément, si x appartient à Γ'_p , à l'intérieur de tout angle donné ayant son sommet en x , on peut trouver une droite intérieure à un $\Gamma_{p'}$ d'indice convenable, cet indice p' pouvant croître indéfiniment lorsque l'angle tend vers zéro, mais étant déterminé lorsque l'angle est donné : cela résulte de ce que la somme des angles sous lesquels on voit du point x les cercles qui limitent $\Gamma_{p'}$ est inférieure au double de la somme de la série convergente $\sum \left(\frac{\varphi_n}{2^{p'}} : \frac{\varphi'_n}{2^{p'}} \right)$ et est par suite aussi petite qu'on veut si p' est pris assez grand. Nous supposons, pour ne pas compliquer les notations, que p a été pris dans ce qui précède égal à p' (le point x intérieur à Γ'_p est intérieur *a fortiori* à $\Gamma'_{p'}$ si $p' > p$).

Nous allons développer $f(x)$ en série sur une des droites que nous venons de définir, droite intérieure à Γ_p . Chacun des termes du second membre de (14) est une fonction analytique sur cette droite et peut, par suite, être développé en une série de polynômes de Mittag-Leffler ou (M); il suffit de montrer que la série multiple formée par l'ensemble de ces séries est absolument convergente pour être assuré qu'elle représente $f(x)$.

Cette série sera alors formée au moyen des dérivées de $f(x)$ au point x_0 , dérivées qui existent, comme nous l'avons remarqué, d'après (14) pour tout déplacement sur la droite, et pour tout déplacement dans Γ_p , de la même manière que le développement (M) d'une fonction analytique est formé au moyen des dérivées de cette fonction; nous allons supposer, pour abrégier l'écriture $x_0 = 0$.

Je rappelle les propriétés des développements (M) que j'ai démontrées dans mon Mémoire sur les séries de polynômes et de

fractions rationnelles (*Acta mathematica*, t. XXIV). On a

$$(15) \quad \frac{1}{1-z} = \sum G_n(z),$$

les $G_n(z)$ étant des polynomes qu'il est inutile de récrire et la série

$$\sum |G_n(z)|$$

étant convergente dans toute l'étoile. On considère le domaine $S(R, \rho)$ défini comme il suit : R étant > 1 et $\rho < 1$ on considère le cercle de centre O et de rayon R , le cercle de centre 1 et de rayon ρ et les tangentes à ce dernier cercle issues de O , tangentes dont les points de contact sont A' et B' ; le domaine $S(R, \rho)$ est limité par l'arc $A'B'$ plus petit que π , les prolongements $A'A''$ et $B'B''$ de OA' et OB' jusqu'à la circonférence de rayon R et l'arc $A''B''$ plus grand que π . On a, dans ce domaine, en posant $\frac{32R}{\rho} = \lambda$,

$$(16) \quad \sum |G_n(z)| < R^{\lambda^{\lambda}}.$$

Considérons une intégrale le long d'une des circonférences $S_{p,n}$, de rayon $\frac{r_n}{2^p}$:

$$(17) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{S_{p,n}} \frac{f(z) dz}{z-x},$$

nous la développons sur une droite intérieure à Γ_p , c'est-à-dire extérieure à la circonférence de même centre a_n que $S_{p,n}$ et de rayon $\frac{\rho_n}{2^p}$. Le rayon $\frac{r_n}{2^p}$ étant très petit par rapport à ρ_n , nous ne commettons pas d'erreur sensible en remplaçant cette intégrale par la fonction majorante $\frac{M r_n}{a_n - x}$, en désignant par M le maximum de $|f(z)|$ dans C_p , $2\pi r_n$ étant la longueur du chemin d'intégration (nous supprimons les facteurs 2^p , qui sont sans influence, p étant fixe). Si l'on pose $x = a_n x'$, on a :

$$(18) \quad \frac{M r_n}{a_n - x} = \frac{M r_n}{a_n} \frac{1}{1-x'}.$$

Si le point x est intérieur à un domaine $S(R, \rho)$ défini par le

cercle de rayon $\frac{\rho_n}{2\rho}$, de centre a_n , et le cercle de rayon 2 qui comprend à son intérieur tous les domaines que nous considérons, le point $x' = \frac{x}{a_n}$ sera intérieur à un domaine $S \left(\frac{2}{|a_n|}, \frac{\rho_n}{|a_n|} \right)$ et l'on aura, pour le développement de $\frac{1}{1-x'}$, l'inégalité

$$\Sigma |G_n(x')| < \left[\frac{2}{|a_n|} \right]^{\lambda^\lambda},$$

en posant $\lambda = \frac{64}{\rho_n}$; comme $|a_n|$ est supérieur à ρ_n , on peut écrire :

$$\Sigma |G_n(x')| < \lambda \lambda^\lambda.$$

Le développement de (M) de (17) est, d'après (18), lorsqu'on remplace tous les termes par leurs modules, inférieur à

$$\frac{Mr_n}{|a_n|} \lambda \lambda^\lambda.$$

Mais l'on a d'après (2)

$$\frac{1}{r_n} > e e^{\frac{1}{\rho_n^2}}$$

et si n est assez grand $\frac{1}{\rho_n^2} > \lambda^{\frac{3}{2}}$ puisque $\lambda = \frac{64}{\rho_n}$; on a donc, $|a_n|$ étant $> \rho_n$,

$$\frac{Mr_n}{|a_n|} \lambda \lambda^\lambda < \lambda M \lambda \lambda^\lambda e^{-e^{\lambda^{\frac{3}{2}}}}$$

et ceci converge très rapidement vers zéro lorsque n et par suite λ augmentent indéfiniment. La convergence absolue de la série (M) est donc démontrée.

Considérons maintenant deux points x_1 et x_2 appartenant à Γ ; nous pouvons construire deux angles A_1 et A_2 de sommets x_1 et x_2 et tels que toute demi-droite D_1 intérieure à A_1 rencontre toute demi-droite D_2 intérieure à A_2 en un point x_3 intérieur au domaine total considéré. Nous pouvons choisir D_1 et D_2 de telle manière que ces deux droites appartiennent toutes deux à un même Γ_p (p étant choisi assez grand, mais pouvant ensuite rester fixe). Il sera donc possible d'arriver à calculer la fonction en x_2 au moyen de ses valeurs et des valeurs de ses dérivées en x_1 en formant seulement deux développements (M), l'un d'origine x_1 et le

second d'origine x_3 . Si la fonction est nulle en x_1 ainsi que toutes ses dérivées, ces développements (M) sont identiquement nuls et la fonction est nulle en x_2 . Il suffit de se rapporter à ce que nous avons dit plus haut pour conclure que si une fonction monogène est nulle en tous les points d'un arc si petit qu'il soit (en tous les points de cet arc intérieurs à C), comme il existe sur cet arc au moins un point intérieur à Γ_p limite de points intérieurs à Γ_p , la fonction étant nulle en tous ces points est nulle, ainsi que ses dérivées, en au moins un point de Γ_p , par suite identiquement nulle dans Γ_p (quel que soit p), et identiquement nulle dans C. Nos nouvelles fonctions monogènes possèdent donc bien la propriété fondamentale des fonctions analytiques.

SUR LES PRODUITS DIRECTS;

PAR M. DE SÉGUIER.

On connaît la propriété invariante des bases d'un groupe abélien d'ordre fini. Dans le Tome 139 du *Journal de Crelle* (p. 293-308), M. Remak a fait connaître une propriété invariante plus générale appartenant à tout produit direct. Le théorème ayant une forme bien classique, il ne sera peut-être pas inutile d'en donner une démonstration plus simple. Cette démonstration résulte, d'ailleurs, d'une remarque ayant, par elle-même, quelque intérêt sur les diviseurs maximum des produits directs ⁽¹⁾.

1. Soit A le produit direct des groupes $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$ (Λ_i sera dit *facteur direct* de A, et *réduit* s'il n'est pas produit direct). Si $\Pi_1^n a_i = \Pi_1^n x_i$, a_i et x_i étant dans Λ_i , a_i coïncide avec x_i , car $a_i x_i^{-1}$ par exemple, étant dans $\Pi_2^n \Lambda_i$, est égal à 1. Si donc $\Pi_1^n a_i$ est permutable à $\Pi_1^n a'_i$, a'_i étant dans Λ_i , a_i l'est à a'_i .

⁽¹⁾ Je me servirai, dans ce qui suit, de la même terminologie et des mêmes notations que dans mes *Éléments de la théorie des groupes abstraits* (Paris, 1904) et dans mes *Éléments de la théorie des substitutions* (Paris, 1912). On en trouvera un index à la fin du second Ouvrage.

Si le groupe $G = \Sigma g (g = \Pi_1^n g_i, g_i \text{ étant dans } A_i^{(1)})$ divise A , le p. g. c. d. D_i de G , A_i est normal dans $\mathfrak{A}_i = \Sigma g_i$ ($\mathfrak{A}_i$ sera dit le constitutif de G dans A_i), car le p. g. c. d. $g_i^{-1} D_i g_i$ de $g^{-1} \Pi_1^n D_k g (\leq G)$ avec A_i est $\leq D_i$. De plus $\mathfrak{A}_i | D_i \equiv G | \Pi_1^n D_k$ ⁽²⁾.

Si $n = 2$, et si $D_1 = A_1$, G , contenant évidemment $\mathfrak{A}_2$, est le produit direct de A_1 par $\mathfrak{A}_2 = D_2$.

Si G divise le central A_0 de A , $\mathfrak{A}_i$ divise celui A_{i0} de A_i , d'où $A_0 = \Pi A_{i0}$.

Ces remarques n'ont, d'ailleurs, rien de nouveau.

2. Il est clair que $\Pi \mathfrak{A}_i$ est $\geq G \geq \Pi D_i$. Soit $D_{ik\dots l}$ le p. g. c. d. de G avec $A_i A_k \dots A_l$, et $\mathfrak{A}_{ik\dots l}$ le constitutif de G dans $A_i A_k \dots A_l$. Pour $k < n$, $D_{12\dots k} = \Pi_1^k D_i (D_{1\dots n} = G)$, car $\mathfrak{A}_n | D_n$ est isomorphe d'une part à $G | \Pi_1^n D_i$ et d'autre part, en prenant $\mathfrak{A}_{1\dots k}$, $\mathfrak{A}_{k+1}$, ..., $\mathfrak{A}_n$ pour constitutifs de G , à $G | D_{1\dots k} \Pi_{k+1}^n D_i$. De plus, si $G < A$, $\mathfrak{A}_{ik}$ ne peut pas être égal à $A_i A_k$ quels que soient i et k . Cela est clair si $n = 2$. Soit $n > 2$. L'équation $A_i A_k | D_i D_k = A_l | D_l$ (i, k, l étant distincts) donne, en désignant les ordres de A_i , D_i par α_i , δ_i , $\frac{\alpha_i \alpha_k}{\delta_i \delta_k} = \frac{\alpha_l}{\delta_l}$, d'où, en permutant i, k, l et en multipliant, $\alpha_i \alpha_k \alpha_l = \delta_i \delta_k \delta_l$. Donc δ_i serait égal à α_i pour $i = 1, \dots, n$, et G à A .

Si $\mathfrak{A}_1$ est $< A_1$, G est $\leq \mathfrak{A}_1 \Pi_2^n A_i < A$. Supposons que $\mathfrak{A}_i = A_i$ quel que soit i , et soit $A_{12} < A_1 A_2$. Si alors $\mathfrak{D}_i$ est le p. g. c. d. de $\mathfrak{A}_{12}$ avec A_i , $\mathfrak{D}_i$ est $< A_i$ (1). Donc *a fortiori* D_1 est $< A_1$ et $D_2 < A_2$ (D_1 est $\leq (\mathfrak{D}_1)$ et $D_2 \leq (\mathfrak{D}_2)$). Donc G est $\leq \mathfrak{A}_{12} A_3 \dots A_n < A$. Si donc G est maximum dans A , il est, ou de la forme $B \Pi_2^n A_i$, B étant maximum dans A_1 , ou de la forme $C \Pi_3^n A_i$, C étant maximum dans $A_1 A_2$ et ayant pour constitutifs A_1 et A_2 .

Si de plus A_1 et A_2 sont réduits, C est réduit. En effet, $A_1 | D_1 \equiv A_2 | D_2$ est ici simple ⁽³⁾. Donc D_1 est $\geq A_{10}$ et $D_2 \geq A_{20}$. Supposons C produit direct de C' et C'' , et soient $\mathfrak{A}'_i$, $\mathfrak{A}''_i$ les cons-

(1) G est ici représenté comme la somme symbolique de ses éléments.

(2) Voir, par exemple, le n° 27 des *Éléments de la théorie des substitutions*, ou le n° 65 des *Éléments de la théorie des groupes abstraits*. La représentation de A obtenue en remplaçant chaque A_i par une de ses représentations transitives facilite beaucoup l'étude actuelle.

(3) *Loc. cit.*

titutifs respectifs de C' et C'' dans A_i . Le constitutif A_i de C est alors $\mathfrak{A}'_i \mathfrak{A}''_i$, et, les éléments de $\mathfrak{A}'_i$ étant permutable à ceux de $\mathfrak{A}''_i$, le p. g. c. d. $\mathfrak{D}_i$ de $\mathfrak{A}'_i, \mathfrak{A}''_i$ est $\leq A_{i0} \leq D_i$. Or soit $c' = a'_1 a'_2$, un élément de C' et $c'' = a''_1 a''_2$ un élément de C'' , a'_i étant dans $\mathfrak{A}'_i$ et a''_i dans $\mathfrak{A}''_i$. $\mathfrak{D}_i$ étant $\leq D_i$, on peut former un élément $c' c''$ de C où a'_1 et a''_1 sont arbitraires dans $\mathfrak{D}_i$ et $a'_2 a''_2 = 1$. Or si $\mathfrak{D}_i$ est > 1 , on peut y prendre $a'_1 = a'^{-1}_1 \neq 1$, d'où $c'' = c'^{-1} \neq 1$, ce qui ne se peut. Donc $\mathfrak{D}_i = 1$. Mais alors, ou bien A_i serait produit direct, ou bien l'on aurait, par exemple, $\mathfrak{A}'_2 = \mathfrak{A}''_2 = 1$ et $c = \mathfrak{A}'_1 \mathfrak{A}''_2$, contre les hypothèses.

3. Soit $A' = \Pi'_i A'_i$ (les A'_i étant facteurs directs) un groupe isomorphe à A , les A_i et les A'_i pouvant n'être pas réduits. Si, dans l'isomorphisme considéré, $a' = \Pi a'_i$ (a'_i étant dans A'_i) répond à $a = \Pi a_i$ (a_i étant dans A_i), on obtient un homomorphisme de A'_k à A_i en faisant correspondre a'_k à a_i . Cet homomorphisme peut, d'ailleurs, n'être pas isomorphe, même si $A'_k \equiv A_i$. Ainsi, pour $n = n' = 2$, $A_1 = \{\alpha, \beta\}$ ($\alpha^2 = \beta^3 = 1, \alpha\beta = \beta\alpha$), $A_2 = \{\gamma\}$ ($\gamma^3 = 1$), $A'_1 = \{\alpha', \beta'\}$ ($\alpha'^2 = \beta'^3 = 1, \alpha'\beta' = \beta'\alpha'$), $A'_2 = \{\gamma'\}$ ($\gamma'^3 = 1$), $a = \alpha^x \beta^y \gamma^z$ ($a_1 = \alpha^x \beta^y, a_2 = \gamma^z$), $a' = \alpha'^x \beta'^y (\beta' \gamma')^z$ ($a'_1 = \alpha'^x \beta'^y, a'_2 = \gamma'^z$), à chaque $a_1 = \alpha^x \beta^y$ répondent les trois $a'_1 = \alpha'^x \beta'^{y+z}$ ($z = 0, 1, 2$), et à chaque $a'_1 = \alpha'^z \beta'^y$, les trois $a_1 = \alpha^x \beta^{y+z}$ ($z = 0, 1, 2$).

Si $n = n' = 2$, et si, dans l'isomorphisme de A à A' , A_2 répond isomorphiquement à A'_2 , la correspondance de ceux des éléments a et a' où $a_2 = a'_2 = 1$ fournit un isomorphisme de A_1 à A'_1 bien que la correspondance de tous les a à tous les a' puisse ne fournir qu'un homomorphisme non isomorphe de A_1 à A'_1 (l'exemple précédent le montre). Il est clair d'ailleurs qu'à chaque isomorphisme de A_1 à A'_1 et de A_2 à A'_2 répond un isomorphisme de A à A' .

4. Deux divisions X et X' de A sont dits *centralement isomorphes* dans A quand on peut établir entre eux une correspondance isomorphe où l'élément x' de X' qui répond à l'élément x de X est $\equiv x \bmod A_0$ (alors $A_0 X = A_0 X'$). Une telle correspondance, *effectivement établie*, sera dite abrégativement *correspondance centrale* de X à X' dans A .

Soit $A' = \Pi'_i A'_i$ (les A'_i étant facteurs directs) un groupe

centralement isomorphe à A dans le produit direct de A par un groupe abélien déterminé quelconque K ($AK = A'K$), les A_i et les A'_i étant réduits. Alors $n' = n$, et l'on peut établir entre A et A' une correspondance centrale dans AK où chaque A'_i correspond centralement à un A_i dans AK .

On peut admettre le théorème quel que soit K pour des groupes A et A' d'ordre moindre. Soit $\mathcal{C}$ une correspondance centrale donnée de A à A' dans AK . Supposons d'abord qu'un A_i tel que A_1 soit centralement isomorphe dans AK à un A'_i tel que A'_1 , et soit A'' le groupe déduit de A en y remplaçant A_1 par A'_1 . Il résulte immédiatement des équations de A qu'on obtient une correspondance centrale $\mathcal{C}'$ de A'' à A dans AK en remplaçant dans $\mathcal{C}$ chaque élément de A_1 par l'élément de A'_1 qui lui correspond (dans $\mathcal{C}$). Soit $\Pi''_1 a'_i$ (a'_i étant dans A'_i) l'élément de A' qui répond dans $\mathcal{C}'$ à $a'_i \Pi''_2 a_i$ (a_i étant dans A_i) de A'' . La considération des éléments où $a'_i = 1$ montre que $\Pi''_2 A_i$ répond, dans $\mathcal{C}$ comme dans $\mathcal{C}'$ à $\Pi''_2 A'_i$, et l'on est ramené à des groupes d'ordre moindre.

Supposons donc qu'aucun A_i ne soit centralement isomorphe dans AK à un A'_i . Supposons aussi A_1 d'ordre non premier (si tous les A_i sont d'ordre premier, on peut supposer qu'il en est de même des A'_i , sans quoi on échangerait A et A' ; le théorème est alors évident, A et A' ayant le même ordre), et soit B un diviseur maximum de A_1 . Alors $G = B \Pi''_2 A_i$ est un diviseur maximum de A_i contenant A_0 . Son correspondant par $\mathcal{C}$ dans A' a la forme $G' = X \Pi' A'_i$, X étant, ou un diviseur maximum B' de A'_1 , ou un diviseur C' de constitutifs A'_1 et A'_2 , maximum dans $A'_1 A'_2$ et réduit : Π' s'étend, si $X = B'$, à $A'_2, \dots, A'_{n'}$, et si $X = C'$, à $A'_3, \dots, A'_{n'}$. Il est clair que $\mathcal{C}$ fournit une correspondance centrale de G à G' dans GKA_0 , et le théorème peut être admis relativement à cet isomorphisme central. Or A_n , qui n'est centralement isomorphe dans AK à aucun A'_i , ne l'est, dans $GKA_0 (= G'KA_0)$ à aucun A'_i de Π' . Car si, dans un tel isomorphisme, un élément x de A_n correspondait à un élément $x' = z_1 a_0 x$ de A'_j , a_0 étant dans KA_0 et z_1 dans A_1 hors de A_0 , le normalisant de x' dans A' serait d'ordre inférieur à celui de x dans A [pour que $a_1 \dots a_n$ (a_i étant dans A_i) soit permutable à $z_1 a_0 x$, il faut que a_1 le soit à z_1 , et le normalisant de z_1 est $< A_1$]. Donc A_n est centralement isomorphe dans GKA_0 à un facteur direct Δ de X , et AK est produit direct

de $A_1, \dots, A_{n-1}, \Delta, K$. Si alors $X = B' < A'_1, A'_1$, diviseur du produit direct de Δ par $K \Pi_1^{n-1} A_i$ et contenant Δ , n'est pas réduit (1), contre l'hypothèse. Si $X = C' < A'_1 A'_2, C'$, étant réduit, est centralement isomorphe dans $G K A_0$ à A_n . Donc, si $n > 2$, puisque le théorème est admis pour G et G' dans $G K A_0$, un des A_i est centralement isomorphe dans $A K$ à un A'_i , contre l'hypothèse. Si $n = 2$, on peut supposer aussi que $n' = 2$ (sans quoi on échangerait A et A'), et l'équation $BA_2 = C'$ donne $B = 1$. Donc A_1 serait d'ordre premier, contre l'hypothèse.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES SÉRIES A TERMES POSITIFS;

PAR M. ARNAUD DENJOY.

De toute série convergente à termes positifs, on peut déduire, suivant des règles fixes, des séries de même nature mais convergeant plus lentement que les premières. D'une façon précise, u_n étant le terme général de la première série, il est possible de définir une série convergente $v_n = u_n \omega_n$, ω_n étant une fonction donnée des u , croissant indéfiniment avec n . Habituellement, r_n étant le reste de la série arrêtée au terme u_n , c'est-à-dire r_n étant la somme de la série $u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$, ω_n est une fonction donnée de r_n et des restes voisins. Je veux, dans cette Note, déterminer d'un certain point de vue le champ où peut varier cette fonction ω_n assurant la convergence de v_n , et, à cette fin, indiquer des types de fonctions ω_n très voisins des précédents, mais entraînant la divergence de v_n ; en un mot, et pour parler le langage de P. du Bois-Reymond, trouver parmi les fonctions ω la séparation correspondant à la limite entre la convergence et la divergence des séries v_n .

1. J'utiliserai pour établir ces résultats, l'artifice employé par Cauchy pour découvrir par le calcul d'une intégrale indéfinie la convergence ou la divergence d'une série.

PREMIER THÉORÈME. — $\varphi(x)$ étant une fonction positive, définie pour x positif et inférieur ou égal à a , décroissante

(*infinitement grande quand x est infinitement petit*); selon que l'intégrale $\int_0^x \varphi(x) dx$ a ou non un sens, la série $u_n \varphi(r_{n-1})$ est convergente, ou la série $u_n \varphi(r_n)$ est divergente.

Considérons une fonction $r(x)$ égale à r_x quand x est entier et variant linéairement entre deux valeurs entières consécutives de x . On vérifie immédiatement l'égalité

$$r(x) = u_n(n - x) + r_n \quad \text{pour} \quad n - 1 \leq x \leq n.$$

La fonction $r(x)$ est une fonction décroissante et tendant vers zéro quand x croît indéfiniment. $\varphi[r(x)]$ est donc une fonction de x croissante et infinitement grande simultanément avec x . Elle peut d'ailleurs n'exister qu'à partir d'une certaine valeur de x , suffisamment grande pour rendre $r(x)$ inférieur à a . Nous supposons évidemment, dans l'énoncé du théorème, $n - 1$ supérieur à cette valeur, ce qui est parfaitement loisible, la convergence ou la divergence d'une série ne dépendant pas des modifications apportées à un nombre fini de ses termes. x variant dans le champ que nous venons d'indiquer, on a les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} r_{n-1} &> r(x) > r_n & \text{pour} & \quad n - 1 < x < n, \\ \varphi(r_{n-1}) &< \varphi[r(x)] < \varphi(r_n). \\ \varphi(r_{n-1}) &< \int_{n-1}^n \varphi[r(x)] dx < \varphi(r_n). \end{aligned}$$

En multipliant par u_n les trois termes des deux dernières inégalités, et en remarquant que $u_n dx = -dr(x)$ dans l'intervalle $n - 1$ à n , on trouve :

$$u_n \varphi(r_{n-1}) < \int_{r_n}^{r_{n-1}} \varphi(u) du < u_n \varphi(r_n).$$

Donc

$$\sum_{n_0}^m u_n \varphi(r_{n-1}) < \int_{r_m}^{r_{n_0}} \varphi(u) du < \sum_{n_0}^m u_n \varphi(r_n).$$

Il suffit maintenant de faire croître m indéfiniment pour rendre évident le résultat énoncé.

Si l'intégrale $\int_0^{r_{n_0}} \varphi(u) du$ a un sens, la série

$$u_1 \varphi(s) + u_2 \varphi(r_1) + u_3 \varphi(r_2) + \dots$$

est convergente, en désignant par $s=r_0$ la somme de la série u . La somme de la nouvelle série est même inférieure à $\int_0^s \varphi(u) du$. Le reste de la série relatif au $n^{\text{ième}}$ terme est inférieur à $\int_0^{r_n} \varphi(u) du$.

Si au contraire l'intégrale $\int_0^a \varphi(u) du$ n'a pas de sens, c'est que l'intégrale $\int_\varepsilon^a \varphi(u) du$, croissant quand ε décroît, surpasse toute limite. Donc, la série

$$u_1 \varphi(r_1) + u_2 \varphi(r_2) + \dots$$

est divergente et, plus précisément, la somme de ses n premiers termes surpasse $\int_{r_n}^{r_1} \varphi(u) du$.

2. Donnons quelques applications du théorème précédent.

Comme fonctions $\varphi(x)$ dont une primitive est finie pour $x=0$, nous citerons les suivantes et toutes celles qu'elles surpassent en deçà d'une certaine valeur positive de x

$$\frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \frac{1}{x^{1-\alpha}}, \quad \frac{1}{x \left(L \frac{1}{x} \right)^{1+\alpha}}, \quad \dots, \quad \frac{1}{x L \frac{1}{x} \cdots L_{p-1} \frac{1}{x} \left(L_p \frac{1}{x} \right)^{1+\alpha}},$$

α étant un nombre positif fixe, et $L_p \frac{1}{x}$ désignant le logarithme népérien de $L_{p-1} \frac{1}{x}$. (Il faut remarquer que $L_p \frac{1}{x}$ n'est défini que si x est inférieur à $\frac{1}{e_p}$ qui joue alors le rôle du nombre α de l'énoncé. Je pose : $e_p = e^{e_{p-1}}$, et $e_1 = e$, base des logarithmes népériens.)

Les séries

$$\frac{u_n}{\sqrt{r_{n-1}}}, \quad \frac{u_n}{r_{n-1}^{1-\alpha}}, \quad \frac{u_n}{r_{n-1} \left(L \frac{1}{r_{n-1}} \right)^{1+\alpha}}, \quad \dots, \\ \frac{u_n}{r_{n-1} L \frac{1}{r_{n-1}} \cdots L_{p-1} \frac{1}{r_{n-1}} \left(L_p \frac{1}{r_{n-1}} \right)^{1+\alpha}}, \quad \dots$$

sont convergentes, tandis que les séries

$$\frac{u_n}{r_n}, \quad \frac{u_n}{r_n L \frac{1}{r_n}}, \quad \dots, \quad \frac{u_n}{r_n L \frac{1}{r_n} \cdots L_p \frac{1}{r_n}}$$

sont divergentes, quelle que soit la série convergente u_n à termes positifs.

La première série désignée dans cette liste diffère peu d'une autre donnée par M. Hadamard.

Si la série $\frac{u_n}{\sqrt{r_n}}$ est convergente, il en est *a fortiori* de même de la série

$$\frac{u_n}{\sqrt{r_{n-1}} + \sqrt{r_n}} = \sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n}.$$

La série $(\sqrt{r_{n-1}} - \sqrt{r_n})$ à termes positifs et dont le terme général est un infiniment petit d'un ordre moindre que celui de u_n est convergente. C'est la série de M. Hadamard.

3. Peut-on, dans l'énoncé du théorème général, remplacer pour le cas de la convergence la série $u_n \varphi(r_{n-1})$ par la série à termes supérieurs $u_n \varphi(r_n)$?

Si l'on considère des séries u_n lentement convergentes, $\frac{r_{n-1}}{r_n}$ tend vers 1. Si alors la décroissance de φ est suffisamment régulière, il est vraisemblable que la série $u_n \varphi(r_n)$ sera convergente. Ceci se vérifie, par exemple si $u_n = \frac{1}{n^{1+\alpha}}$, $\varphi(x) = \frac{1}{x^{1-\beta}}$, α et β étant positifs.

Mais, *l'intégrale de φ étant convergente au voisinage de 0*, il n'est pas possible, sans mettre en défaut l'énoncé, de remplacer dans tous les cas la série $u_n \varphi(r_{n-1})$ par la série $u_n \varphi(r_n)$. La première, nous l'avons montré, est toujours convergente. La seconde peut être divergente comme le montre l'exemple suivant :

Soit $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Prenons $u_{n+1} = u_n^2$, à partir d'une certaine valeur de n , pour laquelle u_n est inférieur à $\frac{1}{2}$. Alors

$$\begin{aligned} r_n &= u_{n+1} + u_{n+2} + \dots \\ &= u_{n+1} + u_{n+1}^2 + u_{n+1}^{2^2} + \dots + u_{n+1}^{2^p} + \dots < \frac{u_{n+1}}{1 - u_{n+1}} < 2u_{n+1}. \end{aligned}$$

Donc, $u_n \varphi(r_n)$ est ici supérieur à $\frac{u_n}{2\sqrt{u_{n+1}}} = \frac{1}{2}$. La série $u_n \varphi(r_n)$ diverge.

On montrerait sans peine que, $\varphi(x)$ étant une fonction positive

décroissante, si $\int_0^a \varphi(x) dx$ converge, ou même simplement si $x\varphi(x)$ tend vers zéro, avec x , la série définie par la formule de récurrence $u_n \varphi(u_{n+1}) = 1$ converge et cela assez rapidement pour que $\frac{r_n}{u_{n+1}}$ tende vers 1, ainsi que $\frac{\varphi(r_n)}{\varphi(u_{n-1})}$. La série $u_n \varphi(r_n)$ diverge donc, puisque son terme général tend vers 1. Quelle que soit la fonction φ dont l'intégrale converge, il est donc possible de mettre en défaut le théorème sur la convergence de la série $u_n \varphi(r_p)$, si l'on y prend $p = n$ au lieu de $p \leq n - 1$.

Si l'intégrale de φ diverge au voisinage de l'origine, la série $u_n \varphi(r_{n-1})$ peut être convergente bien que $u_n \varphi(r_n)$ soit toujours divergente comme nous l'avons montré.

Cependant, la série $\frac{u_n}{r_{n-1}}$ diverge toujours, elle aussi, bien que la démonstration donnée plus haut établisse la divergence de $\frac{u_n}{r_n}$. On a en effet

$$\frac{u_n}{r_{n-1}} + \frac{u_{n+1}}{r_n} + \dots + \frac{u_{n+p}}{r_{n+p-1}} > \frac{1}{r_{n-1}} (u_n + u_{n+1} + \dots + u_{n+p}) = \frac{r_{n-1} - r_{n+p}}{r_{n-1}};$$

p croissant indéfiniment, la dernière expression tend vers 1 et non pas vers une limite infiniment petite pour n infini, comme l'exigerait, d'après le théorème de Cauchy, la convergence de la série $\frac{u_n}{r_{n-1}}$, si cette convergence se produisait.

Plus généralement, si $\varphi(x) = \frac{\psi(x)}{x}$ et si ψ croît indéfiniment, la série $u_n \varphi(r_{n-1})$ diverge, et non pas seulement la série $u_n \varphi(r_n)$.

On a en effet

$$u_n \varphi(r_{n-1}) + u_{n+1} \varphi(r_n) + \dots + u_{n+p} \varphi(r_{n+p-1}) \\ > \varphi(r_{n-1}) [u_n + u_{n+1} + \dots + u_{n+p}] = \varphi(r_{n-1}) (r_{n-1} - r_{n+p}).$$

Si donc $\varphi(r_{n-1}) = \frac{\psi(r_{n-1})}{r_{n-1}}$, $\psi(u)$ ne tendant pas vers zéro avec u , la série est divergente.

Mais supposons $\varphi(x) = \frac{1}{x\psi(x)}$, ψ croissant indéfiniment quand x tend vers zéro par valeurs positives [exemple $\psi(x) = L \frac{1}{x}$]. Alors, si u_n est une série très convergente, r_{n-1} est sensiblement

égal à u_n , $u_n \varphi(r_{n-1})$ est comparable à $\frac{1}{\psi(u_n)}$. Si $\psi(u_n) = n^2$, la série $u_n \varphi(r_{n-1})$ est convergente, bien que $u_n \varphi(r_n)$ soit divergent.

Donc il n'est pas possible de modifier, dans l'énoncé du théorème, l'indice des r sans restreindre la généralité des séries convergentes u_n , ni celle des fonctions φ classées en deux catégories suivant la convergence ou la divergence de leurs intégrales au voisinage de l'origine.

§. On montre exactement de même le théorème suivant :

SECOND THÉORÈME. — *Si la série à termes positifs u_n diverge, si $s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$, selon que l'intégrale $\int_a^\infty \Phi(x) dx$ a ou non un sens, Φ étant une fonction décroissante de x , la série $u_n \Phi(s_n)$ converge, ou la série $u_n \Phi(s_{n-1})$ diverge.*

Donc, les séries

$$\frac{u_n}{s_n^{1+\alpha}}, \quad \frac{u_n}{s_n(Ls_n)^{1+\alpha}}, \quad \dots, \quad \frac{u_n}{s_n Ls_n \dots L_{p-1} s_n (L_p s_n)^{1+\alpha}}, \quad \dots \quad (\alpha > 0)$$

convergent. Les séries

$$\frac{u_n}{s_{n-1}}, \quad \frac{u_n}{s_{n-1} Ls_{n-1}}, \quad \dots, \quad \frac{u_n}{s_{n-1} Ls_{n+1} \dots L_p s_{n-1}}, \quad \dots$$

divergent.

ÉTUDE DES RÉSEAUX CONJUGUÉS ORTHOGONAUX EN PROJECTION SUR UN PLAN;

PAR M. ÉMILE TURRIÈRE.

1. Étant donnée une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre de la forme

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + a \frac{\partial \theta}{\partial u} + b \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0,$$

si trois de ses intégrales x, y, z sont telles que $x^2 + y^2 + z^2$ soit

une quatrième intégrale, ces trois intégrales sont les coordonnées ponctuelles, par rapport à des axes rectangulaires, d'un point qui appartient à une surface dont les lignes de courbure sont précisément les courbes coordonnées (u) et (v) . Je me propose de consacrer les recherches suivantes au cas analogue où une équation de la forme précédente (1) possède deux intégrales x, y telles que $x^2 + y^2$ soit une troisième solution.

Des trois relations qui expriment que $x, y, x^2 + y^2$ vérifient l'équation (1), résulte une relation indépendante des coefficients a et b ,

$$(2) \quad \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} = 0,$$

et qui exprime que, dans le plan Oxy , les courbes coordonnées (u) , (v) constituent un réseau orthogonal. Réciproquement d'ailleurs, si deux intégrales x, y de l'équation (1) sont liées par la relation (2), la fonction $x^2 + y^2$ est une troisième intégrale de l'équation (1).

Aux deux solutions x, y précédentes, adjoignons une intégrale quelconque z de l'équation (1). Les trois fonctions x, y, z définissent alors une surface (S) rapportée à un système de courbes $(u), (v)$ qui sont conjuguées, sur (S) , et orthogonales, en projection orthogonale sur Oxy . Lorsque, inversement, on connaît sur une surface un réseau conjugué qui se projette suivant un réseau orthogonal sur un plan, on se trouve dans le cas précédent. Ainsi donc *l'étude des surfaces rapportées à un réseau conjugué se projetant sur un plan suivant un réseau orthogonal est identique à l'étude des équations linéaires (1) admettant trois solutions dont l'une est la somme des carrés des deux autres.*

2. Avant de développer les considérations précédentes, je dois rappeler qu'à propos d'une question concernant les surfaces du second degré, Ribaucour a établi l'existence, sur toute surface, d'un réseau conjugué qui se projette sur un plan donné suivant un réseau orthogonal. En coordonnées rectangulaires ordinaires, le plan de projection étant le plan Oxy , l'équation du réseau projeté est

$$(3) \quad \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \frac{r-t}{s} \frac{dy}{dx} - 1 = 0;$$

dans cette équation différentielle, r, s, t désignent les trois dérivées partielles du second ordre de la cote z par rapport à x et y .

Il existe un cas particulièrement remarquable, pour lequel l'équation différentielle (3) est indéterminée. Si les relations

$$r = t, \quad s = 0$$

sont simultanément vérifiées, la surface donnée est un parabolôide de révolution autour d'un axe parallèle à Oz . Dans ce cas, *tout réseau conjugué du parabolôide de révolution se projette suivant un réseau orthogonal sur un plan perpendiculaire à l'axe.* — Ce fait, qui est intimement lié à l'existence de la solution $\theta = x^2 + y^2$ pour l'équation linéaire (1), résulte de ce que toute section plane du parabolôide de révolution se projette sur un plan perpendiculaire à l'axe suivant un cercle ; tout système de diamètres conjugués de la section se projette par conséquent suivant deux diamètres rectangulaires du cercle. Cette propriété est d'ailleurs caractéristique du parabolôide de révolution, puisque c'est uniquement dans ce cas que l'équation (3) se présente sous forme indéterminée.

3. L'équation (3) peut servir à résoudre les deux problèmes suivants :

1° Étant donnée une surface, autre qu'un parabolôide de révolution autour d'un axe parallèle à Oz , trouver le réseau conjugué dont la projection sur Oxy est un réseau orthogonal.

L'équation différentielle (3) représente précisément le réseau orthogonal et donne par conséquent la solution toujours réelle du problème posé. C'est ainsi que, pour une quadrique d'équation

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} - 1 = 0,$$

l'équation différentielle est celle

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{x^2 - y^2 + B - A}{xy} \frac{dy}{dx} - 1 = 0$$

des coniques homofocales à la section principale $z = 0$;

$$\frac{x^2}{A + \lambda} + \frac{y^2}{B + \lambda} - 1 = 0.$$

2° Trouver une surface (S) telle qu'un de ses réseaux conjugués se projette suivant un réseau orthogonal donné dans le plan Oxy .

Le problème dépend de l'intégration d'une équation linéaire du second ordre de la forme

$$(4) \quad Hr + 2Ks + Lt = 0,$$

dans laquelle H , K , L sont des fonctions de x , y déterminées, à un facteur près, et liées par la condition

$$H + L = 0,$$

qui impose, comme solutions particulières, tous les paraboloides de révolution d'axe parallèle à Oz .

De cette même condition il résulte que l'équation (4) est toujours du type hyperbolique. L'intégrale générale (S) dépend de deux fonctions arbitraires, comme le prouve *a priori* l'exemple le plus simple

$$s = 0, \quad z = X(x) + Y(y),$$

pour lequel le réseau est

$$x = \text{const.}, \quad y = \text{const.}$$

4. Soit donné, dans le plan Oxy , un réseau orthogonal (u, v) . L'élément linéaire du plan,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

prend la forme

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2,$$

dans laquelle E et G sont des fonctions données de u et de v , assujetties à vérifier la relation

$$(5) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right] + \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right] = 0.$$

Dans ces conditions, l'équation linéaire (1) dont x et y sont des solutions est complètement déterminée : les coefficients a et b sont définis en fonction de u et de v par deux équations du premier degré qui donnent immédiatement, en vertu de la relation (2),

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 \right] a &= - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}, \\ \left[\left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 \right] b &= - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}; \end{aligned}$$

ces expressions de a et de b sont susceptibles de prendre des formes plus simples par l'introduction des coefficients E et G du ds^2 :

$$(6) \quad \begin{cases} a = -\frac{\partial \text{Log } \sqrt{E}}{\partial v}, \\ b = -\frac{\partial \text{Log } \sqrt{G}}{\partial u}. \end{cases}$$

Les invariants de l'équation (1),

$$h = \frac{\partial a}{\partial u} + ab, \quad k = \frac{\partial b}{\partial v} + ab,$$

deviennent

$$h = a \frac{\partial}{\partial u} \left(\text{Log } \frac{a}{\sqrt{G}} \right), \quad k = b \frac{\partial}{\partial v} \left(\text{Log } \frac{b}{\sqrt{E}} \right).$$

§. Jusqu'à présent, je n'ai fait aucune hypothèse sur la nature du réseau orthogonal imposé. Parmi les réseaux orthogonaux, les plus remarquables sont les réseaux isothermiques, qui s'introduisent dans la question actuelle si l'on exige l'égalité entre les deux invariants de l'équation linéaire (1).

La condition nécessaire et suffisante pour l'égalité des deux invariants h et k est, en effet,

$$\frac{\partial a}{\partial u} = \frac{\partial b}{\partial v};$$

elle exprime que a et b sont les dérivées d'une même fonction par rapport à v et u . Appliquant au cas actuel, il vient

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \text{Log} \left(\frac{E}{G} \right) = 0;$$

$\text{Log } \frac{E}{G}$ doit être la somme de deux fonctions respectives de u et de v ; il sera donc possible de poser

$$\frac{E}{U} = \frac{G}{V};$$

par suite, par un changement de paramètres, le ds^2 sera réductible à la forme isothermique.

Je supposerai dorénavant qu'il en est ainsi ; je poserai

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{\lambda^2},$$

λ étant une fonction positive de u, v satisfaisant à l'équation (5), dans laquelle

$$E = \frac{1}{\lambda^2}, \quad G = \frac{1}{\lambda^2},$$

c'est-à-dire à l'équation

$$\Delta_2 \text{Log} \lambda = 0;$$

λ est donc une fonction positive dont le logarithme est une intégrale de l'équation de Laplace.

Les relations (6) deviennent alors

$$a = \frac{\partial \text{Log} \lambda}{\partial v}, \quad b = \frac{\partial \text{Log} \lambda}{\partial u};$$

les coefficients a et b de l'équation linéaire (1) satisfont donc aux relations

$$\frac{\partial a}{\partial u} = \frac{\partial b}{\partial v}, \quad \frac{\partial a}{\partial v} = -\frac{\partial b}{\partial u},$$

et sont par conséquent des fonctions harmoniques associables, de telle sorte que $a + ib$ soit une fonction de la variable complexe $u + iv$.

L'équation (1) la plus générale qui correspond à un réseau isothermique s'obtient donc en prenant pour a et b des fonctions de u, v telles que

$$a + ib = \text{fonction de } (u + iv).$$

L'invariant unique de l'équation (1) est alors

$$h = \frac{\partial^2 \text{Log} \lambda}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \text{Log} \lambda}{\partial u} \frac{\partial \text{Log} \lambda}{\partial v},$$

c'est-à-dire

$$(7) \quad h = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \partial v}.$$

De ce que $\text{Log} \lambda$ est une fonction harmonique de u et de v il résulte que l'invariant h est lui aussi une fonction harmonique: en posant, en effet,

$$\lambda = e^\omega,$$

il vient

$$\Delta_2 h = \frac{\partial^2 \Delta_2 \omega}{\partial u \partial v} + 2 \Delta_2 \omega \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \omega}{\partial u} \frac{\partial \Delta_2 \omega}{\partial v} + \frac{\partial \omega}{\partial v} \frac{\partial \Delta_2 \omega}{\partial u};$$

la condition $\Delta_2 \omega = 0$ entraîne donc la condition $\Delta_2 h = 0$.

L'équation (1) ayant ses invariants égaux peut être réduite à la forme

$$(8) \quad \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial u \partial v} = h \theta_1,$$

en effectuant le changement de fonction inconnue défini par la formule

$$\theta_1 = \lambda \theta;$$

l'équation en θ_1 n'est autre que l'équation linéaire en θ et $\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial u \partial v}$ admettant λ pour solution particulière.

6. L'invariant h est, en général, distinct de zéro. Il y a naturellement lieu d'examiner le cas particulier où il est nul. L'équation (7) donne alors

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \partial v} = 0,$$

et, comme $\text{Log } \lambda$ doit être harmonique, λ est nécessairement réductible à l'une des quatre formes suivantes :

$$\lambda = e^{-mv},$$

$$\lambda = u^2 + v^2,$$

$$\lambda = \cos u + \text{ch } v,$$

$$\lambda = e^{iu} + e^v.$$

Écrivons, en effet, que, U et V étant deux fonctions respectives de u et de v , la fonction $\text{Log } (U + V)$ satisfait à l'équation de Laplace; il vient la relation

$$UU'' - U'^2 + VV'' - V'^2 + UV'' + VU'' = 0,$$

qui, dérivée successivement par rapport à u et v , donne

$$U'V''' + V'U''' = 0.$$

De cette dernière relation il résulte qu'on pourra prendre

$$U' = 0,$$

d'où, m étant une constante arbitraire,

$$\lambda = e^{-mv} \times \text{const.};$$

c'est la première forme de réduction.

Si U' et V' ne sont pas nuls, on aura

$$\frac{U'''}{U'} + \frac{V'''}{V'} = 0,$$

et, par suite, on pourra poser

$$\begin{aligned} U''' &= -m^2 U', \\ V''' &= m^2 V', \end{aligned}$$

la constante m étant quelconque. Si elle est nulle, U et V sont des polynomes du second degré

$$\begin{aligned} U &= \alpha u^2 + \alpha_1 u + \alpha_2, \\ V &= \beta v^2 + \beta_1 v + \beta_2; \end{aligned}$$

entre les coefficients $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \beta, \beta_1, \beta_2$ existent des relations

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta, \\ 2(\alpha_2 + \beta_2)(\alpha + \beta) &= \alpha_1^2 + \beta_1^2, \end{aligned}$$

qui entraînent la réduction de λ à la seconde forme.

En supposant m distinct de zéro, on obtient

$$\begin{aligned} U &= \alpha \cos mu + \alpha_1 \sin mu + \alpha_2, \\ V &= \beta \operatorname{ch} mv + \beta_1 \operatorname{sh} mv + \beta_2, \end{aligned}$$

avec les deux conditions simultanées

$$\begin{aligned} \alpha_2 + \beta_2 &= 0, \\ \alpha^2 + \alpha_1^2 &= \beta^2 - \beta_1^2. \end{aligned}$$

On peut donc prendre : soit

$$\alpha^2 + \alpha_1^2 = 1, \quad \beta^2 - \beta_1^2 = 1;$$

soit

$$\alpha^2 + \alpha_1^2 = 0, \quad \beta^2 - \beta_1^2 = 0;$$

on a ainsi les deux formes

$$\begin{aligned} \lambda &= \sin m(u - u_0) + \operatorname{sh} m(v - v_0), \\ \lambda &= \alpha e^{imu} + \beta e^{\pm mv}; \end{aligned}$$

par changements de variables il est possible de réduire λ à l'une

ou l'autre des formes simples

$$\lambda = \cos u + \operatorname{ch} v,$$

$$\lambda = e^{-iu},$$

$$\lambda = e^{-v},$$

$$\lambda = e^{iu} + e^v;$$

les formes

$$\lambda = e^{-iu}, \quad \lambda = e^{-v}$$

sont d'ailleurs réductibles l'une à l'autre et rentrent dans celle

$$\lambda = e^{-mv},$$

déjà trouvée; il reste ainsi les formes

$$\lambda = \cos u + \operatorname{ch} v,$$

$$\lambda = e^{iu} + e^v.$$

7. Pour terminer, j'examinerai les cas particulièrement remarquables

$$\lambda = e^{-mv},$$

$$\lambda = u^2 + v^2.$$

La forme $\lambda = e^{-mv}$ s'obtient en posant

$$x = e^{mv} \cos u,$$

$$y = e^{mv} \sin u;$$

le système (u, v) dérive donc du système de coordonnées polaires : le réseau (u, v) est celui des cercles de centre O et des droites émanant de ce centre O. L'équation correspondante est

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} - m \frac{\partial \theta}{\partial u} = 0;$$

son intégrale générale est

$$\theta = e^{mv} [U(u) + V(v)];$$

l'équation générale des surfaces (S) associées au ds^2 ,

$$ds^2 = e^{2mv} (du^2 + dv^2),$$

est donc

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} f\left(\frac{y}{x}\right) + g(x^2 + y^2);$$

la surface la plus générale représentée par cette équation est la

surface diamétrale, pour les droites parallèles à Oz , d'un cône quelconque de sommet situé sur Oz et d'une surface quelconque de révolution autour de Oz .

8. La seconde forme est

$$\lambda = u^2 + v^2;$$

le ds^2 correspondant est

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{(u^2 + v^2)^2},$$

c'est-à-dire celui qu'on obtient en prenant

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

On est ainsi conduit à la solution générale

$$\theta = \frac{U + V}{u^2 + v^2},$$

U et V désignant deux fonctions arbitraires et respectives de u et de v . Les surfaces correspondantes ont pour équation générale

$$z = (x^2 + y^2) \left[U \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) + V \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) \right];$$

parmi ces surfaces, se trouve la cylindroïde de Cayley-Plücker, qu'on obtient pour les fonctions particulières

$$U = u^2, \quad V = -v^2.$$

Pour toutes les surfaces précédentes, le réseau conjugué projeté suivant un réseau orthogonal est celui des cercles passant par l'origine et tangents à chacun des axes coordonnés. Ces surfaces sont d'ailleurs les plus générales qui correspondent à ce réseau.

Plus généralement, pour un élément linéaire

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{(u^2 + v^2)^m},$$

on est conduit à des surfaces, que j'avais étudiées dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* de 1909 (p. 95), d'équations

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = r^k \sin k \theta,$$

dont les lignes de niveau, les lignes de plus grande pente, les lignes asymptotiques ont pour projections des lignes spirales sinusoïdes. Les projections des lignes constituant un réseau conjugué, orthogonal en projection, sont aussi des spirales sinusoïdes.

SUR UN THÉORÈME DE M. VOLTERRA;

PAR M. HENRI LEBESGUE.

1. On sait que la méthode des approximations successives a permis de résoudre des équations intégrales de formes très variées. Toutes les fois qu'on utilise cette méthode, il faut démontrer la convergence du développement qu'elle fournit pour la solution de l'équation. Dans cette démonstration, on est souvent guidé par une analogie entre les approximations nécessaires pour la résolution de l'équation intégrale et celles qu'il faudrait effectuer pour résoudre une certaine équation ordinaire, qui est en quelque sorte l'image de l'équation fonctionnelle proposée. Dans la plupart des cas, cette analogie est assez lointaine; M. Volterra a délimité une classe d'équations intégrales pour laquelle l'analogie est, au contraire, tellement simple qu'il suffit de connaître la solution de l'équation image pour pouvoir écrire de suite la solution de l'équation proposée. Je rappelle ces résultats de M. Volterra :

Soient deux fonctions $F(x, y)$, $G(x, y)$; elles seront dites *permutables*, si l'on a

$$\int F(x, s) G(s, y) ds = \int G(x, s) F(s, y) ds;$$

les intégrales sont étendues, soit à l'intervalle (x, y) , c'est la permutabilité de première espèce, soit à l'intervalle fixe (a, b) , c'est la permutabilité de seconde espèce.

Pour $G \equiv F$, F et G sont permutables et l'on appelle F^2 la valeur commune des intégrales; pour $G \equiv F^2$, F et G sont permutables et l'on appelle F^3 , la valeur des intégrales, etc. On définit ainsi les puissances itérées F , F^2 , F^3 , ..., de F ; elles sont toutes per-

mutables avec F . Il en est par suite de même d'un polynome quelconque par rapport aux puissances itérées de F , ou même d'une série entière en F , pourvu que ce polynome ou cette série ne contienne pas de terme constant, car F n'est pas en général permutable avec une constante.

Ceci posé, soit une équation analytique de la forme

$$(1) \quad G(z, z_1) = a_1 z + b_1 z_1 + a_2 z^2 + b_2 z z_1 + c_2 z_1^2 + \dots = 0,$$

admettant une solution analytique donnée par la formule

$$(2) \quad z_1 = \varphi(z) = \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \dots$$

Dans le développement de $G(z, z_1)$ substituons à la place de z et de z_1 deux fonctions $F(x, y)$, $F_1(x, y)$ et convenons que z^α , z_1^β , $z^\alpha z_1^\beta$ seront remplacées par $F^\alpha(x, y)$, $F_1^\beta(x, y)$,

$$\int F^\alpha(x, s) F_1^\beta(s, y) ds,$$

F^α et F_1^β étant deux puissances itérées. On obtient ainsi une équation fonctionnelle (1') associée à l'équation (1), (1) est l'image de (1'). En opérant de même sur la relation (2), on définit la fonction associée à $\varphi(z)$, celle dont $\varphi(z)$ est l'image. Cette relation (2') définit alors la solution $F_1(x, y)$ de l'équation (1'), car il est évident que les approximations successives nécessaires pour résoudre l'équation (1') et qui conduiraient à la relation (2) sont les images de celles qu'il faut effectuer pour résoudre (1') et qui donnent la relation (2'). (2') fournit donc la solution de l'équation (1') et aussi de l'équation analogue obtenue en permutant F^α et F_1^β dans les intégrales qu'on substitue à $z^\alpha z_1^\beta$.

Mais tout cela suppose essentiellement la convergence des séries (1) et (2). Pour énoncer les théorèmes que M. Volterra a donnés à ce sujet, il sera commode, comme cela arrive fréquemment dans ce genre de questions, de laisser subsister les paramètres z et z_1 dans les fonctions associées. Je suppose donc qu'à une fonction $H(z, z_1, \dots)$ donnée, comme image, par une série entière convergente au voisinage du point $z = z_1 = \dots = 0$, et nulle en ce point, nous associons la fonction

$$\mathcal{H}[z F(x, y), z_1 F_1(x, y), \dots]$$

obtenue en remplaçant respectivement $z^\alpha, z_1^\beta, \dots, z^\alpha z_1^\beta, \dots$, par

$$z^\alpha F^\alpha(x, y), \quad z_1^\beta F_1^\beta(x, y), \quad \dots, \quad z^\alpha z_1^\beta \int F^\alpha(x, s) F_1^\beta(s, y) ds, \quad \dots$$

M. Volterra a démontré que $\mathcal{H}[zF, z_1F_1, \dots]$ était une fonction entière de $z, z_1, \dots$ s'il s'agissait de la permutabilité de première espèce et, s'il s'agissait de la permutabilité de seconde espèce, que si H était fonction entière ou une fonction méromorphe, il en était de même de $\mathcal{H}$.

M. Volterra déduit le premier résultat du calcul de l'ordre de grandeurs des puissances itérées, calcul qui lui avait permis autrefois de montrer que la solution d'une équation linéaire intégrale à limites variables est une fonction entière du paramètre; il déduit le second résultat du théorème fondamental si important de M. Fredholm sur les équations intégrales linéaires à limites fixes. De ces deux résultats sur les équations linéaires, le théorème précédent peut aussi se déduire par un procédé différent de celui de M. Volterra, grâce à un théorème de M. J. Hadamard.

2. Prenons le cas où la fonction image $H(z)$ ne contient qu'une variable; alors

$$(3) \quad H(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

et

$$(4) \quad \mathcal{H}[zF(x, y)] = a_1 z F(x, y) + a_2 z^2 \int F(x, s) F(s, y) ds + \dots$$

Donc $\mathcal{H}$ s'obtient en multipliant les coefficients de H respectivement par ceux de la série

$$(5) \quad z \Phi(z; x, y) = z F(x, y) + z^2 \int F(x, s) F(s, y) ds + \dots$$

Par conséquent, on a, d'après la formule de Parseval,

$$(6) \quad \mathcal{H} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \Phi(t; x, y) H\left(\frac{z}{t}\right) dt,$$

$\mathcal{C}$ étant un contour entourant l'origine laissant à l'extérieur tous les points singuliers de Φ et entourant tous les points $\frac{z}{u}$, u étant un point singulier de H .

Quant à la fonction Φ , il suffit de se rappeler la théorie des équations intégrales ou de remarquer que la série qui représente $z\Phi$ est associée à la fonction $\frac{z}{1-z}$, pour voir que Φ est le noyau résolvant du noyau $F(x, y)$, c'est-à-dire la solution de l'équation

$$(7) \quad \Phi(z; x, y) + z \int \Phi(z; x, s) F(s, y) ds = F(x, y).$$

Ainsi la correspondance entre une fonction image et la fonction associée est susceptible d'une expression analytique. Ceci s'étend de suite au cas où H dépend de plusieurs variables. Pour le cas de deux variables, posons

$$H(z, z_1) = H(z, 0) + H(0, z_1) + K(z, z_1).$$

On transformera $H(z, 0)$, $H(0, z_1)$, comme il vient d'être dit respectivement à l'aide des noyaux résolvants Φ et Φ_1 de F et F_1 . Quant à $K(z, z_1)$, qui contient zz_1 en facteur, on le transformera d'abord à l'aide de $\Phi(z, x, s)$ puis à l'aide de $\Phi_1(z, s, y)$ et l'on intégrera par rapport à s , cela donnera :

$$-\frac{1}{4\pi^2} \int \int_{\mathcal{C}_1} \int_{\mathcal{C}} \Phi_1(t_1; s, y) \Phi(t; x, s) K\left(\frac{z}{t}, \frac{z_1}{t_1}\right) dt dt_1 ds.$$

Remarquons que Φ et Φ_1 pourraient dépendre d'autres paramètres que ceux qui ont été indiqués; en particulier, Φ_1 pourrait dépendre de z et c'est ce qui arriverait si F_1 était la solution de l'équation intégrale

$$\mathcal{H}[z F(x, y); F_1(z; x, y)] = 0.$$

On pourrait aussi donner des représentations de $\mathcal{H}$, faisant intervenir la fonction $\Psi(z, z_1; x, y)$, dont le développement a pour image

$$\frac{1}{1-z} \frac{1}{1-z_1} - 1.$$

Mais tout cela nous est inutile; j'ai voulu seulement indiquer que les fonctions de variables complexes H et $\mathcal{H}$ étaient liées analytiquement et c'est, je crois, l'existence de ce lien qui explique la correspondance étroite qu'il y a entre les fonctions de variables complexes et les relations fonctionnelles considérées par M. Vol-

terra. C'est ce lien, en tout cas, qui permet les considérations suivantes :

3. Utilisant la formule de Parseval sous la forme générale que j'ai rappelée, M. Hadamard a démontré qu'une série entière d'une variable complexe, la série (4), par exemple, qui a pour coefficients les produits des coefficients de même rang de deux autres séries entières, les séries (3) et (5), par exemple, ne peut avoir d'autres points singuliers que ceux dont les affixes sont les produits des affixes des points singuliers des deux séries primitives. Il convient de compléter ce théorème, comme le fait M. Borel, en remarquant que si α et β sont les affixes de deux pôles de (3) et (5), $\alpha\beta$ est l'affixe d'un pôle de (4). Toutefois, si le produit $\alpha\beta$ pouvait être obtenu de plusieurs manières comme produit d'affixes singuliers, ce résultat pourrait être en défaut; mais si z n'est que d'un nombre fini de manières le produit d'affixes singuliers α et β et si tous ces affixes correspondent à des pôles, z sera un point régulier ou un pôle de la fonction (4).

Ceci étant, s'il s'agit de la permutabilité de première espèce, $z\Phi$ est une fonction entière, donc il en est de même de $\mathcal{H}$. S'il s'agit de la permutabilité de seconde espèce, $z\Phi$ est, d'après le résultat classique de M. Fredholm, une fonction méromorphe; donc, si H est une fonction entière, il en est de même de $\mathcal{H}$; si H est une fonction méromorphe, il en est aussi de même de $\mathcal{H}$.

Tout cela est jusqu'ici prouvé pour H dépendant d'une seule variable; mais il suffit d'appliquer le résultat obtenu successivement à chaque variable pour conclure dans le cas général.

Ce mode de démonstration présente l'avantage de fournir, dans tous les cas, des renseignements sur les affixes singuliers de $\mathcal{H}(z)$; ils font partie de l'ensemble des produits d'affixes singuliers de H et de Φ . Cet avantage pourrait être appréciable s'il arrivait qu'une équation du type considéré se rencontre effectivement dans des recherches physiques, car on sait de quel intérêt est alors tout renseignement sur le plus petit module des affixes singuliers.

4. La relation (6) permet, étant donné $H(z)$, de calculer

$$\mathcal{H}[zF(x, y)];$$

est-il possible de trouver une relation entre H et $\mathfrak{X}$ qui soit résolue par rapport à H ? La question revient à la résolution en H de la relation (6), c'est-à-dire à la résolution d'une équation intégrale linéaire qu'on peut faire rentrer dans la catégorie des équations de première espèce du type Fredholm. C'est dire que la question posée est vraisemblablement fort difficile à résoudre, dans le cas général. Il n'en est que plus intéressant de noter que l'une des premières correspondances entre fonction associée et fonction image qui ait été considérée est susceptible d'une double expression analytique, résolue soit en $\mathfrak{H}$, soit en H . Je veux parler du cas où l'on s'occupe de la permutabilité de première espèce et où $F \equiv 1$; alors on a, à la place de la formule (4),

$$\mathfrak{H}[z F(x, y)] = (y - x) \left[\frac{a_1 z}{1!} + \frac{a_2 z^2}{2!} + \dots \right].$$

M. Borel a montré qu'on a

$$(y - x) H(z) = \int_0^\infty e^{-s} \mathfrak{H}[s z F(x, y)] ds.$$

Ce résultat est utilisé par M. Borel de la manière suivante : la formule précédente permet de calculer $H(z)$ à l'aide de la fonction entière $\mathfrak{H}$; elle peut donc permettre, et c'est ce qui arrive effectivement, de calculer $H(z)$ pour des valeurs de z , pour lesquelles le développement (3) ne serait pas convergent.

Il est évident que toutes les fois qu'on saura résoudre par rapport à H l'équation (6) on aura un procédé de sommation, avantageux ou non, de la série (3).

On peut peut-être trouver des procédés de sommation des séries entières, analogues à ceux de MM. Borel, Mittag-Leffler, Lindelöf, Le Roy, par l'emploi de cette remarque. Ce qui du moins est certain, c'est que tout procédé de sommation des séries entières permet d'écrire de nouveaux développements pour les solutions des équations du type de celles que nous étudions ici. Par exemple, d'un résultat connu de M. Mittag-Leffler, il résulte que l'expression

$$\frac{F}{\Gamma(1 + \alpha)} + z \frac{F^2}{\Gamma(1 + 2\alpha)} + z^2 \frac{F^3}{\Gamma(1 + 3\alpha)} + \dots$$

tend vers la solution Φ de l'équation (7), quand α tend vers zéro.

pour toute valeur de z qui ne se trouve pas sur une demi-droite, prolongement au delà de α du segment joignant l'origine à un point singulier α de Φ .

SUR LE PRINCIPE DES TRAVAUX VIRTUELS ⁽¹⁾;

PAR ÉT. DELASSUS.

1. Le principe des travaux virtuels et celui de D'Alembert, qui en découle rigoureusement, sont absolument généraux ; ils expriment rigoureusement les conditions nécessaires et suffisantes, soit de l'équilibre, soit du mouvement, tant qu'ils sont applicables, c'est-à-dire tant que l'on n'arrive pas à une position singulière où les hypothèses fondamentales de la Mécanique cessent d'avoir un sens.

On est donc tenté de considérer ces principes comme des espèces de mécanismes transformant automatiquement un problème de mécanique en un système d'équations rigoureusement équivalent. Il n'est pas nécessaire de chercher des exemples bien compliqués pour s'apercevoir que cette conception est fautive et que les équations de Lagrange peuvent donner des solutions étrangères au problème proposé.

Prenons le mouvement d'un solide pesant suspendu par un point O. Traçons dans le corps une droite Δ issue de O et cherchons s'il peut arriver que cette droite garde une position fixe verticale dans l'espace.

Prenons trois axes fixes Ox_1, y_1, z_1 , et trois axes Ox, y, z ,

(¹) Dans un article des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, *Sur la mise en équation des problèmes de Mécanique*, mars 1906, M. Hadamard a donné quelques indications sur les cas où les équations du mouvement ne traduisent pas exactement le principe de D'Alembert.

L'article que je publie maintenant, bien que la discussion qui y figure ait fait partie de mon enseignement dès 1902-1903, peut être considéré comme la suite et le développement de celui de M. Hadamard en se bornant, pour avoir des propriétés précises, aux seules équations de Lagrange et sans faire intervenir aucune intégrale première.

attachés au solide, Ox étant la droite Δ . Soient θ, φ, ψ les trois angles d'Euler et

$$F(x, y, z) = 1$$

l'équation de l'ellipsoïde d'inertie. On aura

$$2T = F[\psi' \sin \theta \sin \varphi + \theta' \cos \varphi, \psi' \sin \theta \cos \varphi - \theta' \sin \varphi, \psi' \cos \theta + \varphi']$$

et, comme on peut toujours supposer le centre de gravité dans le plan zOx ,

$$U = -Mg(a \sin \varphi \sin \theta + c \cos \theta).$$

Il n'y a aucune difficulté à former les équations de Lagrange; si nous y introduisons alors les hypothèses

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \theta' = \theta'' = 0,$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi' = \varphi'' = 0,$$

qui expriment que Δ reste toujours en coïncidence avec Oz , nous obtenons

$$A\psi'' = 0,$$

$$E\psi'' - E\psi'^2 = Mgc,$$

$$E\psi'' - F\psi'^2 = 0,$$

il en résulte

$$F = 0$$

sans quoi, en vertu de la première, la troisième donnerait

$$\psi' = 0$$

et il n'y aurait pas mouvement. Cette condition étant réalisée, la seconde donnera, pour ψ' , une valeur constante

$$\sqrt{\frac{Mgc}{-E}}.$$

Il est donc nécessaire que le plan mené par Δ perpendiculaire au plan contenant Δ et le centre de gravité coupe l'ellipsoïde d'inertie suivant une ellipse admettant Δ pour axe et, de plus, que la rotation initiale, dirigée suivant Δ placée verticalement, ait une valeur bien déterminée.

Traisons maintenant le problème en prenant Δ pour Oz et avec

trois paramètres θ , φ , u , le dernier étant défini par

$$u = \varphi + \psi.$$

Si nous prenons encore zOx contenant le centre de gravité, les axes seront les mêmes que précédemment, sauf que Ox et Oz se sont permutés et que Oy a changé de sens; l'équation de l'ellipsoïde d'inertie est donc

$$F(Z, -Y, X) = 0,$$

donc

$$\begin{aligned} {}_2T &= F \left[\begin{array}{l} (u' - \varphi') \cos \theta + \varphi', \quad \theta' \sin \varphi - (u' - \varphi') \sin \theta \cos \varphi \\ \theta' \cos \varphi + (u' - \varphi') \sin \theta \sin \varphi \end{array} \right], \\ U &= -Mg(\alpha \cos \theta + c \sin \varphi \sin \theta). \end{aligned}$$

Si nous écrivons alors les équations de Lagrange et introduisons l'hypothèse

$$\theta = \theta' = \theta'' = 0,$$

l'équation relative à φ devient une identité et il reste les deux équations

$$\begin{aligned} Au'' &= 0, \\ \frac{d}{dt} [u'(E \cos \varphi + F \sin \varphi)] + u'(u' - \varphi')(F \cos \varphi - E \sin \varphi) &= Mgc \sin \varphi; \end{aligned}$$

la première donne

$$u' = \alpha$$

et la seconde devient alors

$$\alpha^2(F \cos \varphi - E \sin \varphi) = Mgc \sin \varphi$$

et donne pour φ une valeur constante β . Les équations de Lagrange admettent donc la solution

$$\theta = 0, \quad \varphi = \beta, \quad u = \alpha t + \gamma,$$

α , β , γ étant trois constantes dont les deux premières sont liées par la relation

$$\alpha^2(F \cos \beta - E \sin \beta) = Mgc \sin \beta.$$

L'hypothèse $\theta = 0$ exprime que la droite Δ reste verticale et, comme u est variable, le corps tourne réellement autour de Δ .

Les équations de Lagrange, au moyen des paramètres θ , φ , u , donnent donc une infinité de mouvements autour de Δ restant verticale sans aucune condition relative à la position de Δ et du centre

de gravité dans l'ellipsoïde d'inertie et à la vitesse initiale de rotation. D'après la première façon de traiter le problème, les droites Δ doivent satisfaire à une condition, c'est-à-dire être les génératrices d'un certain cône. On peut donc affirmer que toutes les solutions fournies par la seconde mise en équations et qui correspondent à des droites non situées sur ce cône sont des solutions étrangères au problème proposé, elles donnent des mouvements qui ne peuvent se produire effectivement sans l'action des forces auxquelles le système est soumis.

De cet exemple résulte que les équations de Lagrange ne sont pas toujours rigoureusement équivalentes au problème de dynamique qui les fournit. L'équation générale de D'Alembert est la traduction exacte du problème, mais les équations de Lagrange ne traduisent pas rigoureusement le principe de D'Alembert; c'est dans cette traduction que l'équivalence se perd.

Comme le principe de D'Alembert est une conséquence du principe des travaux virtuels, nous commencerons par étudier, à ce point de vue, les équations d'équilibre d'un système et nous appliquerons ensuite à la Dynamique les résultats obtenus.

2. P étant une position d'un système matériel soumis à des liaisons définies géométriquement, les déplacements virtuels relatifs à cette position et compatibles avec les liaisons se définissent sans ambiguïté et les δx , δy , δz d'un point quelconque du système sont alors des fonctions d'un certain nombre de paramètres qui sont les mêmes pour tous les points du système.

Nous dirons que la position P est une *position ordinaire* si, pour cette position, les déplacements virtuels compatibles avec les liaisons forment un *groupe linéaire*, c'est-à-dire sont tels que les δx , δy , δz d'un point quelconque puissent s'exprimer comme fonctions linéaires et homogènes d'un certain nombre de paramètres indépendants. Nous désignerons, d'une façon générale, par (G) un tel groupe.

L'ensemble des déplacements virtuels relatifs à une position peut ne pas être linéaire, mais il peut arriver qu'il se décompose en plusieurs autres ensembles dont certains peuvent constituer des groupes linéaires. Nous dirons alors que la position P est la superposition de plusieurs positions dont certaines sont ordinaires.

lières, c'est-à-dire pour lesquelles (Γ) ne coïncide pas avec (G) .

Une position ordinaire sera *singulière de première classe* si (Γ) est entièrement contenu dans (G) , *singulière de seconde classe* si (G) est entièrement contenu dans (Γ) , et *singulière de troisième classe* si aucun des deux groupes (G) et (Γ) n'est entièrement contenu dans l'autre.

4. Considérons les q comme des paramètres indépendants et donnons-leur des accroissements δq arbitraires. Nous définissons ainsi des déplacements virtuels du système libéré des liaisons exprimées par les équations (1), déplacements compatibles avec les liaisons et qui forment un groupe linéaire (Γ') dont l'ordre n' est égal ou inférieur à n . Si, pour une position du système, n' est inférieur à n , nous dirons qu'il y a réduction sur n .

On obtient évidemment tous les déplacements du groupe (Γ) en cherchant tous les déplacements de (Γ') qui satisfont aux équations (2); le nombre h' de ces équations qui sont distinctes est égal ou inférieur à h . Si, pour une position du système, h' est inférieur à h , nous dirons qu'il y a réduction sur h .

S'il n'y a réduction ni sur n , ni sur h , on a évidemment une position ordinaire non singulière de sorte que : *toute position singulière donne une réduction de l'un, au moins, des deux nombres n, h .*

Considérons d'abord une position donnant une réduction de n seulement ($n' < n, h' = h$). Soit (G') le groupe véritable, pour la position considérée, du système fictif dont les q seraient indépendants.

Dans le cas actuel, (Γ') n'est qu'une portion de (G') . Les équations (2), étant toutes distinctes, expriment exactement les conditions pour qu'un déplacement (G') soit un déplacement (G) ; en les appliquant aux déplacements (Γ') on n'obtiendra donc, en général, qu'une partie de (G) , de sorte que (Γ) sera contenu dans (G) et la position sera singulière de première classe. Le raisonnement peut être en défaut, car il peut arriver que les déplacements (G') qui ne font pas partie de (Γ') ne satisfassent jamais aux équations (2); en appliquant alors ces équations aux déplacements (Γ') on trouve le même résultat qu'avec (G') , c'est-à-dire (G) ; (Γ) coïncide donc avec (G) et la position n'est pas singulière.

Ainsi :

Une position pour laquelle il y a réduction sur n seulement est une position non singulière ou singulière de première classe.

Lorsque les paramètres sont indépendants, (G) et (Γ) coïncident respectivement avec (G') et (Γ') ; donc, s'il y a réduction sur n , (Γ) est contenu dans (G) et la position est singulière de première classe. Ainsi :

Quand les paramètres sont indépendants, toute position pour laquelle il y a réduction sur n est forcément singulière de première classe.

Considérons maintenant une position pour laquelle il y a réduction sur h seulement ($n' = n$, $h' < h$), (Γ') coïncide avec (G') , mais les équations (2) n'expriment plus complètement les conditions que doivent remplir les déplacements (G') pour être des déplacements (G) ; donc, en les appliquant à (Γ') , on obtiendra des déplacements plus généraux que ceux de (G) et le groupe (G) sera contenu dans (Γ) , donc la position sera singulière de seconde classe.

Pour qu'un déplacement (Γ') soit un déplacement (G) , il faut qu'il satisfasse aux équations (2) et à des conditions complémentaires se traduisant par de nouvelles relations entre les δq et comme, dans les déplacements (Γ') , les δq sont tous arbitraires, il est impossible que les (Γ') vérifient tous ces conditions complémentaires, de sorte que (Γ) ne peut coïncider avec (G) . Ainsi :

Une position pour laquelle il y a réduction sur h seulement est forcément singulière de seconde classe.

Considérons enfin une position pour laquelle il y a réduction simultanée sur n et sur h ($n' < n$, $h' < h$).

Pour former (Γ) on ne prend qu'une partie (Γ') du groupe (G') et on ne lui impose qu'une partie des conditions qui définissent (G) au moyen de (G') . Il n'y a plus aucune relation entre (Γ) et (G) et tous les cas pourront se présenter.

Par exclusion, on peut formuler les réciproques suivantes :

Les positions singulières de première classe sont forcément des positions pour lesquelles il y a réduction sur n .

Les positions singulières de seconde classe sont forcément des positions pour lesquelles il y a réduction sur h .

Les positions singulières de troisième classe sont forcément des positions pour lesquelles il y a réduction simultanée sur n et sur h .

5. En général, une position du système matériel est définie par un système de valeurs des q vérifiant les équations (1) et, réciproquement, une position définit un système de valeurs des q satisfaisant à ces conditions.

Il peut arriver qu'une position du système ne définisse pas complètement les paramètres, c'est-à-dire qu'il existe des q , dépendants d'un certain nombre de paramètres arbitraires, vérifiant identiquement les équations (1) et fournissant toujours la même position du système; autrement dit, tous les systèmes de valeurs des q vérifiant les équations distinctes

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \theta_1(q_1, \dots, q_n) = 0, & \omega_1(q_1, \dots, q_n) = 0, \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, \\ \theta_h(q_1, \dots, q_n) = 0, & \omega_k(q_1, \dots, q_n) = 0, \end{array} \right.$$

dont le nombre $h + k$ est supposé inférieur à n , fournissent la même position du système matériel. Nous dirons alors que cette position est une *position d'indétermination paramétrique* et que l'indétermination est d'ordre

$$p = n - (h + k).$$

Si nous appelons *position paramétrique* un système de valeurs des q satisfaisant aux équations (1), nous pourrions dire qu'une position d'indétermination paramétrique d'ordre p est la superposition d'une suite à p paramètres de positions paramétriques.

Soit $q_1^0, \dots, q_n^0$ une de ces positions paramétriques, donc vérifiant les équations (3). Si l'on fait varier les q à partir de ces valeurs en continuant à vérifier ces équations, les x, y, z des points du système matériel restent fixes; en particulier, si nous donnons

aux q des variations δq satisfaisant aux équations

$$\begin{aligned}\delta\theta_1 &= 0, & \delta\omega_1 &= 0, \\ \dots\dots, & & \dots\dots, & \\ \delta\theta_h &= 0, & \delta\omega_k &= 0,\end{aligned}$$

qui sont distinctes, les δx , δy , δz seront nuls, donc seront des combinaisons linéaires et homogènes des $\delta\theta$ et des $\delta\omega$. Les δx , δy , δz , où l'on considère les δq comme absolument arbitraires, sont donc des fonctions linéaires et homogènes de $h + k$ paramètres $\delta\theta$, $\delta\omega$, de sorte que le groupe (Γ') est d'ordre au plus égal à $h + k$, c'est-à-dire à $n - p$. Il y a donc réduction sur n , de sorte que :

Les positions paramétriques qui constituent une position d'indétermination paramétrique sont toutes singulières de première classe ou non singulières; elles sont forcément singulières de première classe quand les paramètres sont indépendants.

A chacune de ces positions paramétriques correspond un groupe (Γ) et le groupe (G) relatif à la position du système est fourni par l'ensemble de tous les déplacements de tous ces groupes (Γ).

Comme exemples simples, on peut citer le point $r = 0$ en coordonnées polaires planes r, θ ; il y a alors indétermination d'ordre 1, et le point $r = 0$ en coordonnées polaires de l'espace r, θ, φ , l'indétermination étant alors d'ordre 2.

Enfin il peut exister des suites continues de positions d'indétermination. Une suite à s paramètres de positions d'indétermination d'ordre p , étant définie par des équations telles que (3), mais les ω contenant s constantes arbitraires distinctes. On en a un exemple simple par les coordonnées semi-polaires r, θ, z , en prenant les positions

$$r = 0, \quad z = a,$$

a étant une constante arbitraire et aussi, au moyen d'un solide ayant un point fixe et qu'on définit par les trois angles d'Euler θ, φ, ψ . La suite à considérer est ici

$$\theta = 0, \quad \varphi + \psi = a.$$

6. Il est encore plus facile de donner des exemples de positions singulières de seconde classe.

L'exemple immédiat sera fourni par un point matériel défini par ses trois coordonnées rectilignes x, y, z et assujetti à rester sur une courbe

$$\theta_1(x, y, z) = 0,$$

$$\theta_2(x, y, z) = 0,$$

les deux surfaces $\theta_1 = 0, \theta_2 = 0$ étant tangentes en un point.

En ce point, les deux équations

$$\delta\theta_1 = 0, \quad \delta\theta_2 = 0$$

se réduisent à une, de sorte que (Γ) est d'ordre 2, il est constitué par tous les déplacements dans le plan tangent commun aux deux surfaces, tandis que (G) relatif au point considéré comme ordinaire sur l'une des branches est d'ordre 1, constitué par les déplacements sur la tangente à cette branche.

On peut avoir de telles positions singulières de seconde classe isolées ou formant des suites continues et il peut même arriver que toutes les positions du système soient singulières de seconde classe; c'est ce qui arrivera, en particulier, si, dans l'exemple précédent, on suppose que les deux surfaces θ_1, θ_2 sont circonscrites tout le long de la courbe étudiée.

7. Reprenons le raisonnement par lequel on établit les équations générales d'équilibre.

Un déplacement virtuel quelconque compatible avec les liaisons est obtenu en prenant n'importe quel système de valeurs des δq satisfaisant aux équations

$$(4) \quad \delta\theta_1 = 0, \quad \dots, \quad \delta\theta_h = 0.$$

Pour ces valeurs, le travail des forces données a une expression de la forme

$$\mathfrak{C} = Q_1 \delta q_1 + \dots + Q_n \delta q_n,$$

et il doit être nul en vertu des équations (4). Donc, considéré comme fonction linéaire et homogène des n variables indépendantes δq , il doit être une combinaison linéaire et homogène des premiers membres $\delta\theta$ des équations (4), ce qui revient à dire qu'il

La première consiste à n'admettre que les solutions dans lesquelles μ_0 n'est pas nul ou, ce qui revient au même, les solutions dans lesquelles les λ seront tous finis. Comme on doit, dans la solution, s'occuper des multiplicateurs, on est obligé de les conserver et nous dirons que les équations d'équilibre, considérées de ce point de vue, sont les *équations aux multiplicateurs finis*.

Les multiplicateurs μ figurent linéairement, leur élimination est une opération élémentaire très facile et, en outre, ces inconnues auxiliaires n'offrent, en général, aucun intérêt. On est donc amené souvent à les éliminer pour obtenir les équations ne contenant plus que les véritables inconnues q du problème d'équilibre proposé. Cette élimination ne fait aucune distinction entre μ_0 et les autres μ . On est ainsi amené à considérer les *équations sans multiplicateurs* en appelant ainsi indifféremment, soit les équations après élimination des multiplicateurs, soit les équations avec ces multiplicateurs, mais en ne leur imposant aucune condition restrictive.

8. Les équations aux multiplicateurs finis expriment rigoureusement que le travail virtuel est nul pour tous les déplacements du groupe (Γ) ; et il en résulte :

Pour une position ordinaire non singulière, (Γ) et (G) coïncident, donc les équations aux multiplicateurs finis expriment les conditions nécessaires et suffisantes de l'équilibre. Toute position d'équilibre non singulière fournira une solution de ces équations et, réciproquement, toute solution de ces équations qui ne sera pas une position singulière sera une position d'équilibre.

Pour une position singulière de première classe, (Γ) est contenu entièrement dans (G) , donc les équations aux multiplicateurs finis expriment des conditions nécessaires mais non suffisantes de l'équilibre. Une position d'équilibre singulière de première classe vérifie forcément les équations, mais une position singulière de première classe vérifiant les équations n'est pas forcément position d'équilibre.

Pour une position singulière de seconde classe, (G) est contenu dans (Γ) , donc les équations aux multiplicateurs finis expriment les conditions suffisantes mais non nécessaires de l'équilibre. Une

position d'équilibre singulière de seconde classe ne vérifie pas forcément les équations, mais si une position singulière de seconde classe les vérifie, elle est certainement position d'équilibre.

Enfin, pour une position singulière de troisième classe, aucun des deux groupes (Γ) , (G) n'étant entièrement contenu dans l'autre, les équations aux multiplicateurs finis ne sont des conditions ni nécessaires ni suffisantes de l'équilibre, elles n'ont, pour ces positions, aucun sens au point de vue de l'équilibre.

Donc :

Les équations d'équilibre aux multiplicateurs finis peuvent fournir des solutions étrangères, c'est-à-dire des positions qui ne sont pas des positions d'équilibre ; ces positions sont forcément singulières de première ou de troisième classe. Elles peuvent aussi laisser de côté de véritables solutions du problème, c'est-à-dire ne pas admettre comme solutions certaines positions d'équilibre ; ces positions sont forcément singulières de deuxième ou de troisième classe.

9. Étudions maintenant, d'une façon analogue, les équations sans multiplicateurs. Elles sont équivalentes à l'identité (7) sans aucune restriction sur les μ , de sorte qu'elles expriment, si μ_0 n'est pas nul, que $\mathfrak{E}$ est nul pour tous les déplacements (Γ) et, si μ_0 est nul, que cette identité se réduit à

$$\mu_1 \delta\theta_1 + \dots + \mu_h \delta\theta_h = 0,$$

c'est-à-dire que les $\delta\theta$ ne sont pas indépendants ou, suivant l'expression adoptée antérieurement, que, pour la position considérée, il y a réduction sur h .

Considérons une position d'équilibre. Si elle est non singulière ou singulière de première classe, (G) coïncide avec (Γ) ou le contient ; dans les deux cas, $\mathfrak{E}$ est nul pour les déplacements (Γ) et les équations sans multiplicateurs sont vérifiées. Si elle est singulière de seconde ou troisième classe, il y a forcément réduction sur h et ces équations sont encore vérifiées. Donc :

Toute position d'équilibre vérifie les équations d'équilibre sans multiplicateurs.

Voyons maintenant la réciproque. Toute position pour laquelle

il y a réduction sur h vérifie les équations sans qu'on puisse en conclure qu'il y a équilibre. Une position, vérifiant les équations et pour laquelle il n'y a pas réduction sur h , est forcément non singulière ou singulière de première classe; ε est nul pour les déplacements (Γ) , donc, si la position n'est pas singulière, il y a équilibre puisque (Γ) et (G) coïncident et, si la position est singulière de première classe, l'équilibre n'a pas lieu forcément puisque (Γ) est contenu dans (G) .

En résumé :

Les équations d'équilibre sans multiplicateurs fournissent toutes les positions d'équilibre.

Elles admettent forcément, comme solutions étrangères, toutes les positions pour lesquelles il y a réduction sur h et qui ne sont pas des positions d'équilibre. Elles peuvent admettre d'autres solutions étrangères qui sont forcément des positions singulières de première classe sans réduction sur h .

Dans le cas des paramètres indépendants, il n'y a plus de multiplicateurs, il n'y a qu'une manière de considérer les équations d'équilibre, il n'y a pas à considérer les positions pour lesquelles il y a réduction sur h et enfin il existe une seule catégorie de positions singulières, celles de première classe que, pour abréger, nous appellerons simplement positions singulières. Le résultat précédent se simplifie alors et devient :

Dans le cas des paramètres indépendants, les équations d'équilibre fournissent toutes les positions d'équilibre, mais peuvent donner des solutions étrangères qui sont forcément des positions singulières.

10. Nous venons d'avoir un exemple de solutions étrangères s'introduisant normalement par les équations sans multiplicateurs, ce sont les positions pour lesquelles il y a réduction sur h et, en particulier, les positions singulières de deuxième et troisième classe.

En voici un autre exemple qui s'applique indifféremment aux deux manières de concevoir les équations, puisqu'il est relatif à des positions sans réduction sur h .

Supposons que le système admette une suite continue à r para-

mètres de positions d'indétermination d'ordre p . Pour un système de valeurs des paramètres q satisfaisant aux h équations θ et aux $n - p - h$ équations d'indétermination contenant les r constantes arbitraires, le groupe (Γ) est d'ordre $n - p - h$, de sorte que les égalités qui expriment que $\mathfrak{E}$ est nul pour les déplacements (Γ) se réduisent, par suite des équations d'indétermination, à $n - p - h$ distinctes.

On aura donc, en tout, à vérifier

$$h + 2(n - p - h) = 2n - 2p - h$$

équations dans lesquelles figureront comme inconnues les n paramètres q et les r constantes arbitraires, soit

$$n + r \text{ inconnues.}$$

Si donc on a

$$n + r \geq 2n - 2p - h,$$

c'est-à-dire

$$2p + r \geq n - h,$$

il y a plus d'inconnues que d'équations et, sauf le cas exceptionnel d'incompatibilité, la résolution sera possible et l'on obtiendra normalement des solutions étrangères formées par des positions d'indétermination paramétrique appartenant à la suite considérée.

Les équations d'indétermination peuvent être mises sous la forme

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= f_1(q_1, \dots, q_n), \\ &\dots\dots\dots, \\ \alpha_r &= f_r(q_1, \dots, q_n), \\ 0 &= \varphi_1(q_1, \dots, q_n), \\ &\dots\dots\dots, \\ 0 &= \varphi_{n-p-h-r}(q_1, \dots, q_n). \end{aligned}$$

Faisons un changement de paramètres en prenant

$$\begin{aligned} c_1 &= f_1, \quad \dots, \quad c_r = f_r, \\ b_1 &= \varphi_1, \quad \dots, \quad b_{n-p-r-h} = \varphi_{n-p-r-h}, \quad b_{n-p-r-h+1} = \theta_1, \quad \dots, \quad b_{n-p-r} = \theta_h, \\ a_1 &= \psi_1, \quad \dots, \quad a_p = \psi_p, \end{aligned}$$

les ψ étant des fonctions choisies arbitrairement. On voit qu'avec ces nouveaux paramètres la position considérée sera encore une position d'indétermination pour laquelle les a seront absolument arbitraires, les b nuls et les c égaux à des constantes arbitraires.

Dans un déplacement virtuel, les h derniers paramètres b subissent des variations nulles et tous les autres paramètres subissent des variations absolument arbitraires. Si le déplacement a lieu à partir d'une des positions d'indétermination considérées, la variation arbitraire des paramètres a , quand on laisse les b et les c constants, ne fait pas varier la position du système, donc ne donne aucun travail. Il en résulte que, pour une des positions considérées, on a

$$\mathfrak{C} = \sum_{i=1}^{i=n-p-r-h} Q_{b_i} \delta b_i + \sum_{j=1}^{j=r} Q_{c_j} \delta c_j,$$

les Q étant des fonctions des a et des c , puisque les b sont tous nuls. On aura donc, pour la position d'indétermination, les équations

$$\begin{aligned} Q_{b_i} &= 0 & (i = 1, 2, \dots, n-p-r-h), \\ Q_{c_j} &= 0 & (j = 1, 2, \dots, r), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$n-p-h \text{ équations,}$$

aux $p+r$ inconnues a et c et la position s'obtiendra normalement comme solution étrangère si l'on a

$$p+r \geq n-p-h$$

ou

$$2p+r \geq n-h.$$

Nous retrouvons le résultat déjà donné par le raisonnement général, mais les équations sont mises en évidence.

Si nous remarquons que $n-h$ est le nombre λ des paramètres indépendants dont on peut faire dépendre le système, ou encore le nombre de ses degrés de liberté, on voit que :

Si le système à λ degrés de liberté possède une suite à r paramètres de positions d'indétermination d'ordre p , les équations d'équilibre, considérées de n'importe quelle façon, admettent normalement des solutions étrangères appartenant à cette suite si l'on a

$$2p+r \geq \lambda.$$

Par exemple :

Pour l'équilibre d'un point dans un plan en coordonnées polaires planes, l'origine est une position d'indétermination ; on a

$$p=1, \quad r=0, \quad \lambda=2,$$

donc

$$2p + r = \lambda,$$

et l'origine sera toujours fournie par les équations d'équilibre, quelle que soit la force agissant sur le point.

Pour l'équilibre d'un point entièrement libre en coordonnées polaires r, θ, φ de l'espace, l'origine est une position isolée d'indétermination d'ordre 2. On a

$$p = 2, \quad r = 0, \quad \lambda = 3;$$

donc

$$2p + r > \lambda$$

et l'on trouvera toujours l'origine comme solution étrangère.

Pour l'équilibre d'un point entièrement libre en coordonnées semi-polaires r, θ, z , tous les points de Oz sont des positions d'indétermination d'ordre 1. On a, pour cette suite,

$$p = 1, \quad r = 1, \quad \lambda = 3,$$

donc

$$2p + r = \lambda.$$

Quelle que soit la loi de force, on trouvera toujours comme solution étrangère une position sur Oz .

Considérons enfin un solide ayant un point fixe et défini par les trois angles d'Euler θ, φ, ψ . Toute position pour laquelle l'axe Oz attaché au solide coïncide avec l'axe fixe Oz_1 est une position d'indétermination d'ordre 1. On a la suite à un paramètre

$$\theta = 0, \quad \varphi + \psi = \alpha$$

pour laquelle on a

$$p = 1, \quad r = 1, \quad \lambda = 3;$$

donc

$$2p + r = \lambda.$$

Quelle que soit la loi de force, on trouvera donc une solution étrangère qui sera une position pour laquelle Oz sera en coïncidence avec Oz_1 .

11. Appliquons maintenant ces considérations à la Dynamique, c'est-à-dire aux équations générales du mouvement déduites du principe de D'Alembert. On a, d'après ce principe, à traiter une question d'équilibre à condition d'introduire les forces d'inertie.

Nous pourrions, si les paramètres ne sont pas indépendants, considérer les équations aux multiplicateurs finis et les équations sans multiplicateurs.

Dans les premières, nous n'admettrons aucune solution où le multiplicateur μ_0 serait identiquement nul, tandis que dans les secondes nous admettrons de telles solutions.

Une solution étrangère du problème de mouvement sera une solution constituée par une suite de positions dépendant du paramètre t , c'est-à-dire par un système de valeurs des paramètres et des multiplicateurs fonctions de t , toutes ces positions étant des solutions étrangères au problème d'équilibre, c'est-à-dire pour lesquelles toutes les conditions suffisantes de l'équilibre sous l'action des forces données et des forces d'inertie ne sont pas réalisées.

Au contraire, une solution du problème de Dynamique ne sera pas fournie par les équations de mouvement, si toutes les positions successives du système sont des positions qui, supposées positions d'équilibre, sont laissées de côté par les équations d'équilibre.

Nous nous bornerons à étudier le cas le plus important, celui des équations sans multiplicateurs qui comprend, comme cas particulier, celui des paramètres indépendants, et comme conséquence immédiate de ce qui a été dit antérieurement, nous avons :

Les équations de Lagrange sans multiplicateurs fournissent tous les mouvements possibles du système.

Supposons que le système admette une suite continue à r paramètres de positions pour lesquelles il y a réduction sur h . Chacune de ces positions satisfait aux équations d'équilibre sans multiplicateurs et quelles que soient les forces. Supposons qu'on fasse parcourir au système matériel une succession de positions dépendant arbitrairement du temps et appartenant à cette suite. Dans chacune de ces positions, les équations d'équilibre, sous l'action des forces données et des forces d'inertie, seront vérifiées ; donc les équations de Lagrange sans multiplicateurs seront aussi vérifiées. Ainsi :

Si le système matériel admet une suite continue de positions

pour lesquelles il y a réduction sur h , tout mouvement dans lequel le système ne parcourt que des positions appartenant à cette suite est une solution des équations de Lagrange, quelles que soient les forces données, et est une solution étrangère au problème de Dynamique proposé.

12. Considérons maintenant les suites de positions d'indétermination en supposant réalisée la condition

$$2p + r \geq \lambda$$

d'existence normale des solutions étrangères appartenant à cette suite et reprenons les paramètres particuliers a , b , c déjà employés (§ 39). Pour simplifier, plaçons-nous dans le cas des paramètres indépendants, c'est-à-dire supposons

$$\lambda = n.$$

Si nous désignons par q le nombre des paramètres b , on aura

$$q = n - p - r,$$

et l'inégalité de condition s'écrivant

$$p \geq q$$

exprime que le nombre des paramètres a est supérieur à celui des paramètres b .

Lorsque les b sont nuls, les coordonnées des points du système sont indépendantes des a et complètement déterminées par la connaissance des c . Une quelconque de ces coordonnées est ainsi de la forme

$$F(c_1, \dots, c_r, t) + \sum_{i=1}^{i=q} b_i f_i(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; c_1, \dots, c_r, t),$$

et sa variation de la forme

$$\sum \frac{\partial F}{\partial c} \delta c + \sum f_i \delta b_i + \sum b_i \delta f_i.$$

Les dérivées première et seconde de cette coordonnée sont de

la forme

$$\Phi(c_1, \dots, c_r; c'_1, \dots, c'_r; t) + \Sigma f_i b'_i + \Sigma b_i \frac{\partial f_i}{\partial t},$$

$$\Psi(c_1, \dots, c_r; c'_1, \dots, c'_r; c''_1, \dots, c''_r; t) + \Sigma f_i b''_i + 2 \Sigma \frac{df_i}{dt} b'_i + \Sigma b_i \frac{d^2 f_i}{dt^2}.$$

Enfin, supposant que les forces ne dépendent que de la position, ces forces seront déterminées par les c ; l'une quelconque de leurs composantes sera, pour la position considérée du système, de la forme

$$\chi(c_1, \dots, c_r; t) + \Sigma b_i \sigma_i.$$

Au moyen de ces expressions, nous pouvons former l'équation de Dalember

$$\Sigma[(mx'' - X)\delta x + (my'' - Y)\delta y + (mz'' - Z)\delta z] = 0$$

rigoureusement équivalente à l'ensemble des équations de Lagrange, équations qu'on obtiendra en annulant les coefficients des δa , δb , δc .

Si l'on fait varier les a en laissant les b nuls et les c constants, le système ne bouge pas, les forces données et forces d'inertie n'effectuent aucun travail. Donc les coefficients des δa sont nuls, en vertu de ce que les b sont nuls. On le vérifie aisément en remarquant que les termes en δa ne peuvent provenir que des termes

$$\Sigma b_i \delta f_i$$

et sont nuls puisque les b le sont tous. Ainsi les équations de Lagrange qui correspondent aux paramètres a se réduisent à des identités si l'on y suppose les b identiquement nuls.

Formons alors les équations de Lagrange relatives aux b et aux c en y introduisant l'hypothèse relative aux b . Les quantités $mx'' - X$, $my'' - Y$, $mz'' - Z$ se réduisent alors à la forme

$$m \Psi(c_1, \dots, c_r; c'_1, \dots, c'_r; c''_1, \dots, c''_r; t) - \chi(c_1, \dots, c_r; t)$$

et les δx , δy , δz à la forme

$$\Sigma \frac{\partial F}{\partial c} \delta c + \Sigma f_i \delta b_i,$$

les f_i ne contenant plus alors que les a , les c et t .

Il en résulte immédiatement que les équations de Lagrange relatives aux paramètres c sont de la forme

$$\lambda_i(c_1, \dots, c_r; c'_1, \dots, c'_r; c''_1, \dots, c''_r; t) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

et que celles qui sont relatives aux paramètres b sont de la forme

$$\mu_k(c_1, \dots, c_r; c'_1, \dots, c'_r; c''_1, \dots, c''_r; t) = \nu_k(a_1, \dots, a_p; c_1, \dots, c_r; t) \\ (k = 1, 2, \dots, q).$$

les r premières constituent un système de r équations du second ordre aux r inconnues, $c_1, \dots, c_r$ fonctions de t . Connaissant les c , les q dernières constituent alors un système de q équations linéaires aux p inconnues $a_1, \dots, a_p$ et comme p est au moins égal à q , il y a plus d'inconnues que d'équations et, sauf les cas exceptionnels d'incompatibilité, la résolution sera possible en se donnant arbitrairement $p - q$ des inconnues a . En définitive, nous obtenons *une solution des équations de Lagrange dépendant de $2r$ constantes arbitraires et de $2p + r - n$ fonctions arbitraires de t , solution dont tous les mouvements qu'elle fournit sont des solutions étrangères du problème de Dynamique proposé.*

Prenons, par exemple, le mouvement d'un solide autour d'un point fixe O au moyen des trois angles d'Euler θ, φ, ψ . On a la suite à un paramètre de positions d'indétermination d'ordre 1

$$\theta = 0, \quad \varphi + \psi = \alpha$$

avec

$$p = 1, \quad r = 1, \quad n = 3, \quad 2p + r = n.$$

Les équations de Lagrange admettront donc toujours une solution dépendant de deux constantes arbitraires et dans laquelle θ sera identiquement nul. Prenons une droite Δ_1 issue de O et fixe dans l'espace, puis une droite Δ issue de O et fixe dans le corps. Si l'on prend Δ_1 pour axe Oz_1 et Δ pour Oz , les équations de Lagrange avec les angles d'Euler donneront toujours des mouvements se réduisant à une rotation autour de la droite Δ fixe dans l'espace dans la position Δ_1 . Ces solutions sont étrangères. Si, dans le problème de Lagrange et de Poisson, on ne trouve pas de telles solutions étrangères, cela tient à ce que l'axe fixe Oz_1 (vertical) et l'axe mobile Oz (axe de révolution) sont choisis d'une

façon particulière, qui fait que les solutions qui, en général, sont des solutions étrangères, sont, en réalité, de véritables solutions du problème, solutions évidentes *a priori*.

Trouvant ces solutions étrangères, il est facile de s'assurer si elles sont de véritables solutions, il suffit, par exemple, de changer le nom des axes; par exemple, d'appeler Ox la droite qui avait été prise pour Oz . Les solutions à étudier correspondent alors à

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2},$$

et ψ est une fonction de t , connue et dépendant de deux constantes arbitraires. On formera les nouvelles équations de Lagrange du problème et il n'y aura qu'un simple calcul de vérification à faire, sans aucune intégration, pour voir si la solution les vérifie, quelles que soient les deux constantes ou en les particularisant.

C'est d'une façon analogue qu'on procédera dans le cas général; on fera un changement de paramètres, de façon que les positions d'indétermination considérées ne soient plus des positions d'indétermination et l'on verra si l'on peut particulariser les constantes et fonctions arbitraires, de façon que la solution trouvée vérifie les nouvelles équations. Les solutions satisfaisant à cette condition seront de véritables solutions du problème et les autres de véritables solutions étrangères.

En résumé, les équations de Lagrange qu'on est habitué à considérer (tout au moins dans le cas simple des paramètres indépendants), comme la traduction rigoureuse du mouvement, donnent fréquemment, par suite du choix des paramètres, des solutions étrangères au problème proposé. Si, dans la plupart des problèmes classiques ou des exemples simples, de telles solutions ne se présentent pas, cela tient à ce que les paramètres qu'on est naturellement conduit à prendre sont tels que les solutions qui s'introduiraient comme solutions étrangères, par suite de la nature des paramètres et indépendamment de la nature des forces, se trouvent être en réalité, par suite de la nature de ces forces, de véritables solutions du problème.

SUR LES MOUVEMENTS (A LA HELMHOLTZ) D'UN LIQUIDE
DANS UN CANAL SYMÉTRIQUE ;

PAR M. HENRI VILLAT.

Introduction. — Dans un Mémoire publié aux *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo* ⁽¹⁾, M. U. Cisotti a étudié le mouvement permanent d'un solide dans un canal rectiligne indéfini, au cas où le solide (et le mouvement) sont doués de symétrie par rapport à l'axe du canal, et où le fluide, incompressible et irrotationnel, est animé d'un mouvement discontinu à la Helmholtz, avec sillage à l'arrière du corps. Ce problème est alors identique à celui du mouvement permanent discontinu d'un fluide dans un canal renfermant un obstacle fixe (symétrique).

Je me propose d'abord dans ce qui suit de compléter sur un point les élégants résultats de M. Cisotti, en établissant une formule générale propre à déterminer la solution du problème posé, dans le cas où la forme du solide mobile (ou de l'obstacle fixe) est donnée à l'avance. La fonction arbitraire que j'introduis à cet effet dans les calculs jouit de propriétés caractéristiques qui peuvent s'énoncer immédiatement, et qui appartiennent également à toutes les fonctions correspondant à des solides dont le contour a même allure. De la sorte, on sait exactement où il faut chercher la solution du problème pour un obstacle donné; et, si la solution rigoureuse dépend de l'intégration d'une équation fonctionnelle inabordable en l'état actuel de nos connaissances ⁽²⁾, il devient du moins possible d'en approcher pratiquement aussi près que l'on veut.

J'ai indiqué le détail d'un exemple particulier, pour un obstacle

⁽¹⁾ U. CISOTTI, *Sul moto di un solido in un canale* (R. C. del Circolo di Palermo, 2^e semestre, 1909).

⁽²⁾ Cf. T. LEVI-CIVITA, *Scie e leggi di resistenza* (R. C. Palermo, 1907). — H. VILLAT, *Sur la résistance des fluides* (Annales de l'Ecole normale sup., 1911). — *Sur le mouvement d'un solide donné* (Journal de Mathématiques, 1911).

ayant l'apparence d'une carène de navire, cas pratiquement le plus intéressant. On sait, comme M. M. Brillouin l'a montré dans plusieurs récentes publications ⁽¹⁾, que de multiples précautions sont à prendre pour que la solution analytique obtenue ne soit pas illusoire et réponde bien au problème d'Hydrodynamique posé, en restant dans le domaine de l'Hydrodynamique rationnelle tout au moins. Ces précautions nécessaires légitiment les calculs qui accompagnent l'exposé de l'exemple traité.

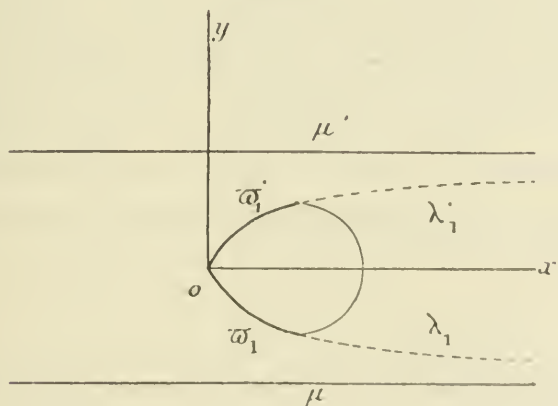
En terminant, j'indique une méthode très simple pour traiter le mouvement d'un fluide dans un canal de forme quelconque (mais symétrique) renfermant un obstacle également symétrique.

Les formules générales s'obtiennent presque immédiatement, pour déterminer le mouvement dans le cas où l'obstacle et les parois du canal ont une forme donnée. Elles se rattachent très intimement à celles que j'ai démontrées dans un travail antérieur (*Sur la résistance des fluides*) à propos du fluide indéfini.

Quelques-uns des résultats qui vont suivre ont fait l'objet d'une Note communiquée à l'Académie des Sciences le 6 février 1911 (*Comptes rendus*, t. CLII, p. 303).

Rappel de quelques résultats. — Je commence par rappeler en quelques lignes les formules obtenues par M. Cisotti. Soient μ

Fig. 1.

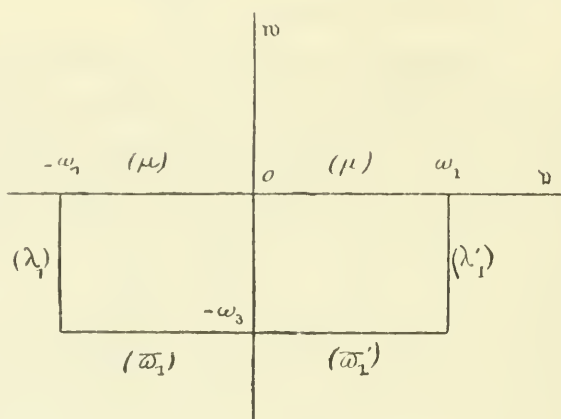


et μ' les parois du canal; ω_1 et ω_1' les portions du contour de

⁽¹⁾ M. BRILLOUIN, *Les surfaces de glissement d'Helmholtz* (*Ann. de Chim. et de Phys.*, 1911; *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, décembre 1910, juillet 1911).

l'obstacle, en contact avec le liquide en mouvement ; λ_1 et λ'_1 les lignes de glissement séparant le liquide en mouvement du liquide formant sillage à l'arrière. M. Cisotti fait correspondre au champ occupé par le liquide en mouvement, dans le plan $z = x + iy$, l'aire d'un rectangle (voir la fig. 2) ⁽¹⁾ d'un certain plan $u = v + iw$,

Fig. 2.



les frontières se correspondant comme l'indique le dessin ; d'ailleurs, à deux points du plan u symétriques par rapport à l'axe imaginaire, correspondent deux points du plan z , symétriques par rapport à l'axe du canal.

Les abscisses des bords verticaux du rectangle sont $\pm \omega_1$, et l'ordonnée du bord horizontal inférieur est $-\omega_3$; ω_1 et ω_3 désignant les deux demi-périodes (la première réelle, la seconde imaginaire pure) des fonctions elliptiques, au moyen desquelles on a effectué la représentation conforme ⁽²⁾. ω_1 et $\frac{\omega_3}{i}$ sont > 0 .

Tous les éléments géométriques et cinématiques du mouvement

⁽¹⁾ Je rectifie ici une légère inadvertance de M. Cisotti, qui introduit le rectangle symétrique du nôtre par rapport à l'axe ou , ce qui rend impossible la représentation conforme. Il est facile de voir qu'il faut en conséquence changer le signe de la fonction $t_0(u)$ (*loc. cit.* § 12) et changer en $-\omega_3$ la limite inférieure de certaines intégrales définies figurant au paragraphe 13.

⁽²⁾ M. Cisotti désigne ces mêmes demi-périodes par ω et $i\omega'$; nous avons introduit la notation du texte dans le but de pouvoir plus facilement renvoyer aux tableaux de formules, si commodes, du *Traité des Fonctions elliptiques*, de MM. Tannery et Molk (Gauthier-Villars, 4 vol.).

peuvent être exprimés au moyen de la variable u , et d'une certaine fonction $t(u)$ de cette variable, assujettie aux conditions suivantes : elle doit être régulière et continue dans le rectangle considéré, contour compris, sauf peut-être pour $u = \omega_3$ qui correspond à la proue de l'obstacle ; réelle sur les bords verticaux, purement imaginaire sur l'axe réel. Si l'on pose

$$t(u) = \mathfrak{I} + i\tau,$$

$\mathfrak{I}$ et τ étant réels, le changement du signe de u change simplement le signe de $\mathfrak{I}$. Un point quelconque du plan du mouvement est fourni par la formule

$$(1) \quad z = x + iy = \int_{-\omega_3}^u e^{it} \frac{p'u}{e_1 - p'u} du,$$

où l'intégration est supposée faite le long d'un chemin quelconque intérieur au rectangle ou empruntant ses bords. La vitesse de la molécule fluide placée en ce point est égale à $e^{\tau+i\mathfrak{I}}$ au sens vectoriel, c'est-à-dire que la valeur absolue de la vitesse est e^τ , et que $\mathfrak{I}$ est l'angle que fait cette vitesse avec l'axe Ox . En prenant l'intégrale précédente le long des bords du rectangle, en partant du point $-\omega_3$, on obtiendrait successivement les points des parois du solide immergé et les points des lignes de glissement. La résistance de l'obstacle et le coefficient de contraction (rapport des distances à une paroi du canal des deux points extrêmes, dont l'un est à l'infini, de la ligne de glissement voisine) sont alors déterminés au moyen d'une seule intégration, par des formules qu'on trouvera dans le Mémoire de M. Cisotti. La résistance s'interprète élégamment d'une manière géométrique : avec les unités choisies, elle est égale au rapport du carré de la demi-largeur asymptotique du sillage, à la demi-largeur du canal.

Toute la question revient donc, en définitive, à déterminer la fonction $t(u)$ qui correspond à un obstacle donné. M. Cisotti a déterminé cette fonction pour le cas d'un obstacle formé de deux lames rectilignes également inclinées sur l'axe du canal, et il a montré que le degré d'arbitraire de cette fonction pour tous les autres cas est celui d'une série de Laurent, dont un coefficient sur deux est arbitraire. Mais on ne sait rien jusqu'ici sur la façon dont

cette série de Laurent pourrait être reliée à la forme de l'obstacle.

Je vais établir une nouvelle formule qui nous donnera la fonction $t(u)$ d'une manière qui mette en évidence la forme de l'obstacle correspondant.

Cas d'un obstacle polygonal. — Nous utiliserons à cet effet la fonction particulière que nous allons former, et que nous désignerons par $t_1(u)$, relative à un obstacle polygonal. Nous ne nous occuperons pas dans ce calcul de l'impossibilité physique qui se présenterait en chaque sommet du polygone où celui-ci tournerait vers le fluide un angle saillant; cette difficulté sera levée plus tard *a posteriori*, dans le cas limite où nous voulons parvenir.

La fonction t_1 étant définie dans un rectangle, il est tout indiqué de chercher si l'on ne pourrait pas la représenter par une série trigonométrique, que nous écrirons sous la forme

$$t_1(u) = \sum_n i a_n \cos \frac{n\pi}{2\omega_1} u + \sum_n i b_n \sin \frac{n\pi}{2\omega_1} u,$$

les coefficients a_n et b_n étant réels, puisque t doit être imaginaire pure pour u réel.

Pour $u = \pm \omega_1 + i\omega$, t_1 doit être réel; on reconnaît de suite que cela entraîne $a_{2K} = b_{2K+1} = 0$. Enfin, le changement de signe de u ne doit altérer que le signe de la partie réelle de t_1 ; on en conclut facilement $b_{2K} = 0$, et il reste

$$(2) \quad t_1(u) = \sum_K i a_{2K+1} \cos \frac{(2K+1)\pi}{2\omega_1} u.$$

Il faut maintenant déterminer, si possible, les coefficients a_{2K+1} . A cet effet envisageons la partie réelle de t_1 sur le bord supérieur du rectangle, c'est-à-dire pour $u = -\omega_3 + v$. En posant

$$q = e^{-\frac{\pi\omega_3}{i\omega_1}} \quad (< 1),$$

un calcul élémentaire montre que la partie réelle de t_1 est

devenue

$$(3) \quad + \sum a_{2K+1} \frac{q^{\frac{2K+1}{2}} - q^{-\frac{2K+1}{2}}}{2} \sin \frac{(2K+1)\pi}{2\omega_1} v.$$

Or appelons $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N$, les angles que font avec l'axe Ox les côtés successifs de la ligne polygonale qui constitue dans le cas actuel la paroi π'_1 (les angles analogues relatifs à π_1 sont les mêmes au signe près). Soient de plus $O, r_1, r_2, \dots, r_{N-1}, \omega_1$, les valeurs de v correspondant aux sommets successifs de ce même polygone. On en conclut alors que la partie réelle (3) de t_1 doit être égale à

$$\begin{aligned} & -\theta_N \quad \text{pour} \quad -\omega_1 < v < -r_{N-1}, \\ & \dots\dots\dots, \\ & -\theta_2 \quad \text{»} \quad -r_2 < v < -r_1, \\ & -\theta_1 \quad \text{»} \quad -r_1 < v < 0, \\ & +\theta_1 \quad \text{»} \quad 0 < v < r_1, \\ & \dots\dots\dots, \\ & +\theta_N \quad \text{»} \quad r_{N-1} < v < \omega_1. \end{aligned}$$

Mais, pour que la série trigonométrique (3) prenne justement ces mêmes valeurs dans les intervalles qu'on vient de dire, il suffit de calculer les coefficients par les formules d'Euler-Fourier, appliquées à l'intervalle $-\omega_1 + \omega_1$ de valeurs de v . On retrouve ainsi des valeurs nulles pour les coefficients a_{2K} , et il vient ainsi pour a_{2K+1}

$$\begin{aligned} a_{2K+1} = & + \frac{8}{(2K+1)\pi \left(q^{\frac{2K+1}{2}} - q^{-\frac{2K+1}{2}} \right)} \\ & \times \left\{ \theta_1 \left[1 - \cos \frac{(2K+1)\pi r_1}{2\omega_1} \right] \right. \\ & + \theta_2 \left[\cos \frac{(2K+1)\pi r_1}{2\omega_1} - \cos \frac{(2K+1)\pi r_2}{2\omega_1} \right] + \dots \\ & + \theta_p \left[\cos \frac{(2K+1)\pi r_{p-1}}{2\omega_1} - \cos \frac{(2K+1)\pi r_p}{2\omega_1} \right] + \dots \\ & \left. + \theta_N \cos \frac{(2K+1)\pi r_{N-1}}{2\omega_1} \right\}. \end{aligned}$$

Revenant à la formule (2) nous voyons que l'expression de t_1 est

la suivante

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \iota_1(u) = & -\frac{8i}{\pi} \left\{ \theta_1 \sum_{k=0}^{K=\infty} \frac{q^{\frac{2K+1}{2}}}{(2K+1)(1-q^{2K+1})} \right. \\
 & \times \left[\cos \frac{(2K+1)\pi u}{2\omega_1} - \cos \frac{(2K+1)\pi r_1}{2\omega_1} \cos \frac{(2K+1)\pi u}{2\omega_1} \right] + \dots \\
 & + \theta_p \sum \frac{q^{\frac{2K+1}{2}}}{(2K+1)(1-q^{2K+1})} \\
 & \times \left[\cos \frac{(2K+1)\pi r_{p-1}}{2\omega_1} \cos \frac{(2K+1)\pi u}{2\omega_1} \right. \\
 & \quad \left. - \cos \frac{(2K+1)\pi r_p}{2\omega_1} \cos \frac{(2K+1)\pi u}{2\omega_1} \right] + \dots \\
 & \left. + \theta_N \sum \frac{q^{\frac{2K+1}{2}}}{(2K+1)(1-q^{2K+1})} \cos \frac{(2K+1)\pi r_{N-1}}{2\omega_1} \cos \frac{(2K+1)\pi u}{2\omega_1} \right\}
 \end{aligned}$$

Or, en utilisant toujours les fonctions elliptiques construites avec les demi-périodes ω_1 et ω_3 , et en tenant compte de la définition de celles-ci, définition entraînée par les formules (1)

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} e_1 &= \frac{2a^2-1}{3}, \\ e_2 &= \frac{2-a^2}{3}, \\ e_3 &= -\frac{1+a^2}{3}; \end{aligned} \right.$$

on sait qu'on peut écrire (2)

$$(6) \quad \sum \frac{q^{\frac{2K+1}{2}}}{1-q^{2K+1}} \sin \frac{(2K+1)\pi u}{2\omega_1} = \frac{a\omega_1}{2\pi} \frac{\sigma u}{\sigma_3 u}$$

et par suite

$$(7) \quad \sum \frac{q^{\frac{2K+1}{2}}}{(2K+1)(1-q^{2K+1})} \cos \frac{(2K+1)\pi u}{2\omega_1} = -\frac{a}{4} \int_{\omega_1}^u \frac{\sigma u}{\sigma_3 u} du,$$

(1) Cf. CISOTTI, *loc. cit.*, form. (27).

(2) Cf. HALPHEN, *Fonctions elliptiques*, t. I, p. 431; et CISOTTI, paragraphe 12.

en observant que les deux membres s'annulent pour $u = \omega_1$. De là on conclut sans difficulté

$$\begin{aligned}
 (8) \quad & \sum \frac{q^{\frac{2K+1}{2}}}{(2K+1)(1-q^{2K+1})} \cos \frac{(2K+1)\pi r_p}{2\omega_1} \cos \frac{(2K+1)\pi u}{2\omega_1} \\
 &= \sum \frac{\frac{1}{2} q^{\frac{2K+1}{2}}}{(2K+1)(1-q^{2K+1})} \\
 & \quad \times \left[\cos \frac{(2K+1)\pi(u+r_p)}{2\omega_1} + \cos \frac{(2K+1)\pi(u-r_p)}{2\omega_1} \right] \\
 &= -\frac{a}{8} \int_{\omega_1}^{u+r_p} \frac{\sigma u}{\sigma_3 u} du - \frac{a}{8} \int_{\omega_1}^{u-r_p} \frac{\sigma u}{\sigma_3 u} du.
 \end{aligned}$$

Comme nous le verrons plus loin, les quadratures subsistant dans ces dernières formules peuvent s'effectuer; mais la simplification résultant de là, très importante pour un paragraphe ultérieur, ne fournit pour le calcul que je veux faire aucun avantage.

Quoi qu'il en soit, on peut maintenant mettre le coefficient de θ_p dans l'expression de t_1 sous la forme

$$+ \frac{ai}{\pi} [\Phi(u+r_{p-1}) + \Phi(u-r_{p-1}) - \Phi(u+r_p) - \Phi(u-r_p)],$$

où $\Phi(u)$ désigne la fonction

$$(9) \quad \Phi(u) = \int_{\omega_1}^u \frac{\sigma u}{\sigma_3 u} du.$$

Le coefficient de θ_1 est de même

$$+ \frac{ai}{\pi} [2\Phi(u) - \Phi(u+r_1) - \Phi(u-r_1)].$$

Quant au coefficient de θ_N , il est

$$+ \frac{ai}{\pi} [\Phi(u+r_{N-1}) + \Phi(u-r_{N-1})],$$

que je puis encore écrire

$$+ \frac{ai}{\pi} [\Phi(u+r_{N-1}) + \Phi(u-r_{N-1}) - \Phi(u+\omega_1) - \Phi(u-\omega_1)].$$

Je dis qu'on a en effet

$$(10) \quad \Phi(u+\omega_1) + \Phi(u-\omega_1) = 0.$$

c'est-à-dire de

$$(r_p - r_{p-1}) \frac{\sigma(u + r_p)}{\sigma_3(u + r_p)} - (r_p - r_{p-1}) \frac{\sigma(u - r_p)}{\sigma_3(u - r_p)},$$

on en conclut que l'expression (11) de t_1 constitue, pour N grand, une évaluation approchée de l'intégrale suivante (qui sera, par suite, la limite de la fonction t_1 dans les conditions énoncées),

$$(12) \quad t(u) = -\frac{ai}{\pi} \int_0^{\omega_1} \left[\frac{\sigma(u+r)}{\sigma_3(u+r)} - \frac{\sigma(u-r)}{\sigma_3(u-r)} \right] \varphi(r) dr.$$

Cette formule est susceptible de recevoir différentes formes; elle peut s'écrire

$$t(u) = -\frac{ai}{\pi} \int_0^{\omega_1} [\xi_{03}(u+r) - \xi_{03}(u-r)] \varphi(r) dr,$$

puis, en utilisant la relation (Cf. TANNERY et MOLK, LXV, 3)

$$\xi_{03}(u+r) - \xi_{03}(u-r) = \frac{2 \xi_{03} r \xi_{13} u \xi_{23} u}{1 - (e_3 - e_1)(e_3 - e_2) \xi_{03}^2 r \xi_{03}^2 u},$$

il vient

$$(13) \quad t(u) = -\frac{2ai}{\pi} \xi_{13} u \xi_{23} u \int_0^{\omega_1} \frac{\xi_{03} r \varphi(r)}{1 - (e_3 - e_1)(e_3 - e_2) \xi_{03}^2 r \xi_{03}^2 u} dr$$

ou

$$(13') \quad t(u) = -\frac{2ai}{\pi} \frac{\sigma_1 u \sigma_2 u}{(\sigma_3 u)^2} \int_0^{\omega_1} \frac{\frac{\sigma r}{\sigma_3 r} \varphi(r)}{1 - (e_3 - e_1)(e_3 - e_2) \left(\frac{\sigma r}{\sigma_3 r} \right)^2 \left(\frac{\sigma u}{\sigma_3 u} \right)^2} dr.$$

Il faudrait maintenant faire voir que le procédé employé, par passage à la limite, est légitime et que la fonction $t(u)$ représentée par la formule précédente résout bien le problème posé, pour un obstacle répondant à une fonction $\varphi(r)$ supposée donnée. Les démonstrations nécessaires se conduisant exactement de la même façon que celles que j'ai indiquées dans un autre Mémoire ⁽¹⁾, sans qu'il se présente ici de difficultés nouvelles, je me contenterai d'énoncer les résultats, renvoyant, pour la marche des calculs, au Mémoire cité.

(1) H. VILLAT, *Le problème de Dirichlet dans une aire annulaire* (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 1^{er} semestre 1912).

Si la fonction $\varphi(r)$ est continue lorsque r varie de 0 à ω_1 , la formule (13) définit une fonction de u uniforme et régulière dans tout le rectangle du plan u indiqué dans la figure 2. Bien que la formule (13) en question ne soit pas directement applicable lorsque le point u est situé sur le bord inférieur de ce rectangle, on peut démontrer que la fonction $t(u)$ est partout continue, sauf en général pour $u = -\omega_3$, et que sa partie réelle tend vers $\varphi(r)$ ou $-\varphi(r)$ lorsque le point u situé dans le rectangle tend vers le point $r = \omega_3$ ou $-r = \omega_3$ du bord. Cette partie réelle tend vers zéro quand on s'approche de l'axe réel, et la partie imaginaire tend vers zéro quand on s'approche des bords verticaux. La formule (13) fournit donc une fonction $t(u)$ satisfaisant à toutes les conditions requises.

Si, maintenant, on observe que la façon dont varie $\varphi(r)$ lorsque r varie de 0 à ω_1 , est intimement liée à la forme de la paroi ϖ'_1 , on en conclut que cette formule (13) permet de résoudre, pour un obstacle de forme donnée à l'avance, le problème d'Hydrodynamique posé; il suffira en effet de savoir le sens de la variation de la tangente à la paroi ϖ'_1 de l'obstacle, et les limites de cette variation, pour en déduire immédiatement les propriétés correspondantes de la fonction $\varphi(r)$; ces propriétés caractériseront d'ailleurs les fonctions $\varphi(r)$ fournissant des obstacles dont la paroi ait la même allure. Parmi les fonctions $\varphi(r)$ ainsi définies, il sera toujours possible d'en choisir une de telle manière que l'obstacle résultant diffère aussi peu que l'on voudra d'un obstacle donné (par exemple graphiquement).

Notons en passant que la formule (13) fait connaître l'intégrale générale du mouvement d'un solide symétrique dans un canal rectiligne, sous une forme où la fonction arbitraire $\varphi(r)$ dont la question dépend est nettement en évidence.

On sait, du reste, que certaines conditions doivent être remplies par cette arbitraire $\varphi(r)$, pour que la solution obtenue ne soit pas illusoire (*Cf.* BRILLOUIN, *loc. cit.*). Pour qu'il ne se présente aucune impossibilité, il est nécessaire et suffisant :

1° Que nulle part dans le fluide la vitesse ne devienne plus grande que 1, valeur limite qu'elle atteint le long des lignes de glissement λ_1 et λ'_1 (condition imposée par la considération des pressions);

2° Que les lignes qui limitent, dans le plan z , le domaine occupé par le fluide en mouvement d'Helmholtz, ne se coupent pas elles-mêmes, ni les unes les autres (condition nécessaire et suffisante pour que les représentations conformes effectuées soient bien telles que la méthode les a supposées initialement, c'est-à-dire qu'elle fassent correspondre les domaines des plans z et u d'une façon biunivoque. Le sens physique de cette nécessité est d'ailleurs évident).

Ces remarques étant faites, nous allons nous attacher à l'étude détaillée d'un cas particulier qui fournira le premier exemple connu relatif à un obstacle courbe.

Auparavant, il nous faut développer quelques calculs qui nous seront indispensables, relatifs à la fonction $\Phi(u)$ introduite dans le précédent paragraphe, ce qui nous ramènera un instant sur le problème de Réthy-Bobyleff dans le canal; on voit, en effet, que si le polygone considéré se réduit à un ensemble de deux lames rectilignes faisant Ox respectivement les angles $\pm \theta_1$, la fonction t_0 correspondante sera fournie par la formule (11) dans laquelle on fera

$$\theta_2 = \dots = \theta_p = \dots = \theta_N = 0, \quad r_1 = \omega_1,$$

et, en vertu de (10), il restera dans ces conditions

$$(14) \quad t_0(u) = + \frac{2\alpha i}{\pi} \theta_1 \Phi(u),$$

et la fonction t_0 est alors bien celle qui résout le problème susdit.

Calcul de $\Phi(u)$. — On peut faire disparaître le signe d'intégration qui figure dans cette fonction $\Phi(u)$, de différentes manières; en voici une bien simple.

On sait qu'on a (Cf. TANNERY et MOLK, t. I, p. 189)

$$p'u = -2 \frac{\sigma_1 u}{\sigma u} \frac{\sigma_2 u}{\sigma u} \frac{\sigma_3 u}{\sigma u};$$

par conséquent, en remplaçant $\frac{\sigma_\alpha u}{\sigma u}$ par sa définition $\sqrt{pu - e_\alpha}$, il vient

$$\Phi(u) = \int_{\omega_1}^u \frac{-p'u \, du}{2 \sqrt{pu - e_1} \sqrt{pu - e_2} (pu - e_3)},$$

c'est-à-dire, en posant $X = pu$,

$$\Phi(u) = -\frac{1}{2} \int_{e_1}^X \frac{dX}{\sqrt{X-e_1} \sqrt{X-e_2} (X-e_3)}.$$

En posant encore

$$\frac{X-e_1}{X-e_2} = Y^2,$$

ceci se transforme très aisément en l'expression

$$\Phi(u) = \int_0^Y \frac{dY}{(e_2-e_3) Y^2 - (e_1-e_3)},$$

c'est-à-dire

$$(15) \quad \Phi(u) = \frac{1}{2 \sqrt{e_1-e_3} \sqrt{e_2-e_3}} \log \frac{1 - Y \frac{\sqrt{e_2-e_3}}{\sqrt{e_1-e_3}}}{1 + Y \frac{\sqrt{e_2-e_3}}{\sqrt{e_1-e_3}}}.$$

Revenant à la variable u , et observant qu'on a

$$e_1 - e_3 = a^2,$$

$$e_2 - e_3 = 1$$

et, par suite ($\sqrt{e_2-e_3}$ est négatif avec les notations adoptées;
Cf. TANNERY et MOLK, t. I, p. 202),

$$(16) \quad \begin{cases} \sqrt{e_1-e_3} = a, \\ \sqrt{e_2-e_3} = -1; \end{cases}$$

il vient enfin pour $\Phi(u)$

$$\Phi(u) = -\frac{1}{2a} \log \frac{\frac{\sqrt{e_1-e_3}}{\sqrt{e_2-e_3}} - \frac{\sigma_1 u}{\sigma_2 u}}{\frac{\sqrt{e_1-e_3}}{\sqrt{e_2-e_3}} + \frac{\sigma_1 u}{\sigma_2 u}}$$

ou encore

$$\Phi(u) = -\frac{1}{2a} \log \frac{\frac{\sqrt{e_1-e_3}}{\sqrt{e_2-e_3}} - \xi_{12} u}{\frac{\sqrt{e_1-e_3}}{\sqrt{e_2-e_3}} + \xi_{12} u}.$$

Par suite, la fonction $t_0(u)$ qui convient au problème de

Bobyleff est

$$(17) \quad t_0(u) = -\frac{i\theta_1}{\pi} \log \frac{\frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{e_2 - e_3}} - \xi_{12} u}{\frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{e_2 - e_3}} + \xi_{12} u} = -\frac{i\theta_1}{\pi} \log \frac{\xi_{12} u + \xi_{12} \omega_3}{-\xi_{12} u + \xi_{12} \omega_3}.$$

La détermination qu'il faut prendre pour le logarithme est, comme cela résulte des calculs faits ci-dessus, celle dont la partie imaginaire s'annule pour $u = 0$; on voit bien qu'alors $t_0(u)$ est imaginaire pure, si le point u décrit le côté du rectangle situé sur l'axe réel, et il n'est pas malaisé de vérifier, *a posteriori*, les propriétés de cette fonction $t_0(u)$; nous laisserons cette vérification de côté, pour nous attacher à l'établissement de ce fait, que la solution fournie par $t_0(u)$ est effectivement acceptable, du point de vue hydrodynamique. Il est clair du reste que ce fait est bien probable; sa démonstration nous permettra d'obtenir certains résultats qui nous seront plus loin très utiles.

Voyons d'abord ce qui concerne le champ du plan z , occupé par le liquide en mouvement; ce champ sera d'un seul tenant, comme cela va résulter du sens de la variation de l'angle $\mathfrak{Z}$ (du courant avec l'axe des x), le long de la ligne libre λ'_1 , par exemple.

Il nous faut, à cet effet, calculer la partie réelle de $t_0(u)$ pour

$$u = \omega_1 - h \quad \left(0 < \frac{h}{i} < \frac{\omega_3}{i}\right).$$

Or on a (TANNERY et MOLK, LX, 4)

$$\xi_{12}(\omega_1 - h) = -\sqrt{e_1 - e_3} \xi_{03}(-h) = \sqrt{e_1 - e_3} \xi_{03}(h),$$

et, par suite, il vient

$$(18) \quad t_0(\omega_1 - h) = \frac{i\theta_1}{\pi} \log \frac{1 + \sqrt{e_2 - e_3} \xi_{03}(h)}{1 - \sqrt{e_2 - e_3} \xi_{03}(h)}.$$

Faisons varier h de 0 à ω_3 , c'est-à-dire $\xi_{03}(h)$ de 0 à l'infini, [$\xi_{03}(h)$ reste alors imaginaire pure avec un coefficient de i positif; Cf. TANNERY et MOLK, t. II, p. 176 et 188]. Donc, en se rappelant que $\sqrt{e_2 - e_3}$ est négatif, $t_0(\omega_1 - h)$ est de la forme

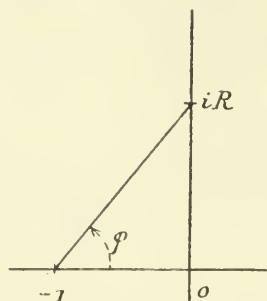
$$t_0(\omega_1 - h) = \frac{i\theta_1}{\pi} \log \frac{1 - iR}{1 + iR},$$

où la quantité R réelle varie en croissant de 0 à $+\infty$. Mais on se rend facilement compte que, si l'on fait décrire au point iR l'axe imaginaire à partir de l'origine, on a, à chaque instant (*voir la figure 3*),

$$\log \frac{1-iR}{1+iR} = -2i\varphi,$$

φ désignant l'angle indiqué, nul si le point iR est en 0. Par suite,

Fig. 3.

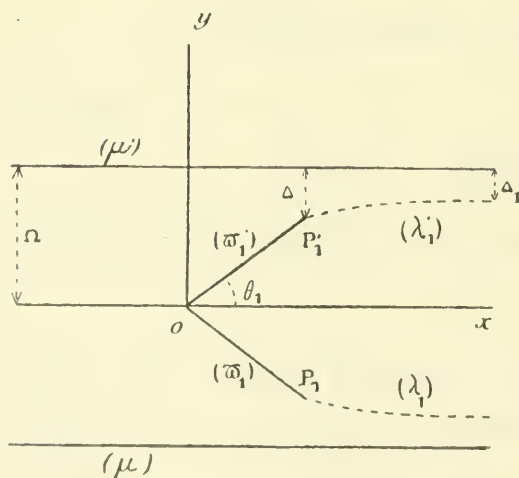


$t_0(\omega_1 - h)$, qui est réel et égal à l'angle $\Im$, que nous voulons évaluer, est

$$(19) \quad \Im = t_0(\omega_1 - h) = \frac{2\theta_1}{\pi} \varphi,$$

et il varie de 0 à θ_1 , en croissant constamment, dans les conditions

Fig. 4.



indiquées. Or, dans ces mêmes conditions, le point z décrit la ligne de glissement λ'_1 , en partant de l'infini pour venir rejoindre la

paroi ϖ'_1 . L'allure de cette ligne est donc bien telle que le champ du plan z occupé par le liquide soit d'un seul tenant. (La ligne λ'_1 ne recoupe évidemment pas la paroi μ' , dont elle reste à une distance asymptotique connue, égale à π avec les unités choisies.)

La seconde difficulté à étudier concerne les vitesses dans le fluide, vitesses qui ne doivent nulle part dépasser la limite 1, ce qui revient à dire que le coefficient de i dans $t_0(u)$ ne doit nulle part être positif; son maximum doit être zéro. Comme ce coefficient τ est harmonique et régulier dans le rectangle de la figure 2, son maximum ne peut être atteint que sur les bords; or τ est nul sur les bords verticaux du rectangle; il suffit donc de prouver qu'il ne peut devenir positif sur les bords horizontaux, c'est-à-dire pour

$$u = v \quad \text{ou} \quad u = -\omega_3 + v \quad (0 < v < \omega_1).$$

Pour $u = v$ ($0 < v < \omega_1$), $\xi_{12}v$ varie de 1 à 0 en décroissant, et

$$\frac{\frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{e_2 - e_3}} - \xi_{12}v}{\frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{e_2 - e_3}} + \xi_{12}v}$$

varie de $-\frac{\frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{e_2 - e_3}} + 1}{-\frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{e_2 - e_3}} - 1}$ (> 1) à 1 en décroissant; donc

$$\log \frac{\frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{e_2 - e_3}} - \xi_{12}v}{\frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{e_2 - e_3}} + \xi_{12}v}$$

est réel et positif, et $t_0(v)$ reste imaginaire pure avec un coefficient de i négatif.

Pour $u = -\omega_3 + v$ ($0 < v < \omega_1$), on a (Cf. TANNERY et MOLK, LX, 4)

$$\xi_{12}(-\omega_3 + v) = -\frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{e_2 - e_3}} \xi_{21}v,$$

et, par suite, $t_0(u)$ devient

$$t_0(-\omega_3 + v) = -\frac{i\theta_1}{\pi} \log \frac{1 + \xi_{21}v}{1 - \xi_{21}v},$$

ce qu'on met aisément sous la forme

$$(20) \quad t_0(-\omega_3 + v) = \theta_1 - i \frac{\theta_1}{\pi} \log \frac{\xi_{21} v + 1}{\xi_{21} v - 1}.$$

Le coefficient de i est ici

$$- \frac{\theta_1}{\pi} \log \frac{\xi_{21} v + 1}{\xi_{21} v - 1},$$

et il est visiblement toujours négatif, $\xi_{21} v$ variant entre 1 et l'infini (> 0).

Notre assertion est donc complètement légitimée (1).

(1) Il est intéressant de constater que, pour les calculs pratiques, la présence des fonctions elliptiques ne complique en rien les opérations, et qu'en utilisant les formules générales, pour ce problème de Bobyleff actuel, on retombera sur les calculs mêmes auxquels M. Cisotti a été conduit par la méthode indiquée à la fin de son Mémoire (§ 15).

On sait que la résistance de l'obstacle et le coefficient de contraction seront déterminés, dès qu'on connaîtra les longueurs Ω , Δ_1 et Δ (ou OP'_1) de la figure. Or par convention (choix de l'unité de longueur) on a $\Delta_1 = \pi$. Puis le régime étant permanent, il faut que le débit soit le même en aval et en amont, d'où $\Omega V_\infty = \pi$, en appelant V_∞ la vitesse en amont à l'infini, donnée par $V_\infty = e^\tau$ (pour $u = 0$), c'est-à-dire ici

$$V_\infty = e^{-\frac{\theta_1}{\pi} \log \frac{\frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{e_2 - e_3}} - 1}{\frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{e_2 - e_3}} + 1}} = \left(\frac{a+1}{a-1} \right)^{-\frac{\theta_1}{\pi}} = \left(\frac{a-1}{a+1} \right)^{\frac{\theta_1}{\pi}}.$$

Il ne reste donc à calculer que OP'_1 , lequel est donné [formule (1)] par

$$OP'_1 = \int_{\varpi'_1} d\varpi'_1 = \int_{\varpi'_1} |dz| = \int_0^{+\omega_1} e^{-\tau} \frac{p'(-\omega_3 + v)}{e_1 - p(-\omega_3 + v)} dv.$$

On a calculé, il y a un instant, la valeur de τ sur le bord inférieur du rectangle [formule (20)], d'où il résulte

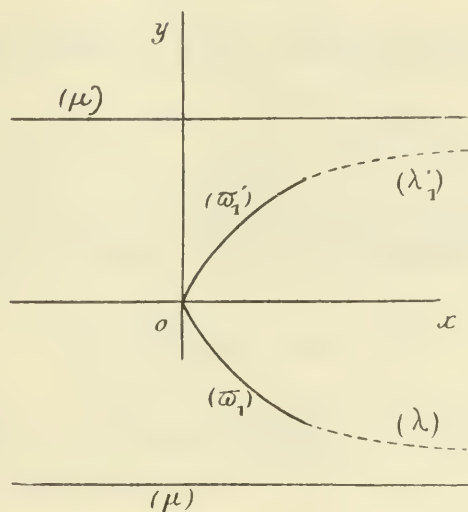
$$OP'_1 = \int_0^{\omega_1} \left(\frac{\xi_{21} v + 1}{\xi_{21} v - 1} \right)^{\frac{\theta_1}{\pi}} \frac{p'(-\omega_3 + v)}{e_1 - p(-\omega_3 + v)} dv.$$

On va tout exprimer dans cette formule, au moyen des fonctions ξ . On a d'abord (TANNERY et MOLK, LXIII, 5)

$$\frac{p'u}{e_1 - pu} = 2 \xi_{30} u \xi_{21} u,$$

Étude d'un obstacle particulier. — Proposons-nous d'appliquer les généralités qui ont été exposées ci-dessus, au cas particulier d'un obstacle ayant la forme indiquée figure 5.

Fig. 5.



La fonction $\varphi(r)$ intervenant dans la formule générale (13)

puis (TANNERY et MOLK, t. LX, p. 4)

$$\begin{aligned} \frac{p'(-\omega_3 + v)}{e_1 - p(-\omega_3 + v)} &= 2 \xi_{30}(-\omega_3 + v) \xi_{21}(-\omega_3 + v) \\ &= 2(-\sqrt{e_1 - e_3} \sqrt{e_2 - e_3} \xi_{03} v) \left(-\frac{\sqrt{e_2 - e_3}}{\sqrt{e_1 - e_3}} \xi_{12} v \right). \end{aligned}$$

Par suite, en utilisant (16),

$$OP'_1 = 2 \int_0^{\omega_1} \left(\frac{\xi_{21} v + 1}{\xi_{21} v - 1} \right)^{\frac{\theta_1}{\pi}} \xi_{03} v \xi_{12} v dv.$$

Posons, s étant la variable que nous voulons garder,

$$\frac{\xi_{21} v + 1}{\xi_{21} v - 1} = s$$

et (TANNERY et MOLK, LXI, 3)

$$ds = - \frac{2}{(\xi_{21} v - 1)^2} \xi'_{21} v dv = \frac{2(e_2 - e_1) \xi_{01} v \xi_{31} v}{(\xi_{21} v - 1)^2} dv.$$

Il vient

$$OP'_1 = 4 \frac{e_2 - e_3}{e_2 - e_1} \int_0^1 s^{\frac{\theta_1}{\pi}} \frac{ds}{(s - 1)^2} \frac{\xi_{03} v \xi_{12} v}{\xi_{01} v \xi_{31} v}.$$

Puis on a (TANNERY et MOLK, LXI, 2, 5)

$$\frac{\xi_{03} v \xi_{12} v}{\xi_{01} v \xi_{31} v} = \frac{1}{\xi_{21}} (\xi_{13})^2$$

devra, dans ces conditions, être positive, décroissante lorsque r varie de 0 à ω_1 ; les limites de $\varphi(r)$ devront être comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Posons

$$(21) \quad \varphi(r) = P \xi_{23} r,$$

P étant une constante positive. On a (TANNERY et MOLK, LXI, 3)

$$\varphi'(r) = -P(e_2 - e_3) \xi_{03} r \xi_{13} r,$$

et les fonctions $\xi_{03} r$ et $\xi_{13} r$ sont positives entre 0 et ω_1 ; par conséquent, $\varphi(r)$ définie par la formule (21) est positive décroissante; ses valeurs limites étant dans cet intervalle

$$P \quad \text{et} \quad P \frac{\sqrt{e_1 - e_2}}{\sqrt{e_1 - e_3}},$$

il suffira de prendre la constante P , inférieure à $\frac{\pi}{2}$.

et

$$e_1 + \frac{e_2 - e_1}{1 - \xi_{21}^2} = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{1 - \xi_{13}^2},$$

donc

$$\xi_{13}^2 = \frac{e_2 - e_1}{e_2 - e_1 + (e_1 - e_3)(1 - \xi_{21}^2)}.$$

Par suite le quotient $\frac{\xi_{03} v \xi_{12} v}{\xi_{21} v \xi_{31} v}$ s'exprime rationnellement au moyen de $\xi_{21} v$, c'est-à-dire de s , et l'on trouve ainsi, après réductions faciles,

$$OP'_1 = 4 \int_1^\infty \frac{\frac{\theta_1}{s^\pi} ds}{(s+1) [a^2(s+1)^2 - (s-1)^2]}.$$

Cette intégrale est exactement de la forme de celle à laquelle on parvient dans le Mémoire cité (U. CISOTTI, § 15). Comme à cet endroit, on constate qu'elle s'exprime simplement au moyen de la fonction

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\omega t^{x-1}}{\omega t - 1} dt,$$

où ω désigne une constante.

Tous les éléments géométriques du mouvement sont alors connus relativement au problème en question; le coefficient de contraction est maintenant

$$\frac{\pi}{\Delta} = \frac{\pi}{\Omega - OP'_1 \sin \theta_1},$$

et la résistance de l'obstacle est $\frac{(\Omega - \pi)^2}{\Omega}$, d'après le théorème de M. Cisotti.

Observons, en passant, qu'en n'astreignant P qu'à être inférieur à π , les obstacles qui correspondraient à la même fonction posséderaient l'une des formes ci-dessous, selon la valeur de P par rapport à $\frac{\pi}{2}$.

Il nous faut maintenant calculer la fonction $t(u)$, donnée ici par

$$(22) \quad t(u) = -\frac{2ai}{\pi} \xi_{13} u \xi_{23} u \int_0^{\omega_1} \frac{P \xi_{23} r \xi_{03} r}{1 - (e_3 - e_1)(e_3 - e_2) \xi_{03}^2 u \xi_{03}^2 r} dr.$$

Cette intégration s'effectue d'une manière élégante; on a (TANNERY et MOLK, LXI, 3)

$$-(e_1 - e_3) \xi_{03} r \xi_{23} r = \xi'_{13}$$

et (*Id.*, LIX, 6)

$$\xi_{03}^2 r = \frac{1 - \xi_{13}^2 r}{e_1 - e_3}.$$

Donc, il vient

$$t(u) = \frac{2Pai}{\pi(e_1 - e_3)} \xi_{13} u \xi_{23} u \int_0^{\omega_1} \frac{\xi'_{13} r dr}{1 - (e_2 - e_3) \xi_{03}^2 u (1 - \xi_{13}^2 r)}.$$

La vraie variable est alors évidemment

$$\xi_{13} r = Z,$$

qui varie entre 1 et 0; donc, en tenant compte de (16),

$$t(u) = -\frac{2Pi}{a\pi} \frac{\xi_{13} u \xi_{23} u}{\xi_{03}^2} \int_0^1 \frac{dZ}{Z^2 + \frac{1 - (e_2 - e_3) \xi_{03}^2 u}{(e_2 - e_3) \xi_{03}^2 u}},$$

Mais on a, toujours en tenant compte de (16),

$$\frac{1 - (e_2 - e_3) \xi_{03}^2 u}{(e_2 - e_3) \xi_{03}^2 u} = \frac{pu - e_2}{e_1 - e_3} = \xi_{20}^2 u.$$

De sorte que l'intégrale qui figure dans $t(u)$ peut s'écrire

$$\int_0^1 \frac{dZ}{Z^2 + \xi_{20}^2 u} = \frac{-1}{2i\xi_{20} u} \log \left(\frac{1 + i\xi_{20} u}{i\xi_{20} u - 1} \right) = \frac{i}{2\xi_{20} u} \log \left(\frac{\xi_{20} u - i}{\xi_{20} u + i} \right).$$

Donc il vient

$$t(u) = \frac{P}{a\pi} \frac{\xi_{13} u \xi_{23} u}{\xi_{03}^2 \xi_{20} u} \log \left(\frac{\xi_{20} u - i}{\xi_{20} u + i} \right).$$

Maintenant, on démontre facilement l'égalité

$$\frac{\xi_{13} u \xi_{28} u}{\xi_{03}^2 u \xi_{20} u} = \xi_{10} u,$$

d'où

$$(23) \quad t(u) = \frac{P}{a\pi} \xi_{10} u \log \left(\frac{\xi_{20} u - i}{\xi_{20} u + i} \right).$$

Ceci peut se mettre sous une forme plus élégante, en retenant qu'on a

$$e_2 - e_3 = 1,$$

et, par suite (TANNERY et MOLK, XIII, 4, et LX, 1),

$$\sqrt{e_3 - e_2} = i \sqrt{e_2 - e_3} = -i = \xi_{20} \omega_3.$$

D'où, enfin, pour $t(u)$ l'expression

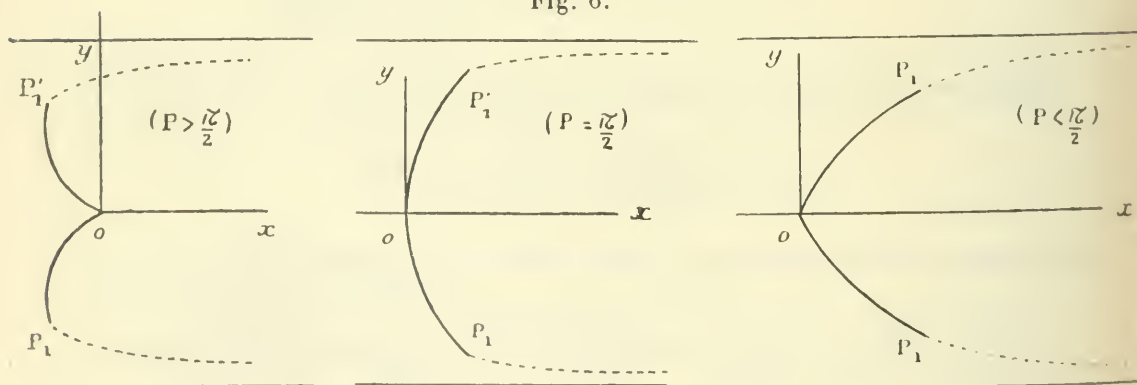
$$(24) \quad t(u) = \frac{P}{a\pi} \xi_{10} u \log \frac{\xi_{20} u + \xi_{20} \omega_3}{\xi_{20} u - \xi_{20} \omega_3}.$$

La détermination qui convient pour le logarithme est celle dont la partie imaginaire est nulle pour $u = 0$.

Cette fonction $t(u)$ est-elle acceptable? C'est ce qu'il nous faut maintenant prouver.

Considérons ici d'abord la difficulté relative aux vitesses qui, nulle part, ne doivent dépasser l'unité : ce qui revient à dire que le coefficient de i dans t ne doit, nulle part, être positif. On voit

Fig. 6.



de suite que tout revient à faire voir que ce fait ne se produit pas sur les bords du rectangle de la figure 2, et plus précisément sur

les bords horizontaux, puisque t est réelle sur les bords verticaux.

Considérons le bord supérieur.

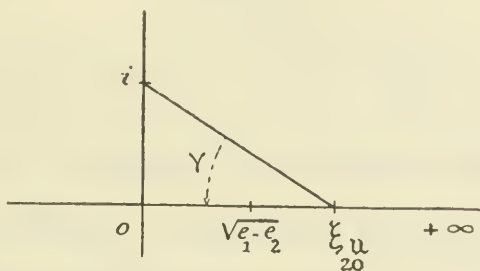
Je dis d'abord que la vitesse ne dépasse pas 1 sur les parois μ et μ' ; il suffit, à cet effet, de considérer $t(u)$ sur la paroi μ' , c'est-à-dire pour

$$0 < u < \omega_1.$$

On sait qu'alors $\xi_{10} u$ est positif et varie entre $+\infty$ et 0. La fonction $\xi_{20} u$ varie de $+\infty$ à $\sqrt{e_1 - e_2}$, en restant réelle et positive; on voit alors, sans peine, qu'en désignant par γ l'angle indiqué sur la figure 7 (nul lorsque le point $\xi_{20} u$ est à l'infini), on a

$$(25) \quad \log \frac{\xi_{20} u - i}{\xi_{20} u + i} = -2i\gamma.$$

Fig. 7.



De sorte qu'on a pour $t(u)$, dans ces conditions,

$$(26) \quad t(u) = \frac{P}{a\pi} \xi_{10} u (-2i\gamma).$$

Cette quantité est imaginaire pure, avec un coefficient de i toujours négatif.

Considérons maintenant le bord inférieur du rectangle.

Il suffit évidemment, à cause de la symétrie, d'envisager la vitesse sur la paroi ω'_1 de l'obstacle, c'est-à-dire de poser

$$u = -\omega_3 + v$$

avec

$$0 < v < \omega_1.$$

Utilisons ici les formules (Cf. TANNERY et MOLK, LX, 3-4, XIII, p. 4),

$$\begin{aligned} \xi_{10}(-\omega_3 + v) &= -\xi_{10}(v + \omega_3) = -\sqrt{e_3 - e_1} \xi_{23} v = i\sqrt{e_1 - e_3} \xi_{23} v = i\alpha \xi_{23} v, \\ \xi_{20}(-\omega_3 + v) &= -\xi_{20}(v + \omega_3) = -\sqrt{e_3 - e_2} \xi_{13} v. \end{aligned}$$

On peut en conclure sur le bord inférieur

$$(27) \quad t(-\omega_3 - v) = \frac{Pi}{\pi} \xi_{23} v \log \frac{-\sqrt{e_3 - e_2} \xi_{13} v + \sqrt{e_3 - e_2}}{-\sqrt{e_3 - e_2} \xi_{13} v - \sqrt{e_3 - e_2}}$$

$$= \frac{Pi}{\pi} \xi_{23} v \log \frac{\xi_{13} v - 1}{\xi_{13} v + 1}.$$

Pour $0 < v < \omega_1$, $\xi_{13} v$ varie en décroissant de 1 à 0, donc la quantité sous le signe log est toujours négative. Il est facile de voir que la partie imaginaire de ce logarithme est alors $-i\pi$. En effet, supposons que le point u tende vers le sommet $-\omega_3 + \omega_1$ du rectangle en suivant les bords $O\omega_1$; ω_1 , $-\omega_3 + \omega_1$; on constate alors de suite que l'expression

$$\log \frac{\xi_{20} u - i}{\xi_{20} u + i}$$

a toujours pour valeur $-2i\gamma$, γ étant toujours l'angle de la figure 7, mais le point $\xi_{20} u$ variant cette fois de $+\infty$ à 0. La valeur, à laquelle on parvient au sommet $-\omega_3 + \omega_1$, est donc $-2i\frac{\pi}{2} = -i\pi$. La partie imaginaire du logarithme est, par suite, constamment égale à $-i\pi$ tout le long du bord inférieur, entre les points $-\omega_3$ et $-\omega_3 + \omega_1$; nous vérifions bien ainsi que la partie réelle de $t(-\omega_3 + v)$ est

$$\frac{iP}{\pi} \xi_{23} v (-i\pi) = P \xi_{23} v,$$

résultat auquel nous devons nous attendre.

La partie imaginaire de $t(-\omega_3 + v)$ est, dans les mêmes conditions,

$$(28) \quad \frac{iP}{\pi} \xi_{23} v \log \frac{1 - \xi_{13} v}{1 + \xi_{13} v}$$

et le coefficient de i est visiblement négatif ou nul, puisque $\xi_{23} v$ est positif, et que

$$\frac{1 - \xi_{13} v}{1 + \xi_{13} v}$$

est au plus égal à 1 pour $0 < v < \omega_1$.

Les vitesses satisfont donc partout à la condition imposée.

Il est indispensable, ensuite, de faire voir que le domaine du plan z , correspondant au rectangle du plan u par l'intermédiaire de notre fonction $t(u)$, est un domaine d'un seul tenant. C'est ce que nous allons prouver en nous assurant de la forme de la ligne de glissement λ'_1 . Pour cela, nous nous placerons sur le bord vertical du rectangle, qui correspond à cette ligne, et nous ferons

$$u = \omega_1 - h,$$

h variant entre 0 et ω_3 , en restant imaginaire pure. On a

$$\begin{aligned}\xi_{10}(\omega_1 - h) &= -\sqrt{e_1 - e_2}\sqrt{e_1 - e_3}\xi_{01}(-h) = \sqrt{e_1 - e_2}\sqrt{e_1 - e_3}\xi_{01}h, \\ \xi_{20}(\omega_1 - h) &= \sqrt{e_1 - e_2}\xi_{31}(-h) = \sqrt{e_1 - e_2}\xi_{31}h,\end{aligned}$$

d'où une valeur de t qu'on peut mettre sous la forme

$$(29) \quad t(\omega_1 - h) = \frac{P}{\pi} \sqrt{e_1 - e_2} \xi_{01} h \log \frac{\sqrt{e_1 - e_2} \xi_{31} h - i}{\sqrt{e_1 - e_2} \xi_{31} h + i}.$$

Or, pour h entre 0 et ω_3 , $\xi_{01}h$ est imaginaire pure, comprise entre 0 et $\frac{1}{\sqrt{e_3 - e_1}}$, c'est-à-dire entre 0 et $\frac{1}{-i\sqrt{e_1 - e_3}} = \frac{i}{\sqrt{e_1 - e_3}}$ (Cf. TANNERY et MOLK, XII, 4).

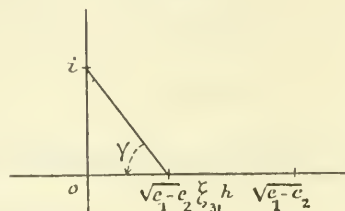
Dans les mêmes conditions, $\xi_{31}h$ est réelle et positive (*Id.*, t. II, p. 176) et décroît de 1 à 0. Alors $\log \frac{\sqrt{e_1 - e_2} \xi_{31} h - i}{\sqrt{e_1 - e_2} \xi_{31} h + i}$ est imaginaire pure, et l'on se convainc facilement (en se reportant à la détermination du logarithme qui convient pour u réel) que sa valeur est $-2i\gamma$, γ désignant l'angle de la figure (positif et plus petit que $\frac{\pi}{2}$). De sorte qu'il vient

$$(30) \quad t(\omega_1 - h) = \frac{2P}{\pi} \sqrt{e_1 - e_2} (-i\xi_{01}h)\gamma,$$

et que cette expression est réelle et positive. Elle représente, lorsque h varie de 0 à ω_3 , l'angle de la tangente à la ligne λ'_1 , avec l'axe des x , lorsqu'on décrit cette ligne λ'_1 depuis l'infini jusqu'au point P'_1 de raccordement avec la paroi ϖ'_1 . Cet angle reste donc positif, en partant de zéro pour $h = 0$ (ce qui correspond bien à la direction asymptotique, horizontale, de la ligne λ'_1).

Voyons comment varie cet angle. Le produit $-i\xi_{01}h$ est une fonction réelle positive croissante, lorsque h varie de 0 à ω_3 ; la figure 8 prouve que γ est aussi croissante positive, dans les mêmes

Fig. 8.



conditions. Donc le produit qui constitue $t(\omega_1 - h)$ est positif croissant. Il en résulte immédiatement que le domaine du plan z , occupé par le liquide en mouvement, est limité par des frontières qui ne peuvent se recouper mutuellement, et dont l'apparence est celle de la figure.

La solution étudiée ci-dessus est donc acceptable, et le problème est résolu, par conséquent, pour des obstacles ayant la forme indiquée sur les figures 5 et 6.

Je vais montrer que, pour tous ces obstacles, la ligne de glissement λ'_1 (et par suite aussi λ_1) se détache de l'obstacle en P'_1 (ou P_1) avec un rayon de courbure nul, ce qui peut s'exprimer pratiquement en disant que *tous ces obstacles sont à bords tranchants*; ce ne sont pas de véritables *proues*, au sens que M. Brillouin attache à ce mot.

Sur une ligne de glissement, λ'_1 , par exemple, la vitesse étant égale à 1, la formule (1) donne pour l'élément d'arc

$$|ds| = |dz| = \left| \frac{p'u du}{e_1 - pu} \right|.$$

L'angle $\mathfrak{S}$ de la tangente à la ligne libre, avec l'axe Ox , est d'ailleurs la valeur de $t(u)$ au point correspondant ($u = \omega_1 - h$). Donc le rayon de courbure de cette ligne est, au signe près,

$$\frac{dz}{dt}.$$

Or, pour $u = \omega_1 - \omega_3$, c'est-à-dire $h = \omega_3$, $\frac{dz}{du}$ (ou $\frac{dz}{dh}$) est évi-

demment nul. Voyons à quoi se réduit $\frac{dt}{dh}$ en ce point (ou, ce qui revient au même, $\frac{dt}{dh}$).

Pour $u = \omega_1 - h$, $t(u)$ est donné par la formule (29) ci-dessus, d'où l'on tire

$$\frac{dt}{dh} = \frac{P\sqrt{e_1-e_2}}{\pi} \left[\xi'_{01} h \log \frac{\sqrt{e_1-e_2}\xi_{31}h-i}{\sqrt{e_1-e_2}\xi_{31}h+i} + \frac{2i\sqrt{e_1-e_2}\xi_{01}h\xi'_{31}h}{(e_1-e_2)(\xi_{31}h)^2+1} \right].$$

Or (TANNERY et MOLK, LXI, 2-3)

$$\xi'_{01}h = e_{21}h\xi_{31}h$$

et

$$\xi'_{31}h = (e_1-e_3)\xi_{01}h\xi_{21}h;$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dh} = \frac{P\sqrt{e_1-e_2}}{\pi} \left[\xi_{21}h\xi_{31}h \log \frac{\sqrt{e_1-e_2}\xi_{31}h-i}{\sqrt{e_1-e_2}\xi_{31}h+i} \right. \\ \left. + 2i\sqrt{e_1-e_2}(e_1-e_3) \frac{(\xi_{01}h)^2\xi_{21}h}{(e_1-e_2)(\xi_{31}h)^2+1} \right]. \end{aligned}$$

Pour $h = \omega_3$, il vient

$$\frac{dt}{dh} \Big|_{(h=\omega_3)} = \frac{2iP}{\pi} (e_1-e_2)(e_1-e_3)(\xi_{01}\omega_3)^2\xi_{21}\omega_3,$$

ce qu'on mettra facilement sous la forme suivante (*Id.*, LX, 1),

$$\frac{dt}{dh} \Big|_{(h=\omega_3)} = \frac{2iP}{\pi} (e_1-e_2) \frac{\sqrt{e_2-e_3}}{\sqrt{e_1-e_3}},$$

ou encore, en utilisant (16) et en se souvenant que $\sqrt{e_2-e_3}$ est négatif,

$$(31) \quad \frac{dt}{dh} \Big|_{(h=\omega_3)} = - \frac{2iP(a^2-1)}{\pi a}.$$

Cette expression n'étant pas nulle, la proposition est démontrée, $\frac{dz}{dt}$ est nul, et les obstacles sont à bords tranchants.

Détermination d'un obstacle formant proue. — Observons tout d'abord que, si l'on pose $u = \omega_1 - h$ dans la fonction $t_0(u)$ qui correspond à la double lame rectiligne, on obtient [*voir infra*,

formule (18)],

$$t_0(\omega_1 - h) = \frac{i\theta_1}{\pi} \log \frac{1 + \sqrt{e_2 - e_3} \xi_{03} h}{1 - \sqrt{e_2 - e_3} \xi_{03} h}.$$

Si l'on effectue sur cette fonction exactement le même calcul que nous venons de faire dans le paragraphe précédent, on trouve sans difficulté

$$\frac{dt_0(\omega_1 - h)}{dh} = \frac{2i\theta_1}{\pi} \sqrt{e_2 - e_3} \frac{\xi'_{03} h}{1 - (e_2 - e_3)(\xi_{03} h)^2},$$

et comme on a

$$\xi'_{03} h = \xi_{13} h \xi_{23} h$$

et

$$1 - (e_2 - e_3)(\xi_{03} h)^2 = (e_2 - e_3)(\xi_{23} h)^2,$$

il vient, après réductions,

$$\frac{dt_0(\omega_1 - h)}{dh} = \frac{2i\theta_1}{\pi \sqrt{e_2 - e_3}} \xi_{12} h.$$

Par conséquent, pour $h = \omega_3$, on a

$$(32) \quad \frac{dt_0}{dh} \Big|_{(h=\omega_3)} = \frac{2i\theta_1}{\pi \sqrt{e_2 - e_3}} \xi_{12} \omega_3 = - \frac{2i\theta_1}{\pi} \frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{e_2 - e_3} = - \frac{2i\theta_1}{\pi} \alpha.$$

Comme cette dernière quantité n'est pas nulle, l'obstacle formé des deux lames rectilignes est lui aussi à bords tranchants.

Mais nous concluons de là un procédé immédiat pour déterminer la solution du problème d'Hydrodynamique proposé, avec des obstacles ayant la forme indiquée par les figures 6, *ces obstacles étant cette fois de véritables proues*.

Envisageons, en effet, la fonction de v , somme des deux fonctions particulières considérées dans les paragraphes précédents, à savoir

$$(33) \quad T(u) = t_0(u) + t(u) = \frac{-i\theta_1}{\pi} \log \frac{-\xi_{12} v + \xi_{12} \omega_3}{\xi_{12} u + \xi_{12} \omega_3} + \frac{P}{\alpha \pi} \xi_{10} u \log \frac{\xi_{20} u + \xi_{20} \omega_3}{\xi_{20} u - \xi_{20} \omega_3}.$$

Dans cette fonction $T(u)$ faisons $u = \omega_1 - h$, calculons $\frac{dT}{dh}$ et exprimons que cette dérivée est nulle pour $h = \omega_3$. Il résulte immédiatement des calculs antérieurs que nous obtiendrons ainsi

la condition

$$\frac{2i\theta_1}{\pi}a + \frac{2iT}{\pi} \frac{a^2-1}{a} = 0$$

à laquelle on peut satisfaire d'une infinité de façons, en prenant pour θ_1 et P des valeurs constantes données par

$$(34) \quad \begin{cases} \theta_1 = -\rho(a^2-1), \\ P = \rho a^2, \end{cases}$$

où ρ est une constante quelconque, que nous choisirons positive, on se rendra compte pourquoi dans un instant.

θ_1 et P étant ainsi déterminés, la fonction $T(u)$ est évidemment celle qui résulte de notre formule générale (13), quand on suppose que la partie réelle de $T(u)$ doive se réduire, pour

$$u = -\omega_3 + v \quad (0 < u < \omega_1),$$

$$(35) \quad \theta_1 + P\xi_{23}v = \rho[a^2\xi_{23}v - (a^2-1)].$$

Or comment varie cette expression, quand v varie de 0 à ω_1 ?

Comme $\xi_{23}v$ diminue alors de 1 à $\frac{\sqrt{e_1-e_2}}{\sqrt{e_1-e_3}} = \frac{\sqrt{a^2-1}}{a}$, elle diminue elle-même de ρ à

$$\rho[a\sqrt{a^2-1} - (a^2-1)] = \rho\sqrt{a^2-1}(a - \sqrt{a^2-1}),$$

quantité positive, puisque $a > 1$.

Il suffira donc de choisir la constante ρ inférieure à π , pour être assuré d'obtenir, au moyen de la fonction $T(u)$ ci-dessus, des obstacles ayant la forme indiquée figure 6. Si $\rho < \frac{\pi}{2}$, on aura des obstacles *en proue de navire*, avec, cette fois, des lignes de glissement *se détachant tangentiellement des bords de l'obstacle, avec un rayon de courbure non nul*.

Mais un point essentiel reste encore en suspens : la solution représentée ainsi par $T(u)$, à savoir

$$(36) \quad T(u) = \frac{\rho}{\pi} \left[a\xi_{10}u \log \frac{\xi_{20}u + \xi_{20}\omega_3}{\xi_{20}u - \xi_{20}\omega_3} + i(a^2-1) \log \frac{\xi_{12}u + \xi_{12}\omega_3}{-\xi_{12}u + \xi_{12}\omega_3} \right]$$

est-elle valable, et ne conduit-elle pas à des impossibilités? La solution est effectivement acceptable, comme on va le démontrer;

mais les raisonnements à faire sont plus délicats que ceux employés précédemment.

Comme dans les cas envisagés ci-dessus, tout revient : 1° à rechercher si la partie imaginaire de $T(u)$ peut devenir positive pour u réel avec $0 < u < \omega_1$, ou pour $u = -\omega_3 + v$, avec $0 < v < \omega_1$; 2° à étudier la nature de la variation de $T(v)$ pour $v = \omega_1 - h$, h étant imaginaire pure et variant de 0 à ω_3 .

1° *Cas de u réel.* — Pour u réel, le premier terme de $T(u)$ est imaginaire pure, et ses valeurs limites, aux extrémités de l'intervalle $0\omega_1$, considéré, sont

$$-\frac{2\rho a i}{\pi} \quad \text{et} \quad 0$$

(je n'insiste pas sur l'indétermination qui se présente pour $u=0$, et qui est facile à lever). Dans les mêmes conditions, le second terme de T varie de

$$\frac{i\rho(a^2-1)}{\pi} \log \frac{a+1}{a-1} \quad \text{à} \quad 0,$$

le coefficient de i allant d'ailleurs constamment en diminuant. Les valeurs de $T(u)$ aux extrémités de l'intervalle sont donc

$$-\frac{\rho i}{\pi} \left[2a - (a^2-1) \log \frac{a+1}{a-1} \right] \quad \text{et} \quad 0.$$

La première de ces expressions se mettra facilement sous la forme

$$-\frac{4\rho ib}{\pi} \left[\frac{1}{1.3} + \frac{b^2}{3.5} + \dots + \frac{b^{2k-2}}{(2k-1)(2k+1)} + \dots \right]$$

[où l'on a posé $b = \frac{1}{a} (< 1)$], et, sous cette forme, il est clair que le coefficient de i est négatif. Du point de vue physique, cela signifie que la vitesse à l'infini, en amont dans le canal, est plus petite que 1, et cela donne la valeur de cette vitesse.

Pour aller plus loin, nous devons nous assurer du sens de la variation du coefficient de i dans $T(u)$. On trouve sans peine

$$\frac{dT}{du} = \frac{\rho a}{\pi} \left[\xi'_{10} \log \frac{\xi_{20} u - i}{\xi_{20} u + i} + \frac{2i \xi_{10} u \xi'_{20} u}{(\xi_{20} u)^2 + 1} \right] + \frac{2\rho i(a^2-1)}{\pi} \frac{\xi_{12} \omega_3 \xi'_{12} u}{(\xi_{12} \omega_3)^2 - (\xi_{12} u)^2},$$

c'est-à-dire (TANNERY et MOLK, *loc. cit.*)

$$\frac{dT}{du} = \frac{\rho a}{\pi} \left[-\xi_{20} u \xi_{30} u \log \frac{\xi_{20} u - i}{\xi_{20} u + i} - \frac{2i(\xi_{10} u)^2 \xi_{30} u}{(\xi_{20} u)^2 + 1} \right] - \frac{2\rho i(a^2 - 1)(e_1 - e_2)\xi_{12}\omega_3 \xi_{02} u \xi_{32} u}{\pi[(\xi_{12}\omega_3)^2 - (\xi_{12} u)^2]}.$$

Dans le premier crochet, nous mettrons en facteur $2i\xi_{20} u \xi_{30} u$, et nous observerons qu'à cause de la relation

$$e_2 - e_3 = 1,$$

on peut écrire

$$\frac{(\xi_{10} u)^2}{\xi_{20} u [1 + (\xi_{20} u)^2]} = \frac{(\xi_{10} u)^2 \xi_{02} u}{e_2 - e_3 + (\xi_{20} u)^2} = \frac{(\xi_{10} u)^2 \xi_{02} u}{(\xi_{30} u)^2} = \xi_{02} u (\xi_{13} u)^2,$$

d'où, pour le crochet en question, l'expression suivante

$$2i\xi_{20} u \xi_{30} u \left[-\frac{1}{2i} \log \frac{\xi_{20} u - i}{\xi_{20} u + i} - \xi_{02} u (\xi_{13} u)^2 \right].$$

Maintenant, on a $\xi_{12}\omega_3 = -\frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{e_2 - e_3}} (= \alpha)$, et par suite

$$\frac{\xi_{02} u \xi_{32} u}{(\xi_{12}\omega_3)^2 - (\xi_{12} u)^2} = \frac{\xi_{02} u \xi_{32} u}{\frac{e_1 - e_3}{e_2 - e_3} - \frac{\rho u - e_1}{\rho u - e_2}} = \frac{\xi_{02} u \xi_{32} u (\xi_{20} u)^2}{(e_1 - e_2)(\xi_{30} u)^2} = \frac{1}{e_1 - e_2} \xi_{03} u.$$

Il vient donc, pour $\frac{dT}{du}$,

$$\frac{dT}{du} = \frac{2\rho i\alpha}{\pi} \left\{ \xi_{20} u \xi_{30} u \left[-\frac{1}{2i} \log \frac{\xi_{20} u - i}{\xi_{20} u + i} - \xi_{02} u (\xi_{13} u)^2 \right] - (a^2 - 1)\xi_{03} u \right\}.$$

Mettons partout en facteur le même produit $2i\xi_{20} u \xi_{30} u$ que ci-dessus, et observons que la relation

$$e_1 - e_2 = a^2 - 1$$

permet d'écrire

$$\xi_{02} u (\xi_{13} u)^2 + (a^2 - 1) \frac{\xi_{03} u}{\xi_{20} u \xi_{30} u} = \xi_{02} u (\xi_{13} u)^2 + (e_1 - e_2) \xi_{02} u (\xi_{03} u)^2 = \xi_{02} u (\xi_{23} u)^2.$$

On en conclura finalement

$$\frac{dT}{du} = \frac{2\rho i\alpha}{\pi} \xi_{20} u \xi_{30} u \left[-\frac{1}{2i} \log \frac{\xi_{20} u - i}{\xi_{20} u + i} - \xi_{02} u (\xi_{23} u)^2 \right],$$

et, par suite, dans l'intervalle considéré, $\frac{1}{i} \frac{dT}{du}$ aura le même signe que la quantité réelle

$$S = -\frac{1}{2i} \log \frac{\xi_{20} u - i}{\xi_{20} u + i} - \xi_{02} u (\xi_{23} u)^2,$$

laquelle est visiblement nulle pour $u = 0$.

Or, on a maintenant

$$\frac{dS}{du} = -\frac{\xi'_{20} u}{(\xi_{20} u)^2 + 1} - \xi'_{02} u (\xi_{23} u)^2 - 2 \xi_{02} u \xi_{23} u \xi'_{23} u$$

ou

$$\frac{dS}{du} = \frac{\xi_{10} u \xi_{30} u}{(\xi_{20} u)^2 + e_2 - e_3} - \xi_{12} u \xi_{32} u (\xi_{23} u)^2 + 2(e_2 - e_3) \xi_{02} u \xi_{23} u \xi_{03} u \xi_{13} u,$$

ce qui peut s'écrire, après quelques réductions,

$$\frac{dS}{du} = \frac{\xi_{10} u}{\xi_{30} u} - \xi_{13} u + 2(\xi_{03} u)^2 \xi_{13} u = 2(\xi_{03} u)^2 \xi_{13} u.$$

Donc $\frac{dS}{du}$ est positif; dans l'intervalle 0, ω_1 , et S y reste, par suite, toujours positif; alors, dans le même intervalle, on a

$$\frac{1}{i} \frac{dT}{du} > 0.$$

Le coefficient de i dans T va donc en croissant, et comme sa limite est zéro pour $u = \omega_1$, *il reste constamment négatif*, ce que nous voulions prouver. Remarquons que nous avons, en même temps, prouvé que la vitesse du liquide allait en croissant constamment le long de la paroi, depuis l'amont jusqu'à l'aval.

2° Cas où $u = -\omega_3 + v$. — Faisons maintenant $u = -\omega_3 + v$ avec $0 < v < \omega_1$. Il résulte alors des calculs des paragraphes antérieurs que le coefficient de i dans T est, dans ces conditions,

$$-\frac{\theta_1}{\pi} \log \frac{\xi_{21} v + 1}{\xi_{21} v - 1} + \frac{P}{\pi} \xi_{23} \log \frac{1 - \xi_{13} v}{1 + \xi_{13} v},$$

c'est-à-dire, vu les valeurs de θ_1 et de P,

$$(37) \quad U(v) = \frac{\rho}{\pi} \left[(a^2 - 1) \log \frac{\xi_{21} v + 1}{\xi_{21} v - 1} + a^2 \xi_{23} v \log \frac{1 - \xi_{13} v}{1 + \xi_{13} v} \right].$$

Cette expression est nulle pour $v = \omega_1$. Je montrerai qu'elle ne devient pas positive, en faisant voir qu'elle est croissante dans l'intervalle considéré. On a, en effet,

$$\frac{\pi}{\rho} \frac{dU}{dv} = (a^2 - 1) \frac{-2\xi'_{21}v}{(\xi_{21}v)^2 - 1} + a^2 \xi'_{23}v \log \frac{1 - \xi_{13}v}{1 + \xi_{13}v} + 2a^2 \frac{\xi_{23}v \xi'_{31}v}{(\xi_{31}v)^2 - 1},$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\rho} \frac{dU}{dv} = & -2(a^2 - 1)(e_1 - e_2) \frac{\xi_{01}v \xi_{31}v}{(\xi_{21}v)^2 - 1} + 2a^2(e_1 - e_3) \frac{\xi_{23}v \xi_{01}v \xi_{21}v}{(\xi_{31}v)^2 - 1} \\ & - a^2(e_2 - e_3) \xi_{03}v \xi_{13}v \log \frac{\xi_{31}v - 1}{\xi_{31}v + 1}. \end{aligned}$$

Mais on démontre facilement les formules

$$\frac{\xi_{01}v \xi_{31}v}{(\xi_{21}v)^2 - 1} = \frac{\xi_{30}v}{e_1 - e_2} = \frac{\xi_{30}v}{a^2 - 1}$$

et

$$\frac{\xi_{23}v \xi_{01}v \xi_{21}v}{(\xi_{31}v)^2 - 1} = \frac{\xi_{23}v \xi_{20}v}{e_1 - e_3} = \frac{\xi_{23}v \xi_{20}v}{a^2},$$

et l'on en conclut pour $\frac{\pi}{\rho} \frac{dU}{dv}$ une expression que j'écrirai sous la forme suivante, en mettant partout $\xi_{03}v \xi_{13}v$ en facteur,

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\rho} \frac{dU}{dv} = \xi_{03}v \xi_{13}v \left[-a^2 \log \frac{\xi_{31}v - 1}{\xi_{31}v + 1} - 2(e_1 - e_2) \frac{(\xi_{30}v)^2 \xi_{31}v}{\xi_{31}v + 1} \right. \\ \left. + 2(e_1 - e_3) (\xi_{20}v)^2 \xi_{31}v \right]. \end{aligned}$$

Or

$$(e_1 - e_3) (\xi_{20}v)^2 - (e_1 - e_2) (\xi_{30}v)^2 = (e_2 - e_3) (pv - e_1) = (e_2 - e_3) (\xi_{10}v)^2,$$

d'où finalement

$$\frac{\pi}{\rho} \frac{dU}{dv} = \xi_{03}v \xi_{13}v \left[-a^2 \log \frac{\xi_{31}v - 1}{\xi_{31}v + 1} + 2(e_2 - e_3) \xi_{30}v \xi_{10}v \right].$$

Le signe de cette dérivée est donc, dans l'intervalle, celui de la fonction

$$\mathfrak{R}(v) = -a^2 \log \frac{\xi_{31}v - 1}{\xi_{31}v + 1} + 2(e_2 - e_3) \xi_{30}v \xi_{10}v.$$

Cette fonction $\mathfrak{R}(v)$ est visiblement nulle pour $v = \omega_1$, et elle a

elle-même pour dérivée

$$\frac{d\Re}{dv} = - \frac{2a^2 \xi'_{31} v}{(\xi_{31} v)^2 - 1} + 2(e_2 - e_3) (\xi_{30} v \xi'_{10} v + \xi_{10} v \xi'_{30} v),$$

ce que, en retenant la formule

$$e_1 - e_3 = a^2,$$

on met, après quelques transformations, sous la forme

$$\frac{d\Re}{dv} = - 2 \xi_{20} v [a^2 + (\xi_{10} v)^2 + (\xi_{30} v)^2].$$

Cette quantité étant constamment négative dans l'intervalle 0, ω_1 , $\Re$ décroît jusqu'à zéro et reste donc positive, ainsi que $\frac{dU}{dv}$; donc U croît jusqu'à la valeur zéro, et *il est toujours négatif*. La vitesse est donc toujours inférieure à 1 le long de la paroi ϖ_1 , et, de plus, elle va en croissant (de zéro à un), quand on se déplace sur cette ligne du point O au point P'_1 .

3° *Forme de la ligne de glissement λ'_1 .* — Voyons maintenant la forme de la ligne de glissement λ'_1 . L'angle de la tangente à cette ligne, avec l'axe Ox , est fourni par la partie réelle de T pour $u = \omega_1 - h$ ($0 < \frac{h}{i} < \frac{\omega_3}{i}$). D'après les calculs antérieurs [formules (18) et (29)], cet angle est donc égal à

$$(38) \quad V(h) = \frac{\rho}{\pi} \left[-i(a^2 - 1) \log \frac{1 + \sqrt{e_2 - e_3} \xi_{03} h}{1 - \sqrt{e_2 - e_3} \xi_{03} h} + a^2 \sqrt{e_1 - e_2} \xi_{01} h \log \frac{\sqrt{e_1 - e_2} \xi_{31} h - i}{\sqrt{e_1 - e_2} \xi_{31} h + i} \right].$$

Pour $h = 0$, $V(h)$ est nul, et il suffirait d'être assuré que V va constamment en croissant avec $\frac{h}{i}$, pour être assuré que la solution est valable. Or on a

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\rho} \frac{dV}{dh} = & - \frac{2i(a^2 - 1) \sqrt{e_2 - e_3} \xi'_{03} h}{1 - (e_2 - e_3) (\xi_{03} h)^2} + \frac{2ia^2(e_1 - e_2) \xi_{01} h \xi'_{31} h}{(e_1 - e_2) (\xi_{31} h)^2 + 1} \\ & + a^2 \sqrt{e_1 - e_2} \xi'_{01} h \log \frac{\sqrt{e_1 - e_2} \xi_{31} h - i}{\sqrt{e_1 - e_2} \xi_{31} h + i}, \end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire, après diverses transformations dont je ne

reproduis pas le détail,

$$\frac{\pi}{\rho} \frac{dV}{dh} = 2ia^2 \sqrt{e_1 - e_2} \xi_{21} h \xi_{31} h \left[\frac{1}{2i} \log \frac{\sqrt{e_1 - e_2} \xi_{31} h - i}{\sqrt{e_1 - e_2} \xi_{31} h + i} + \frac{\sqrt{e_1 - e_2}}{e_1 - e_3} \xi_{12} h \xi_{32} h \right].$$

On sait que $\xi_{21} h$ et $\xi_{31} h$ sont réels et positifs pour

$$0 < \frac{h}{i} < \frac{\omega_3}{i}$$

(Cf. TANNERY et MOLK, t. II, p. 176). Donc $\frac{1}{i} \frac{dV}{dh}$ a le signe de la quantité

$$Q = \frac{1}{2i} \log \frac{\sqrt{e_1 - e_2} \xi_{31} - i}{\sqrt{e_1 - e_2} \xi_{31} + i} + \frac{\sqrt{e_1 - e_2}}{e_1 - e_3} \xi_{12} h \xi_{32} h.$$

Ce signe est loin d'être évident. Si l'on se reporte à la figure 8, on voit que la fonction $Q(h)$ est égale à $\frac{1}{2i} \left(-2i \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{\pi}{2}$, pour $h = \omega_3$; et pour $h = 0$, à

$$\frac{1}{2i} \left(-2i \arctan \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_2}} \right) + \frac{\sqrt{e_1 - e_2}}{e_1 - e_3} = \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a^2} - \arctan \frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

C'est, comme on le verra plus loin, le signe de cette dernière quantité qui est important. Je dis qu'elle est négative; en effet, posons

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}} = \tan \delta$$

et, par suite,

$$a^2 = \frac{1}{\sin^2 \delta},$$

alors il vient

$$\frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a^2} - \arctan \frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}} = \frac{1}{2} (\sin 2\delta - 2\delta),$$

et, sous cette forme, on voit bien que cette quantité est négative.

Ceci posé, si l'on calcule la dérivée $\frac{dQ}{dh}$, on peut parvenir à la mettre sous la forme suivante

$$\frac{dQ}{dh} = \frac{\sqrt{e_1 - e_2}}{e_1 - e_3} \xi_{02} h [e_1 - e_3 + (e_2 - e_3) (\xi_{12} h)^2 + (e_2 - e_1) (\xi_{32} h)^2],$$

ou encore

$$\frac{dQ}{dh} = 2 \sqrt{e_1 - e_2} \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} \xi_{02} h (\xi_{12} h)^2 = 2i \sqrt{e_1 - e_2} \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} (\xi_{12} h)^2 \frac{\xi_{02} h}{i}.$$

Comme $(\xi_{12} h)^2$ est positif, ainsi que $\frac{\xi_{02} h}{i}$ dans l'intervalle considéré (TANNERY et MOLK, t. II, p. 176), on en conclut

$$\frac{dQ}{i dh} > 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{dQ}{d\left(\frac{h}{i}\right)} < 0,$$

Q va donc en décroissant quand $\frac{h}{i}$ croît de 0 à $\frac{\omega_3}{i}$, et, par suite, il reste constamment négatif, puisque son maximum, calculé il y a un instant, est négatif. $\frac{dV}{i dh}$ est donc aussi négatif, $\frac{dV}{d\left(\frac{h}{i}\right)}$ est positif,

et V va en croissant, ce que nous voulions prouver.

La solution est donc valable et correspond bien à la forme de proue qu'on voulait obtenir.

Les résultats numériques seraient maintenant intéressants, relatifs à ces mêmes exemples. Je compte pouvoir indiquer quelques-uns de ces résultats dans une prochaine publication.

Pour terminer le présent Mémoire, j'indiquerai une méthode fort simple propre à déterminer le mouvement d'un liquide dans un canal de forme quelconque, mais symétrique par rapport à un axe, et renfermant un obstacle également symétrique par rapport au même axe. Cette méthode reposant sur des principes connus ⁽¹⁾, je ne crois pas devoir insister sur le détail des calculs.

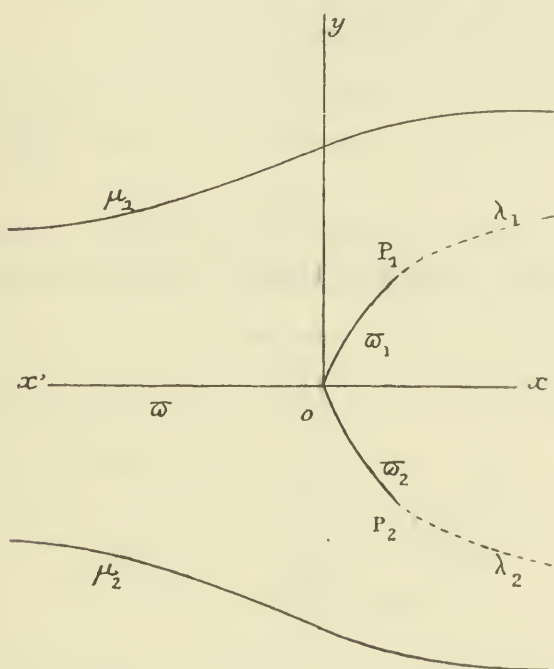
Soit donc un canal indéfini, symétrique par rapport à un axe Ox, renfermant un obstacle également symétrique P₁OP₂. La direction asymptotique du canal en amont sera supposée horizontale (parallèle à Ox). Quant à la direction asymptotique en aval, pour la frontière supérieure, par exemple, elle pourra être supposée inclinée

⁽¹⁾ Cf. T. LEVI-CIVITA, *Scie e Leggi di resistenza* (Circolo mat. di Palermo, 1907).

d'un angle α arbitraire sur Ox : dans les calculs qui vont suivre, il n'y a pas lieu de la préciser immédiatement ; mais il est clair que le cas, où elle est également horizontale, est de beaucoup celui qui présente le plus réel intérêt.

Cela étant, nous allons prendre en considération *seulement la moitié supérieure du plan xOy* , occupée par le liquide en mouvement de Helmholtz ; en observant que la vitesse du liquide est horizontale tout le long de la portion utile de l'axe des x (voir la figure 9), il est permis de supprimer la portion inférieure du

Fig. 9.



liquide, en établissant le long de Ox' une paroi solide fictive ϖ . [C'est en somme exactement la contre-partie du procédé qu'on suit dans la méthode des images, usitée dans de nombreuses questions d'Hydrodynamique ⁽¹⁾.]

La portion du liquide que nous considérons est donc limitée par les parois solides ϖ , ϖ_1 et μ_1 et par la ligne de glissement λ_1 qui sépare le liquide en mouvement du liquide au repos derrière l'obstacle. Nous supposons la vitesse égale à 1 à l'infini en aval ;

(¹) Voir, par exemple, P. APPELL, *Mécanique rationnelle*, t. III, p. 379 et 491.

et, par suite, l'équation des pressions

$$p = p_0 + \frac{1}{2}(1 - V^2)$$

indique que la vitesse sera égale à 1 tout le long de λ_1 .

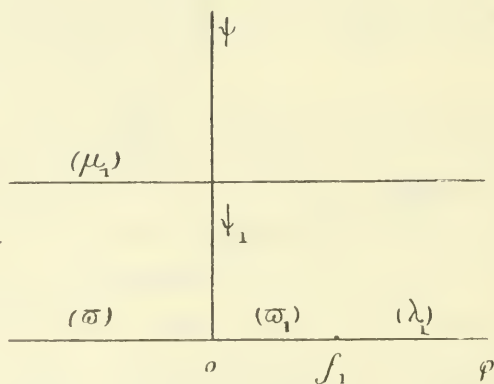
Cela étant, le mouvement étant supposé permanent irrotationnel, nous prendrons le potentiel φ et la fonction de courant ψ , nuls au point O, et ψ sera constant, égal à ψ_1 , sur λ_1 . [ψ_1 représentera d'ailleurs la distance asymptotique entre la paroi μ_1 et la ligne de glissement λ_1 (¹).]

Dans ces conditions, nous poserons, u et v désignant les projections de la vitesse d'une molécule liquide,

$$(39) \quad \begin{aligned} z &= x + iy, \\ f &= \varphi + i\psi, \quad w = u - iv = e^{-i\Omega} = \frac{df}{dz}, \end{aligned}$$

et au domaine du plan z , considéré ci-dessus, correspondra dans le plan f la bande représentée figure 10. Je laisse au lecteur le soin

Fig. 10.



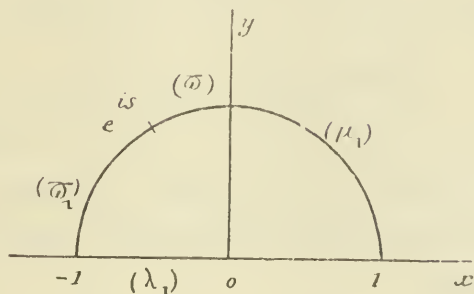
de vérifier que cette bande peut être représentée d'une façon conforme sur le demi-cercle de la figure 11 dans le plan $Z = X + iY$, au moyen de la relation

$$(40) \quad f = A - \frac{\psi_1}{\pi} \log \frac{(1 - Z)^2}{1 + Z^2},$$

(¹) Cf., par exemple, mon Mémoire *Sur le mouvement discontinu d'un fluide dans un canal renfermant un obstacle* (Annales de l'École Normale supérieure, 1912, p. 163).

où A est une constante réelle, et où le logarithme est celui dont la détermination est réelle pour Z réel. Les frontières devant se cor-

Fig. 11.



respondre comme l'indiquent les figures, les points $f = f_1$, $f = 0$ doivent avoir pour homologues les points $Z = -1$ et $Z = e^{is_0}$, d'où les relations

$$f_1 = A - \frac{\psi_1}{\pi} \log 2,$$

$$0 = A - \frac{\psi_1}{\pi} \log \frac{1 - \cos s_0}{-\cos s_0},$$

desquelles on peut tirer A et ψ_1 en fonction de s_0 et de f_1 , qu'on gardera comme paramètres. (Il en fallait bien exactement deux pour caractériser la figure 10.)

Un calcul élémentaire donne en fonction de Z

$$(41) \quad df = \frac{2\psi_1}{\pi} \frac{1+Z}{(1-Z)(1+Z^2)} dZ.$$

Cela étant, la fonction Ω , définie par (39), peut maintenant être considérée comme une fonction de Z , régulière dans le demi-cercle. En posant $\Omega = \mathfrak{S} + i\tau$, il vient de suite

$$u + iv = e^\tau e^{i\mathfrak{S}},$$

donc e^τ est la vitesse, en grandeur, d'une molécule liquide, et $\mathfrak{S}$ est l'angle de cette vitesse avec OX . Par suite, $\Omega(Z)$ satisfait dans le demi-cercle aux propriétés suivantes :

Elle est régulière dans ce domaine ;

Sa partie imaginaire est nulle sur le diamètre $-1, +1$;

Sa partie réelle est nulle pour $Z = e^{is}$, si $\frac{\pi}{2} < s < s_0$;

Sa partie réelle, pour $Z = e^{is}$, avec $0 < s < \frac{\pi}{2}$ ou pour $s_0 < s < \pi$, représente l'angle, avec OX, de la tangente aux parois fixes μ_1 et ϖ_1 .

Désignons alors par $g(s)$ et $h(s)$ les fonctions de s qui représentent ces angles, fonctions dont la variation est donnée par l'allure des courbes μ_1 et ϖ_1 . Il résulte alors immédiatement, des conclusions que j'ai démontrées dans un travail antérieur ⁽¹⁾, que la fonction $\Omega(Z)$ (d'ailleurs prolongeable analytiquement dans le demi-cercle symétrique de celui de la figure par rapport à OX) est fournie par la formule

$$(42) \quad \Omega(Z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(s) \frac{1 - Z^2}{1 - 2Z \cos s + Z^2} ds + \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\pi} h(s) \frac{1 - Z^2}{1 - 2Z \cos s + Z^2} ds.$$

On prendra $g(0) = 0$, la direction asymptotique du canal en amont devant être horizontale; et si l'on veut qu'il en soit de même de la direction asymptotique en aval, il suffira que $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

La formule

$$dz = e^{i\Omega} df = \frac{2\psi_1}{\pi} e^{i\Omega} \frac{1 + Z}{(1 - Z)(1 + Z^2)} dZ,$$

déduite de (39) et (41), permet alors de construire tous les éléments du mouvement, pour une forme de canal et une forme d'obstacle, connus d'avance. Pour le détail, je renvoie aux calculs, tout à fait semblables, exposés dans le Mémoire cité plus haut.

⁽¹⁾ *Sur la résistance des fluides* (Annales de l'École normale supérieure, 1911, 2^e Partie). Voir aussi une Note de l'auteur *Sur le problème de Dirichlet relatif au cercle* (Bulletin de la Société mathématique, 1911). Voir aussi T. BOGGIO, *Sulle funzioni di variabile complessa in un'arca circolare* (Atti della Accademia delle Scienze di Torino, 1911).

QUELQUES THÉORÈMES
SUR LE MOUVEMENT DES SYSTÈMES DYNAMIQUES,

PAR M.-G. D. BIRKHOFF.

Parmi les mouvements d'un système dynamique, il peut en exister certains ayant la propriété remarquable de représenter le mouvement tout entier avec tel degré d'approximation qu'on désire, pendant *tout* intervalle de temps égal à T , où T varie seulement avec le degré de l'approximation. Dans le présent Mémoire, ces mouvements sont appelés mouvements *récurrents*; ils forment une extension naturelle des mouvements périodiques.

Du point de vue que j'adopte, un mouvement *stable* est un mouvement qui, à partir d'un certain moment et ultérieurement, n'approche jamais indéfiniment près de certaines positions singulières; je démontre qu'il existe nécessairement un ou plusieurs mouvements récurrents dans le voisinage infinitésimal d'un mouvement stable.

Les mouvements récurrents se rangent en deux types, l'un d'eux étant représentable explicitement au moyen de fonctions continues et périodiques des variables qu'elles contiennent. Ce premier type est appelé type *continu* et semble comprendre tous les mouvements récurrents dont l'existence a été établie. Je montre, par la construction d'un exemple, que, au moins lorsqu'on n'assujettit pas les équations différentielles définissant le mouvement à être analytiques, il existe des mouvements récurrents qui ne sont ni périodiques, ni dans le voisinage infinitésimal d'aucun mouvement périodique, et qui sont d'une nature particulière telle que la désignation de mouvements récurrents *discontinus* leur semble appropriée.

Des recherches incomplètes me conduisent à croire que, dans le cas de $n = 3$, il existe aussi nécessairement des mouvements récurrents discontinus dans les cas analytiques, et que la structure de ces mouvements est essentiellement semblable à celle du mouvement présenté dans l'exemple.

Ce Mémoire a été lu pour la première fois à la réunion d'été de l'American Mathematical Society en 1909.

I. — REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE.

Un système dynamique, dans une très large acception, peut être considéré comme défini par un système quelconque d'équations différentielles ordinaires du premier ordre :

$$(1) \quad \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n} = dt,$$

où $X_1, \dots, X_n$ sont des fonctions données, réelles et uniformes de $x_1, \dots, x_n$, analytiques par rapport à ces variables, et où t est la variable indépendante. Les variables $x_1, \dots, x_n$ sont les *coordonnées* du mouvement, et t indique le *temps*.

Nous convenons de représenter les coordonnées du mouvement comme les coordonnées rectangulaires d'un point de l'espace à n dimensions. Tout mouvement possible est défini par n équations

$$(2) \quad x_1 = \xi_1(t), \quad \dots, \quad x_n = \xi_n(t),$$

où les fonctions analytiques $\xi_1, \dots, \xi_n$ constituent une solution de (1). Les équations (2) sont aussi représentées par une courbe de l'espace à n dimensions, à moins que $\xi_1, \dots, \xi_n$ ne soient toutes constantes; alors (2) sont représentées par un seul point.

Il faut maintenant rappeler quelques-uns des résultats fondamentaux et bien connus, relatifs à un système différentiel du type (1).

Soit S l'ensemble des points pour lesquels au moins une des fonctions $X_1, \dots, X_n$ cesse d'être analytique, et soit E l'ensemble des points, ne faisant pas partie de S , pour lesquels les équations

$$(3) \quad X_1 = 0, \quad \dots, \quad X_n = 0$$

sont satisfaites simultanément.

Par tout point P , extérieur à S et E , il passe une *courbe* (P) et une seule, donnée par une infinité simple de mouvements (2), savoir par ceux qu'on obtient en remplaçant t par $t + c$, c étant une constante. A deux points quelconques A et B sur une seule et même courbe, correspond un intervalle de temps, qui est le temps

nécessaire aux coordonnées du mouvement pour passer de celles de A à celles de B.

Les points E représentent les mouvements à coordonnées constantes satisfaisant à (2). Lorsque t croît ou décroît, le point mobile sur une courbe (P) ne peut tendre vers un point-limite E dans un temps fini, car cela contredirait le théorème fondamental d'existence pour un système tel que (1).

Le point mobile sur une courbe (P) peut cependant tendre vers un point-limite S dans un temps fini. Mais on fera la convention que la courbe ne s'étend pas jusqu'à ce point.

Nous entendrons par le voisinage (ε) de S les points qui sont, soit à une distance inférieure à ε d'un point de S, soit à une distance supérieure à $\frac{1}{\varepsilon}$ de l'origine des coordonnées.

La courbe passant en un point P, extérieur à S ou E, est susceptible d'extension pour $\lim t = +\infty$ ou $\lim t = -\infty$, à moins que lorsque t croît ou décroît, respectivement, depuis la valeur initiale t_0 , vers une limite finie τ , le point mobile sur la courbe (P) ne tende à venir et à rester dans tout voisinage (ε) de S, si petit que soit ε . Ce fait est évident, puisqu'en dehors d'un voisinage (ε) donné de S, l'extension est possible d'une manière uniforme pour un seul et même intervalle de temps.

Enfin, si t est pris comme paramètre de la courbe, on peut dire que la variation continue d'un point P (extérieur à S) produit une variation continue de la courbe (P). Avec plus de précision, nous avons l'énoncé suivant :

THÉORÈME AUXILIAIRE. — Si P n'est pas un point de S, et si le mouvement, qui pour $t = t_0$ est représenté par P, est susceptible d'extension pour $\tau \leq t \leq \sigma$, il est possible de choisir une quantité δ positive assez petite, pour que tout mouvement qui, pour $t = t_0$, est représenté par un point P' de distance à P inférieure à δ , soit aussi susceptible d'extension pour $\tau \leq t \leq \sigma$, et soit en outre tel que, durant cet intervalle, la distance entre les points correspondants de la courbe (P) et de la courbe (P') n'excède pas une quantité positive arbitraire ε .

Ceci est l'application aux équations (1) d'un théorème bien connu concernant la variation d'une solution d'équations différentielles ordinaires, lorsqu'on fait varier les conditions initiales.

II. — STABILITÉ ET INSTABILITÉ.

Nous pouvons maintenant déduire certains théorèmes généraux simples, concernant le mouvement d'un système dynamique tel que (1).

A cette fin, nous classerons les mouvements possibles d'après la définition suivante : un mouvement est dit *positivement* (ou *négativement*) *stable*, s'il existe un nombre ε tel que pour $t > t_0$ (ou $t < t_0$), les points représentatifs du mouvement restent extérieurs à quelque voisinage (ε) de S. Sinon, le mouvement est appelé *positivement* (ou *négativement*) *instable*. Cette définition impose au mouvement le minimum de restrictions nécessaires à assurer la stabilité, dans son sens mathématique strict.

L'extension d'un mouvement stable est possible pour toute valeur de $t > t_0$ (ou $t < t_0$), puisque l'extension d'un mouvement cesse seulement d'être possible lorsque, t approchant d'une certaine valeur finie τ , le point représentatif vient et reste à l'intérieur de tout voisinage (ε) assigné de S.

Les types les plus simples de mouvement stable sont fournis par le cas du repos, représenté par un seul point E, et par celui du mouvement périodique, représenté par une courbe fermée.

Tous les points desquels les points de la courbe représentative d'un mouvement s'approchent indéfiniment pour $\lim t = +\infty$ (ou $\lim t = -\infty$), seront appelés les *points-limites oméga* (ou *alpha*) du mouvement; ils forment, bien entendu, un ensemble fermé. Les points de la courbe elle-même ne sont pas nécessairement dans l'une ou l'autre des classes de points-limites.

Dans un Mémoire important, M. Hadamard (1) a appelé l'ensemble des points-limites, le *domaine* du mouvement. En particulier, il a prouvé que l'ensemble des points-limites d'un mouvement stable représente un ensemble de mouvements stables, contenant au moins un mouvement (2).

(1) *Sur les trajectoires en Dynamique* (*Journal de Mathématiques*, 3^e série, t. III, 1897, p. 331-387).

(2) *Loc. cit.*, p. 382.

Ce fait constitue la majeure partie du théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Les points-limites oméga d'un mouvement positivement stable représentent un ensemble de mouvements, positivement et négativement stables, desquels le mouvement donné s'approche uniformément quand le temps croît, c'est-à-dire que la distance entre le point représentant le mouvement et l'ensemble des points-limites tend vers 0 pour $\lim t = +\infty$.*

Démonstration. — Soit L un point-limite oméga d'un mouvement positivement stable donné. Alors, puisque le mouvement donné est stable, L est extérieur à un certain voisinage fixe de S , et la courbe (L) peut être étendue dans les deux sens à partir de L , pour un intervalle de temps uniformément grand pour tous les points L . Mais, en vertu du théorème auxiliaire, toute courbe qui passe en des points Q suffisamment voisins de L , reste à une distance inférieure à ε de la courbe (L) pendant le même temps. Puisque la courbe donnée représentative du mouvement passe en de tels points Q après tout instant fixé il est clair que l'arc de la courbe (L) , correspondant à cet intervalle de temps uniforme, se compose de points-limites oméga.

En répétant ce raisonnement, on voit que tous les points de la courbe (L) sont des points-limites oméga.

De plus, puisqu'aucun des points-limites ne peut être à l'intérieur du voisinage fixe de S , cette courbe (L) peut être étendue pour toute valeur du temps, et est positivement et négativement stable.

Pour compléter la démonstration du théorème I, il n'y a plus qu'à montrer que, lorsque t croît, le point mobile sur la courbe représentant le mouvement donné, tend uniformément vers les points-limites (L) . Supposons qu'il n'en soit pas ainsi; alors il existe une quantité positive d et une suite d'instants $t_1, t_2, \dots$, ($\lim t_n = +\infty$), pour lesquels la distance entre le point représentatif du mouvement donné et tout point-limite oméga est au moins égale à d . La suite correspondante de points aura au moins un point limite L' , qui sera distant d'au moins d de tout point L . Malgré cela, L' doit être lui-même un point L , puisqu'il possède

la propriété fondamentale de ces points. Ceci est impossible, par conséquent, le théorème est nécessairement vrai.

A cause de la symétrie impliquée, nous ne considérons pas, dans le théorème qui vient d'être démontré, les mouvements négativement stables, pas plus que nous ne le ferons dans les théorèmes suivants.

Il sera commode d'appeler les mouvements représentés par une courbe composée de points-limites oméga (ou alpha), *mouvements limites oméga* (ou alpha).

THÉORÈME II. — *Étant donné un mouvement positivement instable :*

1° *Ou bien, il est seulement susceptible d'extension pour $t < \tau$, ses points représentatifs tendant à venir et rester dans tout voisinage (ε) de S, pour $\lim t = \tau$;*

2° *Ou bien, il est susceptible d'une extension indéfinie quand t croît, et il est tel que, pour tout nombre positif ε , on peut trouver un intervalle de temps T, assez grand pour que, au moins une fois dans tout intervalle T pour $t \geq t_0$, le mouvement soit représenté par un point intérieur au voisinage (ε) de S;*

3° *Ou bien, il est susceptible d'une extension indéfinie quand t croît, et possède au moins un mouvement limite oméga, positivement et négativement stable.*

Démonstration. — La démonstration se fait aisément.

En premier lieu, si l'extension n'est possible que pour $t < \tau$, nous avons évidemment le cas (1°). S'il n'en est pas ainsi, supposons que la condition du cas (2°) ne soit pas satisfaite, et cherchons à démontrer que nous avons alors le cas (3°).

Dans ces conditions, il existera une quantité positive ε et une suite d'intervalles de temps indéfiniment croissants (t_1, t'_1) , (t_2, t'_2) , . . . , durant lesquels tous les points représentant le mouvement instable donné sont en dehors du voisinage (ε) de S.

Soient alors $P_1, P_2, \dots$, les points correspondant aux milieux des intervalles de temps de la suite. Cette suite de points a au moins un point-limite P, qui est au moins à la distance ε de tout point de S. Par un raisonnement semblable à celui qui a été fait

dans la démonstration de la première partie du théorème I, on voit que la courbe (P) peut être étendue pour toute valeur de t , et reste en dehors du voisinage (ε) de S. Brièvement indiquée, la raison en est que les courbes (P_k) ($k = 1, 2, \dots$) sont situées en dehors du voisinage (ε) de S pour des intervalles de temps positifs et négatifs indéfiniment croissants avec k , tandis que certains des points P_k tendent vers P. Par suite, en vertu du théorème auxiliaire, la courbe (P) a les propriétés indiquées. Ainsi le mouvement M satisfait à la condition (3°), puisque le mouvement (P) est un mouvement limite de M, positivement et négativement stable.

III. — MOUVEMENT RÉCURRENT.

On vient de voir que tout mouvement M, positivement ou négativement stable, possède un ensemble *fermé* de mouvements limites M', positivement et négativement stables. Il s'ensuit immédiatement que l'ensemble des mouvements limites alpha et oméga de tout mouvement de M', ou bien coïncide avec M', ou bien est un sous-ensemble de M' ⁽¹⁾.

Définition. — Tout ensemble fermé M' de mouvements positivement et négativement stables, tel que tout mouvement de M' admet M' pour son ensemble de mouvements limites alpha, ainsi que pour son ensemble de mouvements limites oméga, sera appelé un ensemble *minimal*; et tout mouvement de M' sera appelé un mouvement *récurrent*.

Par définition, un mouvement récurrent M est stable. De plus, tout point de la courbe représentative est à la fois un point-limite alpha et un point-limite oméga, car autrement l'ensemble des mouvements limites de M ne contiendrait pas M, contrairement à la définition. Ce fait signifie que le mouvement approche arbitrairement près d'une quelconque de ses positions infiniment souvent pour $\lim t = -\infty$ et $\lim t = +\infty$; c'est-à-dire que le mouvement est stable *au sens de Poisson*.

Toutefois, cette propriété ne caractérise pas seulement les mou-

(¹) Cf. HADAMARD, *loc. cit.*, p. 383.

vements récurrents. Par exemple, on peut construire, pour $n = 3$, un système dynamique tel qu'il existe un mouvement positivement et négativement stable M , dont les points-limites alpha et oméga constituent tout l'intérieur et la surface d'un tore. Un tel mouvement est stable au sens de Poisson, mais il ne peut être récurrent au sens défini ci-dessus; en effet, tout mouvement dont la courbe est située sur la surface du tore appartient à M' , mais ses mouvements limites forment seulement une partie de M' .

Les exemples les plus simples de mouvement récurrent sont les cas du repos et du mouvement périodique; dans ces deux cas, M' coïncide avec M et se compose d'un seul mouvement.

Dans tous les autres cas, M' contient une infinité de mouvements dont le nombre cardinal est celui du continu. En effet, en un point P de la courbe représentative d'un mouvement récurrent qui n'est pas de ces types simples, construisons un petit élément plan normal à la direction de la tangente en ce point, et considérons l'ensemble fermé de points formé par l'infinité des intersections de toutes les courbes de M' avec cet élément. Tout point de cet ensemble, comme par exemple P , est un point-limite des points de l'ensemble, puisque c'est un point-limite alpha et oméga de l'ensemble infini correspondant au mouvement (P) . Par suite, l'ensemble de points est *parfait* et a la puissance du continu. Mais chaque mouvement (P) correspond seulement à un ensemble dénombrable de tels points. Puisque le nombre cardinal des mouvements de M' ne peut excéder celui du continu, il lui est nécessairement égal.

La propriété caractéristique des mouvements récurrents est donnée par le théorème suivant :

THÉORÈME III. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un mouvement positivement et négativement stable M soit un mouvement récurrent est que pour tout nombre positif ε , si petit qu'il soit, il existe un intervalle de temps T , assez grand pour que l'arc de la courbe représentative correspondant à tout intervalle égal à T ait des points distants de moins de ε de n'importe quel point de la courbe tout entière.*

Démonstration. — La condition est nécessaire. En effet, si

elle n'est pas satisfaite par quelque mouvement récurrent M , il sera possible de choisir une succession de points $P_1, P_2, \dots$, sur la courbe représentant le mouvement, et une succession d'intervalles $(t_1, t'_1), (t_2, t'_2), \dots$, correspondant à des périodes de temps indéfiniment croissantes telles que, durant l'intervalle (t_k, t'_k) , les points de la courbe ne viennent pas à une distance moindre que ε (ε étant une quantité positive) du point P_k de la courbe.

Soit Q_k le point de l'arc correspondant au milieu de l'intervalle (t_k, t'_k) . L'ensemble Q_k a un point-limite Q , obtenu en prenant la limite d'un ensemble partiel $Q_{k_1}, Q_{k_2}, \dots$, convenablement choisi dans l'ensemble donné, et l'ensemble partiel $P_{k_1}, P_{k_2}, \dots$ a au moins un point-limite P . Par suite, en fixant seulement notre attention sur une suite de la série $k_1, k_2, \dots$, pour laquelle P_k tend vers P , nous pouvons écrire simultanément : $\lim Q_k = Q$ et $\lim P_k = P$. Les points Q et P seront naturellement des points-limites L de M , et tout point de la courbe (Q) ne sera pas distant du point P de moins de ε . Ceci résulte du fait que la courbe (Q_k) ne vient pas à une distance de P_k inférieure à ε pendant des intervalles de temps positifs et négatifs indéfiniment croissants avec k , et que, par conséquent, la courbe limite complète (Q) ne vient jamais à une distance de P inférieure à ε , en vertu du théorème auxiliaire.

L'ensemble des mouvements limites du mouvement (Q) de M' est donc seulement un sous-ensemble de M' , puisqu'il ne peut contenir le mouvement (P). Mais ceci contredit le fait que M est un mouvement récurrent. Par suite, la condition est nécessaire.

On voit aussi aisément que la condition imposée à M est suffisante.

Car supposons cette condition remplie. D'abord, il est clair que l'ensemble des mouvements limites alpha, ou celui des mouvements limites oméga, consistera, d'après le théorème I, en un ensemble fermé de mouvements positivement et négativement stables M' ; de plus, en vertu de la condition qui est supposée satisfaite, chacun de ces deux ensembles doit contenir M , et, par conséquent, les deux ensembles coïncident.

Si M n'est pas un mouvement récurrent, il existera dans l'ensemble des mouvements limites M' , un mouvement M_1 , avec un ensemble de mouvements limites oméga (ou alpha), qui est un sous-ensemble de M' . Soit P un point-limite oméga de M et non de M_1 ,

de telle façon que P se trouve à une distance excédant quelque constante positive q , de tout point de M_1 . A certains instants, $t_1, t_2, \dots$, tels que $\lim t_n = +\infty$, les points correspondants du mouvement M viendront à une distance inférieure à une quantité petite quelconque δ d'un point Q de M_1 , et, par suite, continueront à être à une distance inférieure à tout nombre ε des points de M_1 , durant tout intervalle de temps donné, si grand qu'il soit, en vertu du théorème auxiliaire.

En choisissant $\varepsilon < \frac{q}{2}$, nous voyons, par conséquent, qu'on peut trouver des intervalles de temps indéfiniment croissants, durant lesquels les points de la courbe (M) ne viennent pas à une distance inférieure à $\frac{q}{2}$ de l'un de ses points-limites oméga, savoir de P . Par conséquent, la condition n'est pas satisfaite, à moins que le mouvement ne soit récurrent. C'est-à-dire que la condition est *suffisante*.

IV. — MOUVEMENTS STABLES ET MOUVEMENTS RÉCURRENTS.

Il y a une relation étroite entre les mouvements stables et les mouvements récurrents d'un système dynamique.

THÉORÈME IV. — *L'ensemble des mouvements limites oméga M' , de tout mouvement positivement stable M , contient au moins un mouvement récurrent.*

Démonstration. — Désignons par S_d les régions fermées en lesquelles l'espace à n dimensions est divisé par des systèmes de plans équidistants, parallèles aux plans de coordonnées, comprenant ces plans, et situés à la distance d les uns des autres. Considérons les régions S_1 ayant chacune pour volume l'unité. La courbe représentant le mouvement M a des points dans un nombre fini de ces régions, puisque M reste dans une portion finie de l'espace.

Soit M_1 un mouvement de M' dont la courbe correspondante entre dans le moindre nombre possible des régions S_1 . Considérons à part ces régions S_1 , et divisons chacune d'elles en 2^n régions $S_{\frac{1}{2}}$, de volume $\frac{1}{2^n}$. Tous les mouvements limites oméga de M_1

ont leurs courbes qui restent entièrement dans ces régions partielles; parmi ces mouvements, il en existe un, M_2 , dans M'_1 (et, par suite, dans M'), dont la courbe entre dans le moindre nombre possible des régions S_1 . En continuant de cette façon, nous pouvons choisir des mouvements $M_1, M_2, M_3, \dots$, dans M' , en considérant les régions successives $S_1, S_2, S_3, \dots$.

Soit $P_1, P_2, \dots$ n'importe quel système de points situés respectivement sur les courbes représentant $M_1, M_2, \dots$ et soit P un point-limite de cette suite de points. Alors P est naturellement un point-limite de M , puisque l'ensemble de ces points-limites est fermé; et la courbe passant en P a la propriété d'être située dans chacun des systèmes de moindre nombre de régions $S_1, S_2, \dots$, puisque tous les points de la courbe (P_k) sont dans les systèmes de moindre nombre de régions $S_1, S_2, \dots, S_{\frac{1}{2^k}}$.

Réciproquement, il est clair qu'un point quelconque appartenant à tous les systèmes de régions choisies est un point-limite du mouvement (P). Autrement, la courbe (P) reste entièrement dans chaque système de régions $S_1, S_2, \dots$, mais ne vient pas arbitrairement près de quelque point Q contenu à la fois dans toutes. Par suite, on voit que, si k est pris suffisamment grand, la courbe (P) n'entrera pas dans la région particulière $S_{\frac{1}{2^k}}$ qui contient Q , mais, d'après la définition des régions choisies $S_{\frac{1}{2^k}}$, la courbe représentant le mouvement (P) doit entrer dans chaque région $S_{\frac{1}{2^k}}$, puisque la courbe reste entièrement dans ces régions et que le mouvement fait partie de M' . Ainsi, il se produirait une contradiction, si la propriété réciproque n'était pas vraie.

Nous pouvons maintenant démontrer immédiatement que le mouvement (P) est récurrent.

En premier lieu, les ensembles de mouvements limites alpha et oméga du mouvement (P) doivent coïncider. Car, autrement, il existe un mouvement limite alpha ou oméga, dont les points-limites sont un sous-ensemble des points-limites du mouvement (P). Par conséquent, la courbe correspondante reste entièrement dans les régions choisies $S_{\frac{1}{2^k}}$, mais n'entre pas dans toutes ces régions, bien

que le mouvement appartienne à M' ; ceci est impossible. Secondement, par un raisonnement analogue, nous concluons immédiatement que les mouvements limites du mouvement (P) forment un ensemble minimal. Par suite, le mouvement (P) est récurrent.

THÉORÈME V. — *Tout mouvement positivement stable M a la propriété que, pour tout nombre positif ε , on peut choisir un nombre positif T assez grand pour que, sur tout arc de la courbe M correspondant à un intervalle égal à T, après l'instant initial $t = t_0$, tous les points ne restent pas à une distance au moins égale à ε des courbes de tous les mouvements limites récurrents de M.*

Démonstration. — Si le théorème n'était pas vrai, nous pourrions choisir une suite d'intervalles de temps indéfiniment croissants (t_1, t'_1) , (t_2, t'_2) , ..., durant lesquels aucun point de la courbe représentant M ne serait à une distance inférieure à une certaine valeur ε des points de tout mouvement limite récurrent de M. Soit P un point-limite des points $P_1, P_2, \dots$, correspondant aux milieux des intervalles (t_1, t'_1) , (t_2, t'_2) , ...

Tout à fait comme plus haut, nous en déduisons immédiatement l'existence d'une courbe passant par P, positivement et négativement stable, telle qu'aucun de ses points ne soit à une distance inférieure à ε des points représentatifs de tout mouvement limite récurrent de M, bien que les points de la courbe (P) soient tous des points-limites oméga du mouvement M; ceci est absurde, puisqu'au moins un mouvement limite du mouvement (P) est récurrent, d'après le théorème IV.

Ce théorème conduit à conjecturer qu'on peut représenter un mouvement stable donné, aussi exactement qu'on le désire, au moyen d'un ensemble de mouvements récurrents, et de mouvements qui leur soient asymptotiques.

V. — CLASSIFICATION DES MOUVEMENTS RÉCURRENTS.

Quels sont les types de mouvements récurrents? Dans le cas de $n = 1$, l'unique mouvement de cette sorte est donné par $x_1 = c$; dans le cas de $n = 2$, on a seulement, outre le cas $x_1 = c_1, x_2 = c_2$,

le cas du mouvement périodique

$$x_i = P_i(e^{2\pi\sqrt{-1}k_1\tau}) \quad (i = 1, 2), \quad t = \int Q(e^{2\pi\sqrt{-1}k_1\tau}) d\tau$$

(où k_1 est un nombre réel positif, et τ un paramètre), car les courbes représentatives d'un mouvement stable dans le plan sont, ou fermées, ou asymptotiques à une courbe fermée (¹).

Dans le cas d'un plus grand nombre n de dimensions, on a n espèces analogues de mouvements, savoir :

$$x_i = c_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$x_i = P_i(e^{2\pi\sqrt{-1}k_1\tau}) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad t = \int Q(e^{2\pi\sqrt{-1}k_1\tau}) d\tau,$$

.....,

$$x_i = P_i(e^{2\pi\sqrt{-1}k_1\tau}, \dots, e^{2\pi\sqrt{-1}k_{n-1}\tau}) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$t = \int Q(e^{2\pi\sqrt{-1}k_1\tau}, \dots, e^{2\pi\sqrt{-1}k_{n-1}\tau}) d\tau;$$

où les quantités $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}$ sont réelles, positives et incommensurables; mais on n'a aucune raison de croire que cette classification épuise tous les cas possibles.

Ce type de mouvement récurrent peut être appelé mouvement récurrent continu et a la propriété que ses points-limites remplissent un continu d'un certain nombre de dimensions. Tous les mouvements récurrents ne possédant pas cette propriété peuvent être appelés *discontinus*.

Dans les problèmes de Dynamique complètement intégrables, c'est seulement le premier type qui se rencontre. Dans les cas non intégrables, je n'ai pu découvrir un exemple dans lequel on ait montré l'existence d'un mouvement du deuxième type.

Il est intéressant de considérer, sous ce rapport, le cas de $n = 3$ dans lequel les trajectoires de la Dynamique sont les géodésiques d'une surface à courbure totale négative, sans singularités. M. Hadamard (²) a traité ce cas. Il divise les géodésiques en trois catégories :

1° Celles qui sont fermées ou asymptotiques à des géodésiques fermées;

(¹) Cf. POINCARÉ, *Sur les courbes définies par les équations différentielles* (3^e partie) (*Journal de Mathématiques*, 4^e série, 1885, p. 228).

(²) *Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques* (*Journal de Mathématiques*, 5^e série, t. IV, 1898, p. 27-73).

2° Celles qui s'éloignent sur les nappes infinies de la surface ;

3° Les géodésiques restantes, qui restent dans les régions finies de la surface et qui sont en nombre infini.

Le mouvement correspondant à une géodésique de cette troisième catégorie est stable, et, par conséquent, parmi les géodésiques représentatives des mouvements limites, il existe au moins une géodésique correspondant à un mouvement récurrent. Cette géodésique ne peut être de la seconde catégorie, ni de la première et asymptotique à une géodésique fermée, puisqu'aucune de ces possibilités ne peut correspondre à un mouvement récurrent. Par suite, ou bien toute géodésique de la troisième catégorie tend à s'approcher infiniment souvent, indéfiniment près en position et direction d'une certaine géodésique fermée, pour s'éloigner chaque fois de nouveau lorsque le temps continue à croître, ou bien il existe un mouvement récurrent donné par une géodésique de la troisième catégorie.

S'il existe un mouvement récurrent de cette troisième catégorie, les recherches de M. Hadamard tendent à montrer qu'il doit être du type discontinu.

Dans les paragraphes suivants, je donnerai un exemple duquel il résulte que, *au moins lorsqu'on écarte l'hypothèse que $X_1, \dots, X_n$ sont analytiques* ⁽¹⁾, *il existe des mouvements récurrents discontinus*, pour un système d'équations (1), dans le cas de $n = 3$. Ceci ne permet pas de donner une conclusion pour les problèmes de Dynamique actuellement étudiés.

VI. — SUR LES ENSEMBLES PARFAITS QUI NE SONT DENSES NULLE PART.

Comme préliminaire à la construction d'un mouvement récurrent discontinu, il nous est nécessaire d'établir un certain type de transformation d'un ensemble parfait, nulle part dense, en lui-même.

Prenons un tel ensemble de points P sur un cercle de rayon 1, sur lequel chaque point est déterminé par une variable angulaire θ . Nous allons montrer qu'il existe une transformation continue

(1) Les définitions employées antérieurement doivent être convenablement modifiées.

de cet ensemble en lui-même, qui conserve l'ordre sur le cercle, et qui est analogue à une rotation d'un angle incommensurable avec 2π .

Inscrivons, en ordre de grandeur non croissante, les intervalles $P_1 P_2, P_3 P_4, \dots$ du cercle, à l'intérieur desquels il n'y a pas de point de l'ensemble P , mais dont les points extrêmes $P_1, P_2, \dots$ appartiennent à l'ensemble. Puis, choisissons un nombre irrationnel t , et écrivons les nombres

$$\frac{0}{1}; \quad \frac{1}{1}t; \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}t, \quad -\frac{1}{2}t; \quad \dots,$$

tels que dans le $n^{\text{ième}}$ groupe de nombres entrent seulement les nombres de la forme $\pm \frac{p}{q} \pm \frac{r}{s}t$ (p, q, r, s étant des entiers positifs ou nuls dont la somme est n) qui ne diffèrent pas par des nombres entiers de ceux des groupes déjà écrits. Nous représenterons cette série de nombres par les points mesurés par l'arc ψ d'un cercle (ψ) ayant une circonférence de longueur 1, sur lequel ces nombres donnent une série de points distincts.

Pour effectuer une correspondance entre ces nombres sur le cercle (ψ) et les intervalles du cercle (θ), nous procéderons comme il suit : nous choisissons le nombre 0 pour correspondre à $P_1 P_2$; le nombre t qui vient ensuite correspondra à $P_3 P_4$; le nombre $\frac{1}{2}$ correspondra au premier des intervalles suivants $P_i P_{i+1}$, qui est tel que les intervalles $P_1 P_2, P_3 P_4, P_i P_{i+1}$ soient dans le même ordre sur le cercle (θ) que les points 0, $t, \frac{1}{2}$ sur le cercle (ψ); de même, le nombre $\frac{1}{2}t$ correspondra au premier intervalle $P_j P_{j+1}$, non déjà choisi, qui est tel que les intervalles $P_1 P_2, P_3 P_4, P_i P_{i+1}, P_j P_{j+1}$ soient dans le même ordre que 0, $t, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}t$, et ainsi de suite.

Ainsi une correspondance ordonnée entre les nombres et tous les intervalles est établie. En effet, si tous les intervalles n'étaient pas choisis, il y aurait un premier intervalle non choisi $P_\alpha P_{\alpha+1}$; mais cet intervalle est certainement le plus grand de ceux qui sont situés entre deux certains intervalles choisis après que les précédents l'ont été, et, par conséquent, il sera choisi lorsqu'il apparaîtra un nombre ψ entre les nombres correspondant à ces deux intervalles.

Le point o , sur le cercle (ψ) , joint à un point quelconque qui n'est pas de la forme $\pm \frac{p}{q} \pm \frac{r}{s} t$, établit une séparation des points de cette forme en deux ensembles ordonnés, ceux d'une classe précédant ceux de l'autre. Sur le cercle (θ) , nous avons d'une façon correspondante une séparation en deux ensembles d'intervalles $P_i P_{i+1}$, reliés de la même manière, et, par suite, définissant un point-limite unique de l'ensemble parfait. Ainsi une correspondance ordonnée et biunivoque est établie entre, d'une part, *tous* les points du cercle (ψ) et, d'autre part, les couples de points $P_i P_{i+1}$, joints aux points P restants.

La transformation $\psi' = \psi + t$ transforme l'ensemble des points

$$\pm \frac{p}{q} \pm \frac{r}{s} t$$

du cercle (ψ) en lui-même, et transforme ainsi l'ensemble parfait du cercle (θ) en lui-même, de manière que tout couple $P_i P_{i+1}$, se transforme en un certain couple déterminé $P_j P_{j+1}$, et que tout autre point de l'ensemble parfait primitif vient en un point transformé qui n'est pas $P_1, P_2, \dots$

Cette transformation conserve l'ordre circulaire sur le cercle (θ) , puisqu'elle le conserve sur le cercle (ψ) . Ainsi, si nous regardons P_i comme allant en P_j , et P_{i+1} comme allant en P_{j+1} , nous avons défini une transformation continue biunivoque de l'ensemble parfait en lui-même, qui conserve l'ordre des points P et qui est du type indiqué au début.

En outre, si nous convenons qu'un point du cercle (θ) situé entre P_i et P_{i+1} est transformé dans le point semblablement placé entre P_j et P_{j+1} , nous avons défini une transformation continue biunivoque $\theta' = f(\theta)$ de *tous* les points du cercle (θ) , conservant l'ordre, et transformant les points P d'un ensemble parfait, nulle part dense, en eux-mêmes.

Cette transformation a de plus la propriété que les puissances de la transformation et de son inverse amènent tout point de l'ensemble dans le voisinage infinitésimal de n'importe quel autre point de l'ensemble. Ce dernier fait devient évident, si l'on se rappelle que, sur le cercle (ψ) , un point ψ_0 vient dans un ensemble de points $\psi_0 + mt$ partout dense, au moyen de la transformation $\psi' = \psi + t$ répétée m fois.

VII. — EXEMPLE D'UN MOUVEMENT RÉCURRENT DISCONTINU.

Nous pouvons maintenant chercher à obtenir un système dynamique qui admette un mouvement récurrent discontinu. Prenons une ligne droite l fixe, dans l'espace à trois dimensions dans lequel les courbes représentatives du mouvement doivent être définies, et soit φ l'angle qu'un plan variable contenant l fait avec un plan fixe quelconque contenant l . Soient o et o' les traces sur ce plan variable d'un cercle dont le centre est un point de l , et qui est situé dans un plan perpendiculaire à l .

Construisons, dans ce plan variable, le système des cercles coaxiaux admettant l comme axe radical et dont o et o' sont les cercles de rayon nul, et construisons aussi le système des cercles orthogonaux qui passent par o et o' .

Un point P du plan variable, non situé sur l , est déterminé par la distance r de o au point où le cercle du premier système passant en P rencontre oo' prolongée, et par l'angle θ , sous lequel le cercle du deuxième système passant par le point rencontre la ligne droite oo' .

Si ces coordonnées r , θ , φ sont prises comme coordonnées cylindriques dans un second espace (r, θ, φ) , tous les points du premier, sauf ceux de l , correspondront d'une manière biunivoque et continue aux points de la région indéfinie située entre les plans parallèles $\varphi = 0$ et $\varphi = 2\pi$.

Nous allons d'abord définir la courbe représentative d'un mouvement récurrent discontinu, et à cet effet nous ferons usage de l'espace (r, θ, φ) .

Choisissons une transformation $\theta' = f(\theta)$ du type indiqué dans le précédent paragraphe. Cette transformation peut être regardée comme transformant tout point P du cercle $r = 1$, $\varphi = 0$, sur le cylindre $r = 1$, en un point P' , distinct de P sur le cercle. Si maintenant nous développons la portion de la surface du cylindre qui se trouve entre $\varphi = 0$ et $\varphi = 2\pi$, sur une bande indéfinie dans un plan (θ, φ) , nous pouvons construire un ensemble de courbes PRQ , en joignant chaque point P sur la ligne $\varphi = 0$ au point Q de la ligne $\varphi = 2\pi$ situé vis-à-vis du point P' , la ligne PRQ étant composée de deux arcs égaux PR , RQ ; de deux cercles égaux, ortho-

gonaux respectivement à $\varphi = 0$ et $\varphi = 2\pi$, et tangents en R. Les courbes PRQ remplissent la bande, et par suite la surface du cylindre; en tout point il passe une de ces courbes, et la direction de la tangente à ces courbes varie continuellement.

Dans l'espace primitif, les courbes PRQ représentent un ensemble de courbes recouvrant une fois la surface du tore $r = 1$ et ayant partout une tangente qui varie continuellement, puisque toutes les courbes PRQ ont une seule et même direction de tangente pour $\varphi = 0$ et $\varphi = 2\pi$.

Considérons une courbe PRQ, dans laquelle P correspond à un point de l'ensemble parfait nulle part dense que $\theta' = f(\theta)$ laisse invariant. Le point Q est par construction opposé à P', transformé de P, et par suite P'R'Q' représente un arc sur le tore qui est la continuation de l'arc représenté par PRQ. Par une suite de semblables raisonnements, nous concluons que la courbe complète correspondante Σ sur le tore est représentée par la totalité des arcs $P^{(n)}R^{(n)}Q^{(n)}$, où $P^{(n)}$ se déduit de P par la répétition de la transformation $\theta' = f(\theta)$ et de son inverse.

Mais nous avons vu que cette transformation ou son inverse amène P dans le voisinage infinitésimal de tout point de l'ensemble parfait invariant. Par suite si la courbe Σ est décrite avec une vitesse qui fait croître φ avec une vitesse constante c , l'ensemble des points-limites alpha et oméga du mouvement obtenu se compose de toutes les courbes représentées par un arc PRQ, où P est un point de l'ensemble parfait, et, en particulier, il comprendra tous les points de Σ elle-même.

Puisque cet ensemble de points-limites est le même quelle que soit la courbe Σ que nous choisissons, l'ensemble de mouvements est minimal, et Σ correspond à un mouvement récurrent discontinu.

Il reste à définir un ensemble continu de mouvements qui comprenne l'ensemble Σ .

Pour obtenir tous ces mouvements, nous retournons à l'espace (r, θ, φ) et nous déplaçons un plan $\varphi = c$ de $\varphi = 0$ à $\varphi = 2\pi$, avec une vitesse uniforme c . Le mouvement d'un point de ce plan sera parfaitement déterminé, si l'on convient :

- 1° Que la ligne radiale $\theta = c$ de ce point dans le plan mobile

ne cesse pas de rencontrer une seule et même courbe PRQ sur le cylindre $r = 1$;

2° Que sa vitesse radiale $\frac{dr}{dt}$ est donnée par $r[x^2 + (1 - r)^2]$, où x est le plus petit des angles que fait la ligne radiale avec toutes les lignes radiales du même plan $\varphi = c$, qui rencontrent l'image PRQ d'une courbe Σ .

Ainsi, nous déterminons $\frac{d\theta}{dt}$ et $\frac{dr}{dt}$ comme des fonctions continues de la position du point, qui ont la même valeur en deux points opposés dans les plans $\varphi = 0$ et $\varphi = 2\pi$. La vitesse radiale est nulle pour $r = 0$ et aussi pour les points du cylindre $r = 1$ qui se trouvent sur l'image d'une courbe Σ , puisqu'alors $x = 0$.

Les courbes correspondantes dans l'espace primitif ont une direction de tangente qui varie d'une manière continue partout excepté sur l . Par suite, elles représentent les mouvements donnés par un système d'équations (1) pour $n = 3$, dans lesquelles x_1, x_2, x_3 sont les coordonnées rectangulaires d'un point, et les fonctions X_1, X_2, X_3 sont continues, mais non analytiques. Les points singuliers S sont les points de l , auxquels X_1, X_2, X_3 sont discontinues, et il n'y a pas de points E .

Tous les énoncés donnés dans ce Mémoire s'appliquent à un tel système, pourvu que les conditions initiales déterminent le mouvement d'une manière unique, comme c'est ici le cas.

Les courbes Σ , évidemment, donnent précisément les mouvements récurrents discontinus préalablement construits. Pareillement, la courbe $r = 0$ correspond à un mouvement récurrent périodique.

En outre, il ne peut y avoir d'autres mouvements récurrents, puisque le r de tout point, qui n'est pas sur $r = 0$ ou sur une courbe Σ , croît constamment. En particulier, il n'y a pas de mouvements périodiques dans le voisinage infinitésimal d'un mouvement Σ .

SOLUTIONS D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES
DANS LE VOISINAGE DE VALEURS SINGULIÈRES,

PAR M. HENRI DULAC.

1. INTRODUCTION. — L'étude de la forme analytique des solutions du système d'équations

$$(1) \quad \frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, \dots, x_n)},$$

dans le voisinage des valeurs $x_1 = x_2 = \dots = x_n$, pour lesquelles on suppose que toutes les expressions $X_i(x_1, \dots, x_n)$ sont holomorphes et nulles, a déjà fait l'objet de nombreux travaux ⁽¹⁾ justifiés par les applications qu'on peut en faire à diverses théories : solutions asymptotiques, solutions périodiques, stabilité de l'équilibre, solutions d'une équation ou d'un système d'équations linéaires dans le voisinage d'un point singulier. J'ai cru, cependant, qu'il pourrait être utile de reprendre cette étude, bien que je n'aie obtenu comme résultats nouveaux que des extensions de résultats connus. En effet, si la simplicité des résultats, relatifs à des cas que l'on peut considérer comme généraux, ne laisse rien à désirer, l'étude d'autres cas présente des complications qui rendent difficile l'application de ces théories. Il m'a semblé que je disposais d'une méthode plus simple que celles qui avaient été suivies, et qui évitait certaines difficultés que les auteurs cités

⁽¹⁾ PICARD, *Comptes rendus*, t. LXXXVII, 1878, p. 430 et 743; *Bulletin de la Société mathématique*, t. XII, 1884, p. 48; *Traité d'Analyse*, t. III, p. 4 et 189. — POINCARÉ, *Journal de l'École Polytechnique*, 45^e Cahier, t. XXVIII, 1878, p. 30; *Thèse*, Paris, 1879; *Journal de Mathématiques*, 4^e série, t. II, 1886, p. 154; *Acta mathematica*, t. XIII, 1890, p. 28; *Rendiconti del Circolo di Palermo*, t. V, 1881, p. 161; *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. 1, p. 336. — KÖNIGSBERGER, *Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen*, 1889, p. 397. — LIAPOUNOFF, *Communications de la Société mathématique de Karkow*, 1892. Une traduction française de ce Mémoire, due à M. Davaux, a paru dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2^e série, t. IX, 1907; voir p. 214, 243, 284, 310. — BENDIXSON, *Stockholm Öfversigt*, t. LI, 1894. — HORN, *Journal de Crelle*, t. CXVI, 1897, p. 265; t. CXVII, p. 104 et p. 254. — LINDELÖF, *Acta Societatis Fennicæ*, t. XXII, n^o 7.

n'avaient surmontées qu'à force d'ingéniosité. La méthode que j'emploie consiste à ramener, par des changements de variables, le système (1) à des formes réduites simples, dont l'intégration complète se fait sans peine.

Cette intégration des équations réduites fournit alors la solution du système (1) soit sous forme de développements en série dépendant d'un paramètre variable et de constantes arbitraires, soit sous la forme d'un système d'intégrales. Nous relions ainsi deux séries de résultats dont les uns ont été obtenus par MM. Picard, Kœnigsberger, Liapounoff, Horn et les autres par MM. Poincaré, Bendixson, Lindelöf.

Les diverses formes réduites obtenues mettent facilement en évidence les divers cas possibles et permettent des applications commodés, ainsi que je le montre en examinant en détail le cas où $n = 3$.

2. Dans le système d'équations (1), posons

$$X_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = L_i + [x_1, x_2, \dots, x_n]_2 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

L_i désigne une forme linéaire en $x_1, x_2, \dots, x_n$, et $[x_1, x_2, \dots, x_n]_2$ est une série procédant suivant les puissances de $x_1, x_2, \dots, x_n$, série ne contenant pas de termes de degré inférieur au second et convergeant si les valeurs absolues des variables sont assez petites. Considérons l'équation caractéristique du système d'équations différentielles linéaires et homogènes

$$(2) \quad \frac{dx_i}{dt} = L_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

et désignons par $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les racines de cette équation.

MM. Poincaré et Picard ont obtenu la solution générale du système (1) lorsque les trois conditions suivantes sont vérifiées :

1° Si l'on représente par des points les divers nombres réels ou imaginaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, il existe une droite D passant par l'origine et laissant d'un même côté tous les points $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$;

2° Il existe un changement linéaire de variables, tel que si les nouvelles variables sont $y_1, y_2, \dots, y_n$, le système (2) prenne la forme

$$\frac{dy_i}{dt} = \lambda_i y_i.$$

Cette condition est toujours vérifiée, si tous les nombres λ_i sont distincts ⁽¹⁾, mais elle peut encore l'être s'il y a des racines multiples ;

3° Il n'existe entre les nombres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ aucune relation de la forme

$$\lambda_i = q_1 \lambda_1 + q_2 \lambda_2 + \dots + q_n \lambda_n,$$

$q_1, q_2, \dots, q_n$ étant des entiers positifs dont la somme est supérieure à 1.

Nous diviserons notre étude de la façon suivante :

I. Les conditions 1°, 2° et 3° sont vérifiées. Nous ne traitons ce cas bien connu que pour servir d'introduction à la méthode employée ;

II. Les conditions 1° et 2° sont vérifiées sans que 3° le soit ;

III. La condition 1° est vérifiée, sans que 2° le soit ; la condition 3° peut être vérifiée ou ne pas l'être ;

IV. La condition 1° n'est pas vérifiée, les conditions 2° et 3° peuvent être vérifiées ou non ;

V. Nous ferons l'application de la méthode employée au cas de $n = 2$ et de $n = 3$.

Les trois premières parties peuvent être résumées par le théorème suivant, d'où se déduisent facilement les autres résultats obtenus :

THÉOREME A. — *La condition 1° étant vérifiée, supposons les nombres λ_i rangés de telle sorte que, lorsque l'indice i augmente, la distance du point λ_i à la droite D n'aille pas en diminuant. Il existe un changement de variable*

$$z_i = g_i(x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

dont les formules sont résolubles par rapport à $x_1, \dots, x_n$, tel que le système (1) soit, en introduisant une variable auxiliaire t , remplacé par le système

$$\frac{dz_i}{dt} = \lambda_i z_i + \varphi_i(z_1, \dots, z_{i-1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

(1) Voir PICARD, *Traité d'Analyse*, t. III, p. 4.

les φ_i sont des polynomes ne contenant que les variables z d'indice inférieur à i . Le polynome φ_i ne contient pas d'autres termes que les termes de la forme $z_1^{q_1} z_2^{q_2} \dots z_{i-1}^{q_{i-1}}$ où $q_1, q_2, \dots, q_{i-1}$ sont des entiers positifs ou nuls vérifiant l'égalité

$$\lambda_i = q_1 \lambda_1 + q_2 \lambda_2 + \dots + q_{i-1} \lambda_{i-1}.$$

Dans le cas IV, nous avons le théorème suivant :

THÉOREME B. — Si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont les divers points λ_i situés d'un même côté d'une droite D, passant par l'origine, tandis que les autres points λ_i sont situés soit à l'origine, soit de l'autre côté de D, on peut toujours exprimer $x_1, x_2, \dots, x_n$ en fonction de p variables $z_1, z_2, \dots, z_p$ par des formules

$$x_i = g_i(z_1, \dots, z_p) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

de telle façon que, si les z_i vérifient un système de p équations

$$(r) \quad \frac{dz_j}{dt} = \lambda_j z_i + \varphi_j(z_1, z_2, \dots, z_{j-1}) \quad (j = 1, 2, \dots, p),$$

les valeurs correspondantes des x_i vérifient le système (1). La solution générale du système (r) fournit une famille de solutions du système (1) dépendant de $p - 1$ arbitraires.

Les φ_j sont des polynomes obtenus d'après la même règle que dans le théorème A.

I.

3. Plaçons-nous dans le cas I, où les trois conditions 1°, 2° et 3° sont vérifiées. En effectuant le changement linéaire de variables dont il est question dans 2°, et introduisant une variable auxiliaire t , les équations (1) sont ramenées à la forme

$$(3) \quad \frac{dy_i}{dt} = Y_i(y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

avec

$$(4) \quad Y_i = \lambda_i y_i + [y_1, \dots, y_n]_2.$$

D'après un théorème connu de Poincaré (1), chacune des

(1) Thèse, Paris, 1879. — PICARD, *Traité*, t. III, p. 5.

équations

$$(5) \quad Y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + \dots + Y_n \frac{\partial f}{\partial y_n} - \lambda_i f = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

admet pour solution une fonction f holomorphe et nulle pour $y_1 = y_2 = \dots = y_n = 0$. Nous pouvons prendre pour solution de l'équation (5)

$$f_i(y_1, \dots, y_n) \equiv y_i + [y_1, \dots, y_n]_2.$$

Faisons le changement de variables

$$(6) \quad z_i = f_i(y_1, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

équations qu'on peut résoudre par rapport à $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Les équations (3) et (5) sont remplacées respectivement par les équations

$$\begin{aligned} \frac{dz_i}{dt} &= Z_i(z_1, \dots, z_n), \\ Z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + \dots + Z_n \frac{\partial f}{\partial z_n} - \lambda_i f &= 0. \end{aligned}$$

Cette dernière équation, en vertu du changement de variables effectué, admet la solution $f \equiv z_i$. Nous avons donc

$$Z_i - \lambda_i z_i \equiv 0.$$

Dans le cas où les conditions 1^o, 2^o et 3^o sont vérifiées, le système d'équations (3) se ramène, par un changement de variables de la forme (6), à la forme réduite

$$\frac{dz_i}{dt} = \lambda_i z_i.$$

En intégrant ces équations, nous avons $z_i = C_i e^{\lambda_i t}$. Nous pouvons poser $\theta = e^t$. Si nous résolvons alors les formules (6) par rapport aux y_i et si nous remplaçons les z_i par leurs expressions, nous obtenons les développements donnés par M. Picard.

Si nous remarquons qu'on a

$$\frac{z_i}{\theta^{\lambda_i}} \equiv \frac{f_i(y_1, \dots, y_n)}{\theta^{\lambda_i}} = C_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

nous obtenons les intégrales de Poincaré en éliminant θ entre ces relations prises deux à deux.

II.

4. PRÉLIMINAIRES. — Considérons le cas II, où les conditions 1° et 2° sont vérifiées sans que la condition 3° le soit. Nous supposons, comme dans le cas I, que les équations (1) soient ramenées à la forme

$$(7) \quad \frac{dy_1}{Y_1} = \frac{dy_2}{Y_2} = \dots = \frac{dy_n}{Y_n}$$

avec

$$Y_i = \lambda_i y_i + [y_1, \dots, y_n]_2.$$

Ces équations gardent la même forme si l'on multiplie tous les dénominateurs par le facteur imaginaire $e^{i\omega}$: les quantités λ_j sont remplacées par les quantités $\mu_j = e^{i\omega} \lambda_j$.

Si l'on considère les points figurant les imaginaires λ_j , cette opération revient à imprimer aux points λ_j une rotation d'angle ω autour de l'origine. Puisque, d'après 1°, il existe une droite D telle que tous les points λ_j soient du même côté de cette droite, on peut choisir l'angle ω de telle façon que les parties réelles des quantités μ_j soient toutes positives.

Nous pouvons toujours supposer, en revenant aux notations primitives, que les parties réelles des λ sont toutes positives.

Nous allons tout d'abord supposer qu'il en est ainsi.

Rangeons les nombres λ_i (sans modifier leurs indices) dans un ordre tel que leurs parties réelles, qui sont positives, n'aillent pas en décroissant. Si les parties réelles de certains des nombres λ_i sont égales entre elles, nous classerons dans un ordre quelconque ces λ_i les uns par rapport aux autres.

Appelons, avec M. Horn, *combinaison des nombres λ_i* une expression de la forme

$$q_1 \lambda_1 + q_2 \lambda_2 + \dots + q_n \lambda_n,$$

où les nombres q_i sont des entiers positifs ou nuls dont la somme est supérieure à 1. La condition 3° n'étant pas vérifiée, certains des λ seront égaux à des combinaisons d'autres λ .

Les λ étant rangés dans l'ordre que nous avons indiqué, on voit que chacun des nombres λ_i ne peut être égal qu'à une combinaison formée avec les λ qui le précèdent.

Déduisons de cette remarque un moyen pratique d'obtenir toutes les égalités de la forme

$$\lambda_i = q_1 \lambda_1 + q_2 \lambda_2 + \dots + q_n \lambda_n$$

qui peuvent exister. Nous considérons successivement les divers nombres λ à partir de celui que nous avons classé le second, et nous cherchons s'il est égal à une combinaison des λ qui le précèdent.

Nous pouvons maintenant, en modifiant convenablement les indices des λ , supposer que les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ ne sont égaux à aucune combinaison des λ , tandis que les nombres $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \dots, \lambda_n$ sont égaux à une ou plusieurs combinaisons des λ .

Nous supposons que les indices aient été modifiés de telle façon que les nombres $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \dots, \lambda_n$ étant rangés dans l'ordre de leurs indices, chacun d'eux ne puisse être égal qu'à une combinaison des λ d'indice inférieur.

Cette condition est réalisée, si les parties réelles des nombres $\lambda_{p+2}, \dots, \lambda_n$ ne vont pas en décroissant lorsque l'indice augmente.

La transformation que nous avons employée pour rendre positives les parties réelles de tous les λ , nous ayant rendu tout le service que nous en attendions pour classer commodément les λ , nous pourrions, une fois les indices modifiés comme cela a été indiqué, abandonner cette transformation et revenir aux valeurs primitives des λ .

Soit

$$(8) \quad q'_1 \lambda_1 + q'_2 \lambda_2 + \dots + q'_n \lambda_n$$

une des combinaisons égales à l'un des nombres λ_k , k ayant l'une des valeurs $p+1, p+2, \dots, n$. Ces combinaisons, où l'indice r prend un nombre fini de valeurs, peuvent être supposées rangées dans un ordre tel que toutes les combinaisons égales à λ_k soient celles pour lesquelles on a

$$r'_k \leq r \leq r''_k,$$

r'_k et r''_k désignant deux entiers.

§. RÉDUCTION DES ÉQUATIONS (7) A UNE FORME RÉDUITE. —

D'après le théorème déjà employé de Poincaré, l'équation

$$(8') \quad Y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + Y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + \dots + Y_n \frac{\partial f}{\partial y_n} - \lambda_j f = 0,$$

où j a l'une des valeurs $1, 2, \dots, p$, admet une intégrale

$$f_j = y_j + [y_1, \dots, y_n]_2.$$

Faisons le changement de variables

$$z_j = f_j(y, \dots, y_n) \quad (j = 1, 2, \dots, p)$$

substituant aux p variables y_j les p variables z_j . En raisonnant comme nous l'avons fait dans le cas I, nous voyons que les équations (3) sont remplacées par les équations

$$(9) \quad \frac{dz_j}{dt} = \lambda_j z_j \quad (j = 1, 2, \dots, p),$$

$$(10) \quad \frac{dy_k}{dt} = Y'_k(z_1, \dots, z_p, y_{p+1}, \dots, y_n) \equiv \lambda_k y_k + [z_1, \dots, z_p, y_{p+1}, \dots, y_n]_2 \\ (k = p+1, \dots, n).$$

Si nous considérons maintenant l'équation

$$(11) \quad \lambda_1 z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + \dots + \lambda_p z_p \frac{\partial f}{\partial z_p} + Y'_{p+1} \frac{\partial f}{\partial y_{p+1}} + \dots + Y'_n \frac{\partial f}{\partial y_n} - \lambda_{p+1} f = 0,$$

nous pourrions chercher à vérifier cette équation au moyen d'une fonction

$$(12) \quad f \equiv y_{p+1} + [z_1, \dots, z_p, y_{p+1}, \dots, y_n]_2.$$

Le coefficient du terme $C_{m_1 m_2 \dots m_n} z_1^{m_1} \dots z_p^{m_p} y_{p+1}^{m_{p+1}} \dots y_n^{m_n}$ dans le premier membre de cette série se calculera en égalant à 0 la somme des termes semblables au terme considéré. On obtient une égalité de la forme

$$(13) \quad [m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2 + \dots + m_n \lambda_n - \lambda_{p+1}] C_{m_1, \dots, m_n} = -P_{m_1, m_2, \dots, m_n},$$

$P_{m_1, m_2, \dots, m_n}$ désignant une fonction des coefficients des séries γ'_k et des constantes $C_{p_1, p_2, \dots, p_n}$, pour lesquels on a

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n < m_1 + m_2 + \dots + m_n.$$

Le second membre de (13) sera donc connu, si l'on suppose que

l'on ait d'abord déterminé les termes de degré 2, ensuite ceux de degré 3, et ainsi de suite. On sera, en général, arrêté par une impossibilité dans la détermination de ces coefficients C; en effet, λ_{p+1} étant égal à toutes les combinaisons (8), pour lesquelles on a

$$(14) \quad 1 = r'_{p+1} \leq r \leq r''_{p+1};$$

faisons

$$m_1 = q_1^r, \quad m_2 = q_2^r, \quad \dots, \quad m_n = q_n^r$$

et désignons par a_r la valeur de $P_{q_1^r q_2^r \dots q_n^r}$, l'égalité (13) devient

$$a_r = 0,$$

condition qui, en général, ne sera pas vérifiée. Remarquons que r ayant l'une des valeurs indiquées, on a

$$q_{p+1}^r = q_{p+2}^r = \dots = q_n^r = 0.$$

Pour former une équation analogue à (11) et admettant une solution de la forme (12), posons

$$\varphi_{p+1} \equiv \Sigma a_r z_1^{q_1^r} z_2^{q_2^r} \dots z_p^{q_p^r},$$

la somme Σ s'étend à tous les termes pour lesquels r prend une valeur vérifiant les inégalités (14), les coefficients a_r ont les valeurs indiquées plus haut et se calculeront de la manière indiquée, à mesure que l'on déterminera les coefficients C de la série que nous allons définir. Considérons l'équation

$$(15) \quad \lambda_1 z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + \dots + \lambda_p z_p \frac{\partial f}{\partial z_p} + Y'_{p+1} \frac{\partial f}{\partial y_{p+1}} + \dots \\ + Y_n \frac{\partial f}{\partial y_n} - \lambda_{p+1} f - \varphi_{p+1} = 0$$

et cherchons à vérifier cette équation par une solution de la forme (12), nous aurons des calculs identiques à ceux que nous avons indiqués, mais on ne sera plus arrêté par une impossibilité lorsqu'on arrivera à la détermination d'un coefficient, tel que l'on ait $m_1 \lambda_1 + \dots + m_n \lambda_n - \lambda_{p+1} = 0$. En effet, le second membre de l'équation analogue à (13) sera

$$a_r - P_{q_1^r \dots q_n^r},$$

et a_r est choisi par hypothèse de telle façon que ce second membre

soit nul. Le coefficient $C_{q_1^r}, \dots, q_n^r$ pourra être pris arbitrairement. Pour fixer les idées, nous ferons ce coefficient égal à 0. En continuant ainsi, nous obtenons une série f de la forme indiquée et vérifiant l'équation (15). La convergence de cette série se démontre, sauf une légère modification comme dans le théorème de Poincaré; nous donnerons du reste n° 11 une démonstration comprenant la démonstration actuelle comme cas particulier.

Désignons par f_{p+1} la solution que nous venons d'obtenir pour l'équation (15) et faisons le changement de variables

$$z_{p+1} = f_{p+1} \equiv y_{p+1} + [z_1, \dots, z_p, y_{p+1}, \dots, y_n]_2,$$

les équations (9) ne changent pas, les équations (10) sont remplacées par les équations

$$(16) \quad \begin{aligned} \frac{dz_{p+1}}{dt} &= Z_{p+1}, \\ \frac{dy_k}{dt} &= Y_k'' = \lambda_k y_k + [z_1, \dots, z_{p+1}, y_{p+2}, \dots, y_n]_2 \\ &\quad (k = p+2, \dots, n). \end{aligned}$$

L'équation aux dérivées partielles est remplacée par

$$\begin{aligned} \lambda_1 z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + \dots + \lambda_p z_p \frac{\partial f}{\partial z_p} + Z_{p+1} \frac{\partial f}{\partial z_{p+1}} + Y_{p+2}'' \frac{\partial f}{\partial y_{p+2}} + \dots \\ + Y_n'' \frac{\partial f}{\partial y_n} - \lambda_{p+1} f - \varphi_{p+1} = 0. \end{aligned}$$

Cette équation admettant la solution $f \equiv z_{p+1}$, nous avons

$$Z_{p+1} \equiv \lambda_{p+1} z_{p+1} + \varphi_{p+1}(z_1, \dots, z_p).$$

En raisonnant sur l'équation

$$\lambda_1 z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + \dots + Z_{p+1} \frac{\partial f}{\partial z_{p+1}} + Y_{p+2}'' \frac{\partial f}{\partial y_{p+2}} + \dots + Y_n'' \frac{\partial f}{\partial y_n} - \lambda_{p+2} f = 0,$$

comme nous avons raisonné sur l'équation (11), nous voyons qu'on est, en général, arrêté par une impossibilité, lorsqu'on cherche à satisfaire à cette équation par une série entière

$$f(z_1, \dots, z_{p+1}, y_{p+2}, \dots, y_n)$$

mais, si l'on désigne par

$$\varphi_{p+2}(z_1, \dots, z_{p+1}) = \Sigma a_r z_1^{q_1^r} z_2^{q_2^r} \dots z_{p+1}^{q_{p+1}^r},$$

un certain polynome ne contenant que les variables $z_1, z_2, \dots, z_{p+1}$, et que l'on obtient en donnant à l'indice r , dans la somme Σ , toutes les valeurs vérifiant les inégalités

$$r'_{p+2} \leq r \leq r'_{p+1},$$

et en calculant les constantes a_r , comme cela a été indiqué pour φ_{p+1} , nous voyons qu'on peut vérifier l'équation

$$(17) \quad \lambda_1 z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + \dots + Z_{p+1} \frac{\partial f}{\partial z_{p+1}} + Y''_{p+2} \frac{\partial f}{\partial y_{p+2}} + \dots \\ + Y''_n \frac{\partial f}{\partial y_n} - \lambda_{p+2} f - \varphi_{p+2} = 0$$

par une fonction

$$f_{p+2} = y_{p+2} + [z_1, \dots, z_{p+1}, y_{p+2}, \dots, y_n]_2,$$

et l'on voit, comme précédemment, que si l'on pose

$$z_{p+2} = f_{p+2} \equiv y_{p+2} + [z_1, \dots, z_{p+1}, y_{p+1}, \dots, y_n]_2,$$

la première des équations (16) sera remplacée par l'équation

$$\frac{dz_{p+2}}{dt} = \lambda_{p+2} z_{p+2} + \varphi_{p+2}(z_1, \dots, z_{p+2}),$$

les autres équations (16) ne changeant pas de forme.

En continuant de la même façon, on voit qu'on peut énoncer le théorème suivant :

Si les conditions 1° et 2° sont vérifiées, il existe un changement de variables

$$(18) \quad z_i = y_i + [y_1, \dots, y_n]_2 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

et un système de polynomes $\varphi_k(z_1, \dots, z_{k-1})$ tel que le système (7) soit remplacé par le système

$$(19) \quad \frac{dz_j}{dt} = \lambda_j z_j \quad (j = 1, 2, \dots, p),$$

$$(20) \quad \frac{dz_k}{dt} = \lambda_k z_k + \varphi_k(z_1, z_2, \dots, z_{k-1}) \quad (k = p+1, \dots, n).$$

Énoncé qui conduit bien au théorème A.

Remarque I. — Les variables z peuvent donc se diviser en deux catégories : celles auxquelles correspond une équation de la forme (19)

et celles auxquelles correspond une équation (20). Si certains des polynômes φ_k se réduisent identiquement à 0, les variables correspondantes feront partie de la première catégorie. Ajoutons que rien ne prouve qu'il y ait une distinction essentielle entre les deux catégories de variables : nous allons voir qu'en modifiant la manière dont nous avons ramené les équations à une forme réduite (19), (20), on peut, dans certains cas, augmenter le nombre des variables de la première catégorie.

Remarque II. — Dans la détermination du changement de variables, $z_i = f_i(y_1, \dots, y_n)$ qui a ramené les équations (7) à une forme réduite, les fonctions f_j correspondant aux valeurs 1, 2, ..., p de l'indice j sont déterminées indépendamment les unes des autres, et chacune d'elles est déterminée d'une façon unique, car on voit facilement que chacune d'elles doit vérifier l'équation (8'). Il n'en est plus de même des fonctions f_k correspondant aux valeurs $p+1, p+2, \dots, n$ de l'indice k . Dans chacune d'elles, nous pourrions, ainsi que nous l'avons dit, choisir arbitrairement certains coefficients. Si, au lieu de prendre ces coefficients nuls, comme nous l'avons fait pour fixer les idées, nous donnons à ces coefficients des valeurs quelconques, rien ne sera modifié dans la suite des raisonnements. Le polynôme φ_{p+1} est déterminé encore d'une façon unique ; mais, la détermination du polynôme φ_{p+2} peut dépendre du choix que l'on a fait pour les coefficients arbitraires de f_{p+1} . De même, la détermination du polynôme φ_k pour $k > p+2$ peut dépendre du choix que l'on a fait pour les coefficients arbitraires de $f_{p+1}, f_{p+2}, \dots, f_{k-1}$. Il en résulte qu'il est possible que la réduction à une forme réduite ait lieu de plusieurs façons. En choisissant convenablement les coefficients arbitraires, il est possible qu'on obtienne une forme réduite plus simple que celle que nous avons,

Considérons, par exemple, le système

$$\frac{dx}{dt} = x, \quad \frac{dy}{dt} = 2y + x^2, \quad \frac{dz}{dt} = 3z + x^3,$$

qui est déjà ramené à une forme réduite. Si nous posons $u = z - xy$, nous avons la forme réduite plus simple

$$\frac{dx}{dt} = x, \quad \frac{dy}{dt} = 2y + x^2, \quad \frac{du}{dt} = 3u.$$

Remarque III. — Rien n'est changé à nos raisonnements si, dans les équations (7), plusieurs des nombres λ_i sont égaux entre eux.

6. INTÉGRATION DES ÉQUATIONS RÉDUITES. — Les p équations (19) ont leur solution générale donnée par

$$(21) \quad z_j = C_j e^{\lambda_j t},$$

les C_j étant des constantes arbitraires,

Si, dans φ_{p+1} , nous remplaçons $z_1, z_2, \dots, z_p$ par leurs expressions, nous avons

$$(22) \quad \varphi_{p+1}(z_1, \dots, z_p) = e^{\lambda_{p+1}t} \varphi_{p+1}(C_1, \dots, C_p).$$

En effet, si $a_r z_1^{q_1^r} z_2^{q_2^r} \dots z_p^{q_p^r}$ est un des termes de φ_{p+1} , nous avons

$$\lambda_1 q_1^r + \lambda_2 q_2^r + \dots + \lambda_p q_p^r = \lambda_{p+1}.$$

La première des équations (20) devient donc

$$\frac{dz_{p+1}}{dt} = \lambda_{p+1} z_{p+1} + e^{\lambda_{p+1}t} \varphi_{p+1}(C_1, \dots, C_p)$$

dont la solution générale est

$$z_{p+1} = e^{\lambda_{p+1}t} [C_{p+1} + t \varphi_{p+1}(C_1, \dots, C_p)].$$

La seconde des équations (20) deviendra de même

$$\frac{dz_{p+2}}{dt} = \lambda_{p+2} z_{p+2} + e^{\lambda_{p+2}t} \psi_{p+2}(t, C_1, \dots, C_{p+1})$$

en posant

$$\psi_{p+2}(t, C_1, \dots, C_{p+1}) = \varphi_{p+2}[C_1, C_2, \dots, C_p, C_{p+1} + t \varphi_{p+1}(C_1, \dots, C_p)],$$

nous aurons donc

$$z_{p+2} = e^{\lambda_{p+2}t} [C_{p+2} + P_{p+2}(t, C_1, \dots, C_{p+1})].$$

P_{p+2} est, comme ψ_{p+2} , un polynome par rapport à t et aux constantes $C_1, C_2, \dots, C_{p+1}$; le degré de P_{p+2} par rapport à t sera supérieur d'une unité au degré de ψ_{p+2} par rapport à t .

Nous pourrions continuer à opérer de la même façon et arriver à intégrer l'équation contenant z_n . On aura

$$(23) \quad z_k = e^{\lambda_k t} [C_k + P_k(t, C_1, \dots, C_{k-1})] \quad (k = p+1, \dots, n).$$

Les C sont des constantes et P_k un polynome par rapport à t et aux C .

Remarque I. — Posons, pour abréger,

$$u_i = C_i e^{\lambda_i t}.$$

Nous avons, d'après (22)

$$e^{\lambda_{p+1} t} \varphi_{p+1}(C_1, \dots, C_p) = \varphi_{p+1}(u_1, u_2, \dots, u_p),$$

$$e^{\lambda_{p+1} t} \psi_{p+2}(t, C_1, \dots, C_p) = \varphi_{p+2}[u_1, u_2, \dots, u_p, u_{p+1} + t \varphi_{p+1}(u_1, \dots, u_p)].$$

Il en résulte que $e^{\lambda_{p+1} t} P_{p+2}(t, C_1, \dots, C_{p+1})$ sera un polynome en $u_1, u_2, \dots, u_p, u_{p+1}$ dont les coefficients seront des polynomes du second degré en t . En continuant à raisonner de même, on voit que l'on a

$$z_k = u_k + Q_k(u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, t) \quad (k = p+1, \dots, n).$$

Q_k est un polynome en $u_1, u_2, \dots, u_{k-1}$ et t . Les termes de ce polynome sont au moins du second degré par rapport à $u_1, u_2, \dots, u_{k-1}$.

Remarque II. — Si, comme cela arrive souvent, t est une variable auxiliaire qu'il n'est pas utile de conserver, nous pourrions éliminer t entre les formules d'intégration (22) et (23). Nous choisirons, parmi les variables z_j de la première catégorie, une variable, z_1 , par exemple, à laquelle nous ferons jouer un rôle particulier. Les équations différentielles (19) et (20) ne changeant pas lorsqu'on change t en $t - t_0$, nous ne diminuerons pas la généralité de la solution fournie par les formules

$$z_j = C_j e^{\lambda_j t},$$

$$z_k = e^{\lambda_k t} [C_k + P_k(t, C_1, \dots, C_{k-1})].$$

en supposant que pour $t=0$ l'on ait $z_1 = 1$, ce qui revient à supposer $C_1 = 1$. Nous voyons, du reste, que les formules ainsi obtenues nous fournissent, pour chaque système de valeurs initiales attribuées à $z_1, z_2, \dots, z_n$, une solution et une seule des équations

$$(24) \quad \frac{dz_1}{\lambda_1 z_1} = \frac{dz_2}{\lambda_2 z_2} = \dots = \frac{dz_{p+1}}{\lambda_{p+1} z_{p+1} + \varphi_{p+1}} = \dots = \frac{dz_n}{\lambda_n z_n + \varphi_n},$$

xl. 23

nous avons donc bien la solution générale de ce système d'équations différentielles.

Nous aurons donc, en faisant $C = 1$ et en supposant $\lambda_1 = 1$, comme on peut toujours le faire en divisant par λ_1 tous les dénominateurs des équations (24),

$$\begin{aligned} t &= \log z_1, \\ z_j &= C_j z_1^{\lambda_j} \quad (j = 2, 3, \dots, p), \\ z_k &= z_1^{\lambda_k} [C_k - P_k(\log z_1, 1, C_2, \dots, C_{k-1})] \quad (k = p+1, \dots, n). \end{aligned}$$

Remarque III. — Si, parmi les expressions y_i , il en est une λ_r qui se réduise à $\lambda_r y_r$, nous pourrions poser

$$z_r = y_r,$$

les autres changements de variables (18) s'effectuant comme cela a été indiqué. Cette variable z_r fera sûrement partie des variables de la première catégorie, nous pourrions donc lui faire jouer le rôle que jouait z_1 dans la remarque précédente.

Par exemple, si nous avons le système d'équations différentielles, considéré par M. Horn

$$(25) \quad x \frac{dx_i}{dx} = \lambda_i x_i + a_i x + [x, x_1, \dots, x_n]_2 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Les racines de l'équation caractéristique sont $1, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Si la condition 2° est vérifiée, le changement linéaire de variable qui ramène les équations (24) à la forme (7) est

$$y_i = x_i + \frac{a_i x}{\lambda_i - 1}.$$

Si la condition 1° est vérifiée, les théories précédentes s'appliquent, et il existe un changement de variables

$$(26) \quad z_i = y_i + [x, y, \dots, y_n]_2$$

qui ramène le système donné à la forme

$$(27) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x, \\ \frac{dz_i}{dt} &= \lambda_i z_i + \varphi_i(x, z_1, \dots, z_{i-1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Certains des polynomes φ_i peuvent être identiquement nuls.

Nous pouvons faire jouer à la variable x le rôle que jouait z_1 dans la remarque précédente, et nous aurons

$$(28) \quad z_i = x^{\lambda_i} [C_i + P_i(\log x, 1, C_1, C_2, \dots, C_{i-1})].$$

On peut encore écrire, d'après la Remarque I,

$$z_i = C_i x^{\lambda_i} + Q_i(x, C_1, x^{\lambda_1}, \dots, C_{i-1} x^{\lambda_{i-1}}, \log x),$$

Q_i est un polynôme par $x, C_1 x^{\lambda_1}, \dots, C_{i-1} x^{\lambda_{i-1}}$ et $\log x$.

7. DÉVELOPPEMENTS DE M. HORN ⁽¹⁾. — Si nous résolvons les formules (18) du changement de variables par rapport aux y_i , nous avons

$$y_i = z_i + [z_1, \dots, z_n]_2.$$

Si, dans ces formules, nous remplaçons les z_i par leurs expressions (21) et (23), nous aurons, d'après la remarque I, des développements des y_i suivant les puissances des quantités $C_i e^{\lambda_i t}$, les coefficients de ces développements étant des polynômes par rapport à t .

Ces développements sont convergents si les valeurs de t sont telles que les modules des z_i soient suffisamment petits.

En particulier, pour les équations (25) de M. Horn, les formules (26) nous donneront

$$y_i = z_i + [x, z_1, \dots, z_n]_2,$$

et en remplaçant les z_i par leurs expressions (28), nous aurons les développements des fonctions y_i suivant les puissances des x et des quantités $C_i x^{\lambda_i t}$, les coefficients de ces développements étant des polynômes en $\log x$. Ce sont les développements que M. Horn a obtenus par la méthode des coefficients indéterminés.

Remarque. — Une fois établies l'existence et la convergence des développements dont nous venons de parler, la méthode la plus pratique pour obtenir autant de termes que l'on veut de ces développements me paraît être la méthode suivante, dont on remarquera

⁽¹⁾ Avant d'avoir été étudiés par M. Horn, ces développements avaient été brièvement signalés par M. Liapounoff dans le Mémoire cité, écrit en russe.

l'analogie avec la méthode donnée par M. Liapounoff, bien qu'elle me paraisse dériver d'un principe tout différent.

Les coefficients des développements trouvés étant des polynomes par rapport aux constantes $C_1, \dots, C_n$, nous pourrions les écrire sous la forme de séries procédant suivant les puissances de ces constantes.

Nous allons chercher les termes de ces développements. Soit

$$(29) \quad y_i = (y_i)_1 + (y_i)_2 + \dots + (y_i)_s + \dots$$

le développement de y_i , en désignant par $(y_i)_s$ des polynomes homogènes de degré s . Lorsque nous remplaçons, dans les équations

$$(30) \quad \frac{dy_i}{dt} = \lambda_i y_i + (y_1, \dots, y_n)_2,$$

les y_i par ces expressions, les deux membres de chacune de ces équations deviennent deux séries entières par rapport à C_i , séries qui doivent être identiques. Nous égalons successivement dans les deux membres les termes de degré 1, 2, ..., s . Nous avons

$$(31) \quad \begin{aligned} \frac{(dy_i)_1}{dt} &= \lambda_i (y_i)_1, \\ \frac{(dy_i)_s}{dt} &= \lambda_i (y_i)_s + (A_i)_s, \end{aligned}$$

$(A_i)_s$ désigne l'ensemble des termes de degré s par rapport aux constantes qui sont fournis par le développement du terme $[y_1, \dots, y_n]_2$ du second membre de (30), lorsque les y_i sont remplacés par leurs expressions (29). $(A_i)_s$ est un polynome connu formé avec les expressions $(y_i)_j$ pour lesquelles l'indice j est inférieur à s .

Nous avons

$$(y_i)_1 = C_i e^{\lambda_i t}.$$

Les expressions $(A_i)_2$ seront donc des sommes de termes de la forme αe^{at} , a étant une combinaison des λ_i et α un polynome homogène et du second degré en $C_1, \dots, C_n$. Nous aurons, par exemple, en faisant $i = q$

$$(A_q)_2 = \sum \alpha_j e^{a_j t},$$

d'où, en cherchant pour $s = 2$ et $i = q$ une solution particulière

de l'équation (31),

$$(y_q)_2 = \sum \frac{\alpha_j e^{\alpha_j t}}{\alpha_j - \lambda_q}.$$

Dans le cas où certains des nombres α_j sont égaux à λ_q , nous aurons dans $(y_q)_2$ des termes de la forme $\alpha t e^{\alpha t}$.

Nous aurons de même toutes les expressions $(y_i)_n$. Le calcul des expressions $(y_i)_s$, connaissant toutes les fonctions $(y_i)_s$ pour lesquelles on a $s' < s$, se présente de la même façon. On a, par exemple,

$$\frac{d(y_n)_s}{dt} = \lambda_n (y_n)_s + \sum \alpha_j t^{\alpha_j} e^{b_j t},$$

où les expressions α_j sont des polynômes homogènes de degré s par rapport aux C_i , α_j des entiers positifs, b_j des combinaisons des λ_i . On sait trouver d'une façon tout élémentaire une solution de la forme

$$(y_n)_s = \sum \beta_j t^{c_j} e^{b_j t},$$

où β_j est homogène et de degré s par rapport aux C_i ; le plus grand des entiers c_j est égal au plus grand des entiers α_j , si aucun des nombres b_j n'est égal à λ_n , mais pourra lui être supérieur d'une unité dans le cas, qui n'est pas ici exceptionnel, où λ_n est égal à certains des b_j . La même méthode de calcul s'applique pour $(y_i)_s$, quelle que soit la valeur de i .

Dans le cas des équations (25) de M. Horn, nous mettons ces équations sous la forme (27) et nous faisons le changement de variables (26) donnant les équations (27).

On a

$$x = C e^t,$$

$$z_i = x^{\lambda_i} [C_i + P_i(\log x, C, C_1, \dots, C_{i-1})].$$

Nous aurons donc, d'après la méthode précédente, le développement des fonctions y_i en séries dont les termes successifs $(y_i)_1$, $(y_i)_2$, $(y_i)_s$ seront d'après la Remarque I du n° 6, des polynômes homogènes et de degrés respectifs 1, 2, ..., s par rapport aux expressions $C e^t$, $C_i e^{\lambda_i t}$. Les coefficients de ces polynômes sont eux-mêmes des polynômes en t . D'après la remarque II du n° 6, on peut faire $C = 1$. On a donc $t = \log x$. Les fonctions $(y_i)_s$ sont donc des polynômes homogènes et de degré s par rapport à x et

aux quantités $C_i x^{\lambda_i}$. Les coefficients de ces polynomes sont des polynomes en $\log x$.

8. INTÉGRALES DE M. LINDELÖF. — Des formules (21) et (23) donnant la solution générale du système (19) (20), nous allons déduire, en éliminant t et résolvant par rapport aux constantes C_i , des fonctions restant constantes pour une solution quelconque de ce système et vérifiant, par suite, l'équation aux dérivées partielles

$$(32) \quad Z(f) \equiv Z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + Z_2 \frac{\partial f}{\partial z_2} + \dots + Z_n \frac{\partial f}{\partial z_n} = 0,$$

où l'on a

$$Z_i = \lambda_i z_i + \varphi_i(z_i, \dots, z_{i-1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

les polynomes $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ sont, d'ailleurs, identiquement nuls. Nous avons les formules (21) et (23)

$$(33) \quad z_j = C_j e^{\lambda_j t} \quad (j = 1, 2, \dots, p),$$

$$(34) \quad z_{p+1} = e^{\lambda_{p+1} t} [C_{p+1} + t \varphi_{p+1}(C_1, C_2, \dots, C_p)],$$

$$(35) \quad z_k = e^{\lambda_k t} [C_k + P_k(t, C_1, \dots, C_{k-1})] \quad (k = p+2, \dots, n).$$

D'après la Remarque I du n° 6, nous pouvons, en posant $u_i = C_i e^{\lambda_i t}$, écrire

$$z_j = u_j \quad (j = 1, 2, \dots, p),$$

$$(36) \quad z_{p+1} = u_{p+1} + t \varphi_{p+1}(z_1, \dots, z_p),$$

$$(37) \quad z_k = u_k + Q_k(u_1, \dots, u_{k-1}, t) \quad (k = p+2, \dots, n),$$

Q_k étant un polynome en $u_1, \dots, u_{k-1}$ et t .

Si, dans l'égalité (35) relative à $k = p+1$, nous remplaçons $u_1, \dots, u_{k-1}$ par leurs valeurs tirées des égalités précédentes, nous avons

$$z_{p+2} = u_{p+2} + S_{p+2}(z_1, \dots, z_{p+1}, t).$$

En opérant de même pour une valeur quelconque de k , nous obtenons

$$z_k = u_k + S_k(z_1, \dots, z_{k-1}, t) \quad (k = p+1, \dots, n),$$

S_k étant un polynome en $z_1, \dots, z_{k-1}$ et t . Ces relations peuvent encore s'écrire

$$(38) \quad z_k = C_k e^{\lambda_k t} + S_k(z_1, \dots, z_{k-1}, t).$$

Nous les obtiendrons encore en éliminant $C_1, C_2, \dots, C_{k-1}$ entre une des égalités (35) et les égalités (33), (34), (35) qui la précèdent.

Nous pouvons, comme nous l'avons remarqué, supposer $C_1 = 1, \lambda_1 = 1$, d'où

$$z_1 = e^t, \quad t = \log z_1.$$

En portant ces valeurs dans (33), (34), (35) et résolvant par rapport aux constantes, nous avons les $n - 1$ intégrales suivantes de l'équation (32) :

$$(39) \quad J_i \equiv z_i z^{-\lambda_i} = C_i \quad (i = 1, 2, \dots, p),$$

$$(40) \quad J_{p+1} \equiv [z_{p+1} - \log z_1 \varphi_{p+1}(z_1, \dots, z_p)] z^{-\lambda_{p+1}} = C_{p+1},$$

$$(41) \quad J_k \equiv [z_k - S_k(z_1, \dots, z_{k-1}, \log z_1)] z^{-\lambda_k} = C_k \quad (k = p + 2, \dots, n).$$

Nous pouvons obtenir des intégrales plus simples que celles données par les formules (41). Transformons d'abord la solution (40). En remarquant que, d'après les formules (33), on a

$$\varphi_{p+1}(z_1, \dots, z_p) = z_1^{\lambda_{p+1}} \varphi_{p+1}(C_1, \dots, C_p),$$

nous pouvons remplacer l'intégrale (40) par l'intégrale

$$(42) \quad J \equiv z_{p+1} (\varphi_{p+1})^{-1} - \log z_1 = C.$$

D'autre part, un quelconque des λ_k étant égal à une combinaison des λ d'indice moindre et ceux-ci, jusqu'à λ_{p+1} inclusivement, étant égaux, à des combinaisons de λ d'indice moindre, un quelconque des λ_k sera égal au moins à une combinaison de $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$. Nous aurons

$$\lambda_k = q_1^{k'} \lambda_1 + q_2^{k'} \lambda_2 + \dots + q_p^{k'} \lambda_p.$$

Les formules (33) donnent, en introduisant un certain produit Π_k , et faisant $C_1 = 1$

$$(43) \quad \prod_k \equiv z_1^{q_1^{k'}} z_2^{q_2^{k'}} \dots z_p^{q_p^{k'}} = z_1^{\lambda_k} C_2^{q_2^{k'}} \dots C_p^{q_p^{k'}}.$$

On peut donc remplacer tout d'abord les intégrales (41) par les intégrales

$$J'_k = [z_k - S_k(z_1, \dots, z_{k-1}, \log z_1)] \left(\prod_k \right)^{-1} = C_k.$$

Si maintenant de (42) nous tirons

$$\log z_1 \equiv z_{p+1}(\varphi_{p+1})^{-1} - J,$$

et si, dans une des intégrales J'_k , nous remplaçons $\log z$ par cette expression, nous obtenons une expression G , que nous pourrions écrire

$$G \equiv G_0 + G_1 J + \dots + G_q J^q + \dots + G_s J^s$$

en l'ordonnant suivant les puissances de J . L'entier s a une valeur qui varie suivant la valeur de k . On a

$$G_0 \equiv [z_k + R_0(z_1, \dots, z_{k-1})] \left(\prod_k \right)^{-1},$$

$$G_q \equiv R_q(z_1, \dots, z_{k-1}) \left(\prod_k \right)^{-1} \quad (q = 1, 2, \dots, s).$$

Les expressions R_0, R_q, R_s étant des fonctions rationnelles dont les dénominateurs sont des puissances de φ_{p+1} .

L'expression G est une solution de l'équation (32). Si dans (32) nous remplaçons f par G , en remarquant que, puisque J est solution de (32) on a $Z(J) = 0$, nous avons

$$(44) \quad Z(G_0) + Z(G_1)J + \dots + Z(G_q)J^q + \dots + Z(G_s)J^s = 0.$$

Cette identité doit avoir lieu, quels que soient $z_1, \dots, z_k$. Choisissons, pour ces variables, des valeurs arbitraires (n'annulant pas φ_{p+1} afin d'éviter toute difficulté), laissons aux variables $z_2, z_3, \dots, z_k$ les valeurs choisies et faisons décrire à z_1 une courbe fermée autour de $z_1 = 0$. Lorsque z_1 aura décrit m fois cette courbe, la valeur de J aura varié de $2m\pi\sqrt{-1}$, tandis que les coefficients des puissances de J dans le polynôme (44) reprennent les mêmes valeurs. Le polynôme (44) en J , qui est nul pour une infinité de valeurs de J , sera donc identiquement nul. Il en résulte que $G_0, G_q, \dots, G_s$ sont des solutions de l'équation (32).

Si nous appliquons d'abord cette méthode pour $k = p + 2$, G_0 nous fournit l'intégrale

$$I_{p+2} \equiv [z_{p+2} + T_{p+2}(z_1, \dots, z_{p+1})] \left(\prod_k \right)^{-1} = G_{p+2},$$

qui est distincte des solutions (39) et (40) déjà obtenues, puisque celles-ci ne dépendaient que des variables $z_1, \dots, z_{p+1}$. Quant aux

expressions $G_1, G_2, \dots, G_s$, ou bien elles se réduisent à des constantes, ou bien elles ne fournissent pas d'intégrales distinctes des intégrales déjà obtenues. En effet, une quelconque de ces expressions, ne pouvant contenir que les variables $z_1, \dots, z_{p+1}$, est une solution de l'équation

$$\sum_{j=1}^p \lambda_j z_j \frac{\partial f}{\partial z_j} + [\lambda_{p+1}, z_{p+1} + \varphi_{p+1}(z_1, \dots, z_p)] \frac{\partial f}{\partial z_{p+1}} = 0.$$

Or, nous avons déjà avec (39) et (40) p solutions distinctes de cette équation.

En appliquant successivement pour $k = p + 3, p + 4, \dots, n$ la méthode indiquée, on voit de la même façon que l'on obtient chaque fois une seule intégrale, distincte des intégrales précédentes.

Enfin, si dans les $n - 1$ intégrales obtenues, nous remplaçons les z_i par leurs expressions (18) en fonction des y , nous obtenons les intégrales du système (7) obtenues par M. Lindelöf. Nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Si les conditions 1° et 2° sont vérifiées, il existe un système de fonctions

$$z_i = y_i + [y_1, \dots, y_n]_2 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

avec

$$y_i = a_1^i x_1 + a_2^i x_2 + \dots + a_n^i x_n \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

tel que l'équation

$$X_1(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + X_n(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

admette les $n - 1$ intégrales suivantes

$$z_j z^{-\lambda_i} \quad (i = 2, 3, \dots, p),$$

$$z_{p+1} [\varphi(z_1, \dots, z_p)]^{-1} - \log z_1,$$

$$(45) \quad [z_k + T_k(z_1, \dots, z_{k-1})] \left(\prod_k \right)^{-1} \quad (k = p + 2, \dots, n),$$

où φ est un polynome, Π_k un produit de puissances entières des variables $z_1, z_2, \dots, z_p$ et T_k une fonction rationnelle de $z_1, \dots, z_{k-1}$ dont le dénominateur est une puissance de φ .

Remarque I. — D'après la formule (43), nous pouvons

dans (45) remplacer Π_k par $z_1^{\lambda_k}$. La substitution inverse, qui avait été faite pour simplifier les raisonnements, n'a pas besoin d'être maintenue dans les résultats. Nous pourrions en faire abstraction.

Remarque II. — Pour obtenir les intégrales (45), nous avons d'abord éliminé $C_1, C_2, \dots, C_{k-1}$ entre une des équations (35) et les équations (35), (34) et (33) qui la précèdent. Nous avons ensuite remplacé e^t par z_1 et t par $\log z_1$.

Ceci revient à faire $C_1 = 1$ dès le début du calcul, à remplacer la première des équations (33) par $z_1 = e^t$ et à éliminer $t, C_2, \dots, C_{k-1}$ entre les relations que nous avons considérées. Nous avons alors résolu la relation obtenue par rapport à C_{k-1} et remplacé $\log z_1$ par $z_{p+1} (\varphi_{p+1})^{-1} - J$.

Pour obtenir l'expression G_0 qui nous a fourni une intégrale, nous n'avons conservé que les termes ne contenant pas J . Il est donc évident que nous pouvons faire dès le début du calcul $J = 0$, ce qui revient à faire, dans (40) et (34), $C_{p+1} = 0$. De plus, au lieu de faire cette hypothèse après avoir éliminé les constantes $C_2, C_3, \dots, C_{k-1}$, nous pouvons la faire avant de les éliminer.

En résumé, *pour obtenir les diverses intégrales (45), nous intégrons les équations (19) et (20) jusqu'à celle de rang k ; nous particularisons l'intégration en faisant $C_1 = 1, C_{p+1} = 0$. Nous obtenons ainsi les relations*

$$\begin{aligned} z_1 &= e^t, & z_j &= C_j e^{\lambda_j t} & (j = 2, 3, \dots, p), \\ z_{p+1} &= t \varphi_{p+1}(1, C_2, \dots, C_p), \\ z_i &= e^{\lambda_i t} [C_i + P_i(t, 1, C_2, \dots, C_p, 0, C_{p+1}, \dots, C_{i-1})] \\ & & (i = p+1, \dots, k). \end{aligned}$$

Nous éliminons enfin les $k-1$ quantités $e^t, t, C_2, \dots, C_p, C_{p+1}, \dots, C_{k-1}$ entre les k relations que nous avons. En résolvant par rapport à C_k la relation obtenue, nous avons l'intégrale (45).

Remarque III. — Si, parmi les polynômes P_k des formules (35), il en est un autre que $t \varphi_{p+1}$ dans lequel t figure seulement au premier degré, nous pouvons faire jouer à la relation (35) correspondante le rôle joué par la relation (34).

III.

9. Considérons le cas où la condition 1^o étant vérifiée, les conditions 2^o et 3^o ne le sont pas. Nous supposons que l'équation caractéristique ait des racines multiples. On sait ⁽¹⁾ que, dans ce cas, il existe un changement linéaire de variables, substituant les variables y_i aux variables x_i , et tel que les équations différentielles (1) deviennent

$$(46) \quad \frac{dy_i}{dt} = \lambda_i y_i + b_i p_{i-1} + (y_1, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Nous avons eu soin d'attribuer les indices de telle façon que les racines égales λ_i de l'équation caractéristique aient des indices consécutifs. Les constantes b_i peuvent être nulles; elles sont toujours nulles pour les valeurs de i telles que l'on ait $\lambda_i \neq \lambda_{i-1}$. Les constantes b_i qui ne sont pas nulles peuvent être supposées égales à 1.

Faisons le changement de variables

$$(47) \quad t = \log u^r, \quad y_i = u^{r_i} u_i.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{dy_i}{dt} &= \frac{r_i}{r} u^{r_i} u_i + u^{r_i} \frac{du_i}{dt}, \\ \frac{dy_i}{dt} &= \lambda_i u^{r_i} u_i + b_i u^{r_{i-1}} u_{i-1} + [u^{r_1} u_1, \dots, u^{r_n} u_n]_2. \end{aligned}$$

D'où

$$(48) \quad \frac{du_i}{dt} = \left(\lambda_i - \frac{r_i}{r} \right) u_i + b_i u^{r_{i-1}-r_i} u_{i-1} + [u^{r_1} u_1, \dots, u^{r_n} u_n]_2 u^{-r_i}.$$

Si nous voulons que, dans le second membre de chacune de ces équations, le premier terme soit le seul terme du premier degré par rapport aux variables $u, u_1, \dots, u_n$, il faut d'abord que, si b_i n'est pas nul, on ait $r_{i-1} > r_i$. Pour fixer les idées, nous prendrons

$$r_{i-1} = 1 + r_i.$$

(1) Voir, par exemple, GOURSAT, *Cours d'Analyse*, t. II, 2^e éd., p. 488.

Toutes les expressions $[u^{r_1} u_1, \dots, u^{r_n} u_n]_2$ contiendront par suite u^{2r_n} en facteur; il suffira donc, pour avoir la forme d'équation voulue, de prendre

$$2r_n > r_1,$$

c'est-à-dire

$$2r_n > r_n + n - 1, \quad r_n > n - 1.$$

Nous prendrons

$$r_i = 2n - i.$$

Si nous posons

$$(49) \quad \mu_i = \lambda_i - \frac{r_i}{r},$$

nous avons, d'après (48),

$$(50) \quad \frac{du}{dt} = \frac{u}{r},$$

$$(51) \quad \frac{du_i}{dt} = \mu_i u_i + [u, u_1, \dots, u_n]_2.$$

La condition 1° étant vérifiée pour les équations (1), on peut toujours, ainsi que nous l'avons vu n° 4, supposer que les nombres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ont leurs parties réelles positives. On peut alors prendre r assez grand pour que les parties réelles des nombres μ_i soient aussi toutes positives, et que le nombre $\frac{1}{r}$ que nous pouvons désigner par μ_0 soit inférieur aux parties réelles des autres nombres. La condition 1° sera donc vérifiée pour les équations (50) (51), puisque les parties réelles des nombres $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n$ sont positives. La condition 2° est vérifiée, d'après la forme même des équations (51).

Nous ne supposons pas que la condition 3° soit vérifiée. Si nous supposons les nombres λ_i rangés de telle façon que leurs parties réelles n'aillent pas en décroissant, il en sera *a fortiori* de même pour les nombres μ_i . Un de ces nombres μ_i ne pourra être égal qu'à une combinaison des nombres $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{i-1}$ d'indice inférieur à i . Nous pourrions toujours supposer, en prenant s'il le faut $p = 1$, que les nombres $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$ ne sont égaux à aucune combinaison des nombres μ .

Si nous appliquons au système des équations (50) et (51) la méthode employée au début du n° 5, nous voyons que, pour chaque valeur de $j = 1, 2, \dots, p$, il existe une fonction

$$F_j = u_j + [u, u_1, \dots, u_n]_2$$

vérifiant l'équation

$$(52) \quad \frac{u}{r} \frac{\partial F}{\partial u} + \sum_{i=1}^n (\mu_i u_i + [u, u_1, \dots, u_n]_2) \frac{\partial F}{\partial u_i} - \mu_j F = 0.$$

Nous allons montrer que l'on peut écrire, en revenant aux variables $y_1, \dots, y_n$,

$$(53) \quad u^r F_j(u, u_1, \dots, u_n) = F_j(1, y_1, \dots, y_n) \equiv f_j(y_1, \dots, y_n),$$

identité définissant une certaine série entière f_j . Nous montrerons ensuite qu'on a

$$(54) \quad f_j \equiv y_j + [y, \dots, y_n]_2.$$

Les termes de l'expression $[u, u_1, \dots, u_n]_2$ qui figurent dans le coefficient de $\frac{\partial F}{\partial u_i}$ proviennent de l'expression

$$(55) \quad b_i y_{i-1} + [y_1, \dots, y_n]_2$$

divisée par u^i , ainsi qu'on le voit, en se reportant à la formation des équations (48) et (51). Un terme $my_1^{m_1}, y_2^{m_2}, \dots, y_n^{m_n}$ de l'expression (55) fournira, dans le coefficient de $\frac{\partial F}{\partial u_i}$, un terme $mu^{m_0} u_1^{m_1}, \dots, u_n^{m_n}$ en posant

$$(56) \quad m_0 = m_1 r_1 + m_2 r_2 + \dots + m_n r_n - r_i.$$

Partant de là, nous allons montrer que, si les termes de F_j qui sont de degré inférieur à q s'expriment, après avoir été multipliés par u^r , au moyen d'un polynôme en $y_1, \dots, y_n$, il en sera de même pour les termes de degré q .

Écrivons, en effet, l'équation (52) sous la forme

$$(57) \quad \frac{u}{r} \frac{\partial F}{\partial u} + \sum_{i=1}^n \mu_i u_i \frac{\partial F}{\partial u_i} - \mu_j F = - \sum_{i=1}^n \frac{b_i y_{i-1} + [y_1, \dots, y_n]_2}{u^i} \frac{\partial F}{\partial u_i},$$

$y_1, y_2, \dots, y_n$ pourront dans le second membre de (57) être remplacés par leurs expressions (46). Soit $lu^l u_1^{l_1} \dots, u_n^{l_n}$ un terme de degré inférieur à q de F_j . Puisque le produit de ce terme par u^r est un terme d'un polynôme en $y_1, \dots, y_n$, nous devons avoir, d'après (56),

$$(58) \quad l_0 = l_1 r_1 + l_2 r_2 + \dots + l_n r_n - r_j.$$

Les termes du second membre de (57) fournis par le terme que nous venons de considérer sont les termes de l'expression

$$-l \sum_{i=1}^n \frac{b_i y_{i-1} + [y_1, \dots, y_n]_2}{u^{r_i}} l_i u^{l_0} u_1^{l_1} \dots u_i^{l_i-1} \dots u_n^{l_n},$$

qui peut s'écrire, d'après (58),

$$-l \sum_{i=1}^n (b_i y_{i-1} + [y_1, \dots, y_n]_2) l_i y_1^{l_1} \dots y_i^{l_i} \dots y_n^{l_n} u^{-r_i}.$$

Il en résulte que, lorsqu'on déterminera les termes de degré q de F_j , en identifiant dans les deux membres de (55) les termes de degré q , on ne pourra obtenir que des termes qui, multipliés par u^j , s'exprimeront en fonction entière de $y_1, \dots, y_n$.

Pour $q = 2$, les termes de F_j de degré inférieur à 2 se réduiront à u_j , nous avons $u^j u_j = y_j$. Il résulte donc bien de la propriété démontrée que $u^j F_j$ est une série entière en $y_1, \dots, y_n$. Un terme $l u^{l_0} u_1^{l_1} \dots u_n^{l_n}$ de F_j peut s'écrire d'après (58) $l y_1^{l_1} \dots y_n^{l_n} u^{-r_j}$; nous avons donc bien l'égalité (53).

Pour démontrer que f_j n'a pas d'autre terme du premier degré que le terme y_j , faisons les remarques suivantes :

1° Un terme $c_i y_i$ de f_j , provient d'un terme $c_i u^s u_i$ de F_j , nous aurons donc d'après (53) et les valeurs de r_i et r_j

$$s = r_i - r_j = j - i.$$

Ceci montre d'abord que l'on doit avoir $i \leq j$, et ensuite que, pour obtenir les termes du premier degré de f_j , il suffit de chercher les termes de F_j qui sont de la forme $c_i u^{j-i} u_i$, c'est-à-dire les termes où $u_1, \dots, u_n$ figurent au premier degré.

2° Si l'on considère un de ces termes, la somme des termes semblables qui figurent dans (52) doit être identiquement nulle. Si nous remarquons que dans (52) tous les coefficients des dérivées de F contiennent $u_1, \dots, u_n$ au moins au premier degré, nous voyons que, pour obtenir dans (52) les termes du premier degré en $u_1, \dots, u_n$, il suffit de considérer les termes du premier degré en $u_1, \dots, u_n$ dans F et dans les coefficients des dérivées de F .

3° Pour $i \leq p$, on a $b_i = 0$. En effet, nous avons dit à propos

de (46) que, si b_i est différent de 0, on a $\lambda_i = \lambda_{i-1} - 1$, c'est-à-dire

$$\mu_i = \mu_{i-1} + \frac{1}{r}, \quad \mu_i = \mu_0 + \mu_{i-1}.$$

Contrairement aux hypothèses faites, un des nombres $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$ serait égal à une combinaison des nombres μ , si un des nombres $b_1, \dots, b_p$ n'était pas nul.

En utilisant les trois remarques précédentes, on voit que les termes de F_j qui sont du premier degré en $u_1, \dots, u_n$ vérifient l'identité

$$\sum_{i=1}^j \left(\frac{j-i}{r} + \mu_i - \mu_j \right) c_i u^{j-i} u_i \equiv 0.$$

Il en résulte que tous les coefficients c_i sont nuls, à l'exception de c_j qui reste arbitraire et que nous prenons égal à 1. Le seul terme du premier degré de f_j est bien y_j .

F_j vérifiant l'équation (52), on en déduit (1), en se servant de l'identité (53) et en revenant aux variables $y_1, \dots, y_n$, que f_j vérifie l'équation

$$(59) \quad \sum_{i=1}^n (\lambda_i p_i + b_i p_{i-1} + [y_1, \dots, y_n]_2) \frac{\partial f}{\partial y_i} - \lambda_j f_j = 0.$$

Si nous raisonnons alors comme aux n^{os} 3 et 5, on voit que, si l'on fait le changement de variables,

$$(60) \quad z_j = f_j(y_1, \dots, y_n) = y_j + [y_1, \dots, y_n]_2 \quad (j = 1, 2, \dots, p),$$

les équations (46) seront remplacées par les équations

$$(61) \quad \frac{dz_j}{dt} = \lambda_j z_j \quad (j = 1, 2, \dots, p).$$

$$(62) \quad \frac{dy_k}{dt} = \lambda_k y_k = g_k(z_1, \dots, z_p, y_{p+1}, \dots, y_n) \quad (k = p+1, \dots, n),$$

où $g_{p+1}, g_{p+2}, \dots, g_n$ sont des séries entières sans termes constants, dont les termes du premier degré se réduisent respectivement à $b_{p+1} z_p, b_{p+2} y_{p+1}, \dots, b_n y_{n-1}$.

(1) On peut remarquer que (52) exprime que $e^{-\lambda_j t} F_j$ est une intégrale du système (50), (51); il en résulte que d'après (53) et (49) $e^{-\lambda_j t} f_j$ est une intégrale du système (46), d'où l'équation (59).

D'après ce que nous venons de voir, il existe pour $s = p$ un changement de variables

$$(63) \quad z_j = f_j(y_1, \dots, y_n) \equiv y_j + [y_1, \dots, y_n]_2 \quad (j = 1, 2, \dots, s)$$

qui ramène le système donné (46) au système des équations

$$(64) \quad \frac{dz_j}{dt} \equiv \lambda_j z_j + \varphi_j(z_1, \dots, z_{j-1}) \quad (j = 1, 2, \dots, s).$$

$$(65) \quad \frac{dy_k}{dt} = \lambda_k y_k + g_k(z_1, \dots, z_s, y_{s+1}, \dots, y_n) \quad (k = s+1, \dots, n),$$

où les φ_j et les g_k sont respectivement des polynômes et des séries entières. De plus, les termes du premier degré de φ_j se réduisent à $b_j z_j$ et ceux de g_k se réduisent à $b_{s+1} z_s$ pour $k = s+1$ et à $b_k y_{k-1}$ pour $k = s+2, \dots, n$. En effet, en prenant pour $s = p$ tous les polynômes φ_j identiquement nuls, nous avons bien établi la propriété énoncée pour $s = p$. Nous allons montrer que, si cette propriété est vraie pour une valeur de s , elle est vraie pour $s+1$.

Faisons le changement de variables

$$(66) \quad \begin{cases} z_j = u^{r_j} v_j & (j = 1, 2, \dots, s), \\ y_k = u^{r_k} u_k & (k = s+1, \dots, n); \end{cases}$$

les équations (64) et (65) prennent respectivement la forme

$$(67) \quad \frac{dv_j}{dt} = \mu_j v_j + \Phi_j(u, v_1, \dots, v_{j-1}),$$

$$(68) \quad \frac{du_k}{dt} = \mu_k u_k + G_k(u, v_1, \dots, v_s, u_{s+1}, \dots, u_n),$$

en posant

$$(69) \quad u^{r_j} \Phi_j(u, v_1, \dots, v_{j-1}) = \varphi_j(z_1, \dots, z_{j-1}),$$

$$(70) \quad u^{r_k} G_k(u, v_1, \dots, v_s, u_{s+1}, \dots, u_n) = g_k(z_1, \dots, z_s, y_{s+1}, \dots, y_n).$$

Cherchons à déterminer une fonction

$$F_{s+1}(u, v_1, \dots, v_s, u_{s+1}, \dots, u_n) = u_{s+1} + [u, v_1, \dots, v_s, u_{s+1}, \dots, u_n]_2$$

et un polynôme $\Phi_{s+1}(u, v_1, \dots, v_s)$ de manière à vérifier l'équation

$$(71) \quad \frac{u}{r} \frac{\partial F}{\partial u} + \sum_{j=1}^s (\mu_j v_j + \Phi_j) \frac{\partial F}{\partial v_j} + \sum_{k=s+1}^n (\mu_k u_k + G_k) \frac{\partial F}{\partial u_k} - \mu_{s+1} F = \Phi_{s+1}.$$

Nous écrirons cette équation

$$(72) \quad \frac{u}{r} \frac{\partial F}{\partial u} + \sum \mu_j v_j \frac{\partial F}{\partial v_j} + \sum \mu_k v_k \frac{\partial F}{\partial u_k} - \mu_{s+1} F \\ = \Phi_{s+1} - \sum \Phi_j \frac{\partial F}{\partial v_j} - \sum G_k \frac{\partial F}{\partial u_k}.$$

Raisonnons comme nous l'avons fait au n° 5 sur l'équation (11). Si nous supposons que Φ_{s+1} soit identiquement nul, nous serons arrêtés, en général, par une impossibilité dans la détermination des termes de F_s . En effet, si nous avons

$$(73) \quad \mu_{s+1} = \frac{q_0}{r} + q_1 \mu_1 + \dots + q_s \mu_s$$

lorsque nous voudrions déterminer le coefficient du terme $u^{q_0} v_1^{q_1}, \dots, v_s^{q_s}$ de F_{s+1} la somme des coefficients des termes semblables sera nulle dans le premier membre de (72), tandis que dans le second membre elle sera égale à un nombre $-a$. Si au contraire, nous introduisons dans Φ_{s+1} un terme $a u^{q_0} v_1^{q_1}, \dots, v_s^{q_s}$, cette impossibilité ne se présentera pas et nous pourrions choisir arbitrairement le coefficient du terme considéré de F_{s+1} . *Pour simplifier, nous le prendrons nul.* En déterminant, comme nous l'avons fait dans les cas analogues, des termes de degré de plus en plus élevé de F_{s+1} , nous serons ainsi conduits à déterminer en même temps des termes de Φ_{s+1} . Nous conviendrons de n'introduire dans Φ_{s+1} que les termes qu'il est strictement nécessaire d'introduire pour vérifier l'équation (71).

Nous allons montrer que F_{s+1} et Φ_{s+1} possèdent les deux propriétés signalées pour F_j lorsqu'on a $j < p$. On a

$$(74) \quad \begin{cases} u^{r_{s+1}} \Phi_{s+1}(u, v_1, \dots, v_s) = \Phi_{s+1}(1, z_1, \dots, z_s) \equiv \varphi_{s+1}(z_1, \dots, z_s), \\ u^{r_{s+1}} F_{s+1}(u, v_1, \dots, v_s, u_{s+1}, \dots, u_n) \\ = F_{s+1}(1, v_1, \dots, v_s, u_{s+1}, u_n) \equiv f_{s+1}(z_1, \dots, z_s, y_{s+1}, \dots, y_n). \end{cases}$$

identités définissant φ_{s+1} et f_{s+1} et, de plus, les termes de degré minimum de φ_{s+1} et f_{s+1} sont respectivement $b_{s+1} z_s$ et y_{s+1} .

La première propriété s'exprime en disant que, si l'on multiplie par $u^{r_{s+1}}$ un terme de F_{s+1} ou de Φ_{s+1} , on obtient, en tenant compte des formules (66), un monome entier en $z_1, \dots, z_s, y_{s+1}, \dots, y_n$. Cette propriété est évidente pour le terme du premier degré de

F_{s+1} puisqu'on a $u'^{s+1} \dot{u}_{s+1} = y_{s+1}$. Pour montrer qu'elle est vraie pour tous les termes de F_{s+1} et de Φ_{s+1} , nous n'avons qu'à raisonner pour l'équation (71) comme nous l'avons fait pour l'équation (52) et à nous servir des relations (69), (70) et (74). Nous montrerons ainsi que les termes successifs qui s'introduisent dans l'expression

$$(75) \quad \sum \Phi_j \frac{\partial F}{\partial v_j} + \sum G_k \frac{\partial F}{\partial u_k}$$

qui figure dans le second membre de (72) jouissent tous de la propriété indiquée. Il en est donc de même des termes de F_{s+1} puisqu'on les détermine par l'identification des deux membres de (72). Les termes de Φ_{s+1} qui, d'après ce que nous avons dit, sont égaux à certains des termes de (75) jouissent donc aussi de la propriété indiquée. La propriété exprimée par les égalités (74) est donc démontrée.

Pour démontrer que les termes du premier degré de φ_{s+1} et f_{s+1} se réduisent bien aux deux termes indiqués, utilisons les deux premières remarques employées dans la démonstration analogue relative à f_j pour $j \leq p$. Désignons respectivement par

$$u_{s+1} + \sum_{i=1}^s c_i u^{s+1-i} v_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^s a_i u^{s+1-i} v_i$$

l'ensemble des termes du premier degré, en $v_1, \dots, v_s, u_{s+1}, \dots, u_n$ de F_{s+1} et Φ_{s+1} . L'équation nous fournit l'identité

$$\begin{aligned} b_{s+1} u^s + \sum_{i=1}^s \left(\frac{s+1-i}{r} + \mu_i - \mu_{s+1} \right) c_i u^{s+1-i} v_i \\ + \sum_{i=1}^s c_i b_i u^{s+2-i} v_{i-1} = \sum_{i=1}^s a_i u^{s+1-i} v_i. \end{aligned}$$

Les coefficients c_i et a_i ne sont assujettis qu'à vérifier cette identité. De plus, d'après les conventions faites dans la détermination de F_{s+1} et de Φ_{s+1} , nous devons prendre ces coefficients égaux à 0 toutes les fois qu'il sera possible de le faire. On voit ici qu'on doit prendre $a_s = b_{s+1}$ et qu'on peut prendre égaux à 0 tous les coeffi-

cients $c_1, \dots, c_s, a_1, \dots, a_{s-1}$. Nous avons bien

$$(76) \quad \begin{cases} f_{s+1} = y_{s+1} + [\mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_s, y_{s+1}, \dots, y_n]_2, \\ \varphi_{s+1} = b_{s+1}, \mathfrak{z}_s + [\mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_s]_2, \end{cases}$$

F_{s+1} vérifiant l'équation (71), on en déduit, en revenant aux variables $\mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_s, y_{s+1}, \dots, y_n$ et se servant de (74) et (49) que f_{s+1} vérifie l'équation

$$(77) \quad \sum_{j=1}^s (\lambda_j \mathfrak{z}_j + \varphi_j) \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}_j} + \sum_{k=s+1}^n (\lambda_k y_k + y_k) \frac{\partial f}{\partial y_k} - \lambda_{s+1} f = \varphi_{s+1}.$$

Si nous raisonnons alors comme nous l'avons fait au n° 5, on voit que si l'on fait le changement de variable

$$(78) \quad \mathfrak{z}_{s+1} = f_{s+1}(\mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_s, y_{s+1}, \dots, y_n) \equiv y_{s+1} + [\mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_s, y_{s+1}, \dots, y_n]_2$$

la première des équations (65) est remplacée par l'équation

$$\frac{d\mathfrak{z}_{s+1}}{dt} = \lambda_{s+1}, \mathfrak{z}_{s+1} + \varphi_{s+1}(\mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_s),$$

les équations suivantes ne changent pas de forme, $\mathfrak{z}_{s+1}$ y figure au lieu de y_{s+1} , les termes du premier degré des g_k ne changent pas.

L'ensemble des deux changements (63) et (78) équivaut à un changement de variables de la forme (63), j prenant les valeurs 1, 2, ..., $s+1$. Il donne un système d'équations (64) et (65) où s est remplacé par $s+1$, les polynômes φ_j et les séries g_k ayant les termes du premier degré que l'on a indiqués.

Le changement de variables (63), dont nous avons parlé, existant pour $s = p$, existera pour $s = p+1, p+2, \dots, n$. Pour $s = n$ ce changement ramène les équations (46) à la forme

$$\frac{d\mathfrak{z}_i}{dt} = \lambda_i, \mathfrak{z}_i + \varphi_i(\mathfrak{z}_1, \dots, \mathfrak{z}_{i-1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Nous pouvons donc énoncer dans le cas III, où la condition 2° n'est pas vérifiée, le même théorème que dans le cas II. n° 5. En complétant les démonstrations qui précèdent par les remarques qui vont suivre, nous arriverons à l'énoncé du théorème A (n° 2).

Toutes les conséquences que nous avons tirées de ce théorème dans le cas II : intégration des équations, développements de

M. Horn, intégrales de Poincaré et de M. Lindelöf, s'étendent sans modification au cas III où la condition 2^o n'est pas vérifiée.

Remarque I. — D'après le théorème que nous avons invoqué à propos de la convergence de la série f_{p+1} vérifiant l'équation (15), il est évident que la série F_{s+1} est convergente si, η et η' étant des nombres assez petits, l'on a

$$(79) \quad |u| \leq \eta', \quad |v_j| \leq \eta, \quad |u_k| \leq \eta,$$

mais il peut ne pas paraître évident qu'il existe un nombre ε tel que la série f_{s+1} soit convergente si l'on a $|z_j| < \varepsilon$ et $|y_k| < \varepsilon$. L'objection peut être levée en montrant que l'on peut prendre $\eta' = 1$ et que d'après (74) la série f_{s+1} sera convergente si l'on a $|z_j| \leq \eta$, $|y_k| \leq \eta$. Il est plus simple de raisonner de la façon suivante. On peut toujours, en prenant un nombre ε assez petit, choisir des nombres u , v_j , u_k vérifiant les conditions (79) et tels que les valeurs correspondantes de z_j et y_k , données par les formules (66), soient $z_1 = z_2 = \dots = z_s = y_{s+1} = \dots = y_n = \varepsilon$. La série $u^{r_{s+1}} F_{s+1}$ étant convergente pour ces valeurs de u , v_j , u_k , tous ses termes seront inférieurs en module à un nombre fixe M. Il en sera donc de même des termes de la série f_{s+1} et celle-ci, d'après une généralisation connue du théorème d'Abel, sera convergente pour $|z_j| < \varepsilon$, $|y_k| < \varepsilon$.

Remarque II. — Considérons un terme $au^{q_0}u_1^{q_1}\dots u_s^{q_s}$ du polynôme Φ_{s+1} .

Nous avons l'égalité (73)

$$(80) \quad \mu_{s+1} = \frac{q_0}{r} + q_1\mu_1 + \dots + q_s\mu_s.$$

Ce terme multiplié par $u^{r_{s+1}}$ devant donner le terme $z_1^{q_1} z_2^{q_2} \dots z_s^{q_s}$ du polynôme φ_{s+1} , nous aurons, d'après (56),

$$(81) \quad q_0 \equiv q_1 r_1 + \dots + q_s r_s - r_{s+1}.$$

Si dans (80) nous remplaçons les μ par leurs expressions (49) et si nous nous servons de (81), nous obtenons

$$(82) \quad \lambda_{s+1} = q_1 \lambda_1 + \dots + q_s \lambda_s.$$

Les seuls termes qui figurent dans le polynôme φ_{s+1} sont les

termes $az_1^{q_1} z_2^{q_2} \dots z_s^{q_s}$ pour lesquels l'égalité (82) est vérifiée. Lorsque nous aurons déterminé toutes les égalités possibles de la forme (82), nous connaîtrons la forme du polynôme φ_{s+1} , il ne restera plus qu'à déterminer ses coefficients. *Nous avons donc bien la loi de formation des polynômes φ_i indiquée dans l'énoncé du théorème A.*

Remarque III. — Dans le cas II, la somme $q_1 + q_2 + \dots + q_s$ des entiers figurant dans l'égalité (82), doit être au moins égale à 2; les polynômes φ_i ne contiennent *jamaïs* de termes du premier degré. Dans le cas III, c'est la somme $q_0 + q_1 + \dots + q_s$ qui doit être supérieure à 1 et $q_1 + \dots + q_s$ peut être égal à 1. Si la condition 2° n'est pas vérifiée, certains des polynômes φ_i contiennent toujours des termes du premier degré. Nous avons vu que, si b_i n'est pas nul dans (46), φ_i contient le terme $b_i z_{i-1}$. On voit encore, d'après ce que nous avons dit, que *chacun des polynômes φ_i contient, au plus, un terme du premier degré : le terme $b_i z_{i-1}$.*

Remarque IV — Si la condition 3° est vérifiée, les polynômes φ_i ne contiennent que des termes du premier degré, et l'on obtient la forme réduite

$$\frac{dz_i}{dt} = \lambda_i z_i + b_i z_{i-1}, \quad i = 2, \dots, n).$$

Remarque V. — A peu près tous les raisonnements de ce n° 9 ont eu pour objet la démonstration de l'existence d'une solution f_j de l'équation (71) lorsqu'on choisit convenablement φ_j . L'existence de cette solution avait été démontrée au n° 5, dans le cas où tous les b_i sont nuls. La méthode que nous avons suivie nous a démontré, par une voie détournée, qu'une pareille solution existe dans tous les cas.

IV.

10. Dans le cas où la condition 1° est vérifiée, les formules (18) qui expriment les z_i , en fonction des y_i , mettent en évidence que, pour étudier toutes les solution du système (1) ou du système (46), telles que les valeurs absolues des x_i ou des y_i soient suffisamment

petites, il suffit d'étudier toutes les solutions du système réduit (19), (20), telles que les z_i prennent des valeurs assez petites. Les développements de M. Horn ou les intégrales de MM. Poincaré et Lindelöf, qui donnent la solution générale du système (19), (20) pour $|z_i|$ assez petit, donneront donc la solution générale du système (1) ou du système (46) pour $|x_i|$ ou $|y_i|$ assez petits.

Nous n'aurons pas un résultat aussi complet lorsque la condition 1° n'est pas vérifiée. Nous pourrions seulement trouver un certain nombre de catégories de solutions, dépendant chacune d'un certain nombre de constantes. Ce résultat a déjà été établi par MM. Picard, Poincaré, Horn, Liapounoff, sous diverses formes et dans des cas plus ou moins étendus. On pourra comparer la méthode que je suis avec la méthode employée par Poincaré dans le Mémoire cité du Tome XIII des *Acta*.

Considérons une droite D passant par l'origine et ne rencontrant aucun des points λ_i . Cette droite, puisque la condition 1° n'est pas vérifiée, laissera p points $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ d'un côté et $n - p$ points $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n$ de l'autre côté. Nous pouvons toujours supposer, comme au n° 4, que les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ ont leurs parties réelles positives, tandis que les nombres $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n$ ont leurs parties réelles négatives. Nous pouvons également toujours mettre, par un changement linéaire de variables, les équations (1) sous la forme

$$(83) \quad \frac{dy_i}{dt} = \lambda_i y_i + \Lambda_i(y_1, \dots, y_p, y_{p+1}, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

avec

$$\Lambda_i \equiv b_i y_{i-1} + [y_1, \dots, y_p, y_{p+1}, \dots, y_n]_2.$$

Nous considérerons successivement les trois cas suivants :

A. Cas particulier où la condition suivante est remplie :

Condition (a). Toutes les séries $\Lambda_{p+1}, \Lambda_{p+2}, \dots, \Lambda_n$ sont identiquement nulles, lorsqu'on y fait $y_{p+1} = y_{p+2} = \dots = y_n = 0$.

B. Cas où la condition (a) n'est pas vérifiée, mais où la condition suivante est vérifiée :

Condition (b). Tous les nombres $b_1, b_2, \dots, b_p$ sont nuls.

C. Cas où ni la condition (a), ni la condition (b) ne sont vérifiées.

II. CAS A. — Les équations (83) seront vérifiées, si l'on prend

$$y_{p+1} = y_{p+2} = \dots = y_n = 0,$$

tandis que $y_1, y_2, \dots, y_p$ vérifient les équations

$$\frac{dy_j}{dt} = \lambda_j y_j + A_j(y_1, \dots, y_p, 0, 0) \quad (j = 1, 2, \dots, p).$$

La condition 1^o du n^o 2 étant vérifiée pour ce système, sa solution générale a été obtenue; $y_1, \dots, y_p$ seront donnés par exemple par des développements procédant suivant les puissances des quantités $C_1 e^{\lambda_1 t}, C_2 e^{\lambda_2 t}, \dots, C_p e^{\lambda_p t}$, les C étant des constantes arbitraires. Les coefficients de ces développements peuvent être des polynômes en t , si certains des λ_j sont égaux à des combinaisons d'autres λ_j .

CAS B. — Nous allons, par un changement de variables, ramener ce cas au précédent. Faisons le changement

$$(84) \quad y'_k = y_k - f_k(y_1, \dots, y_p) \quad (k = p+1, p+2, \dots, n).$$

Nous avons

$$(85) \quad \frac{dy'_k}{dt} = \lambda_k y_k + A_k(y_1, \dots, y_p, y_{p+1}, \dots, y_n) - \sum_{j=1}^p (\lambda_j y_j + A_j) \frac{\partial f_k}{\partial y_j}.$$

Remplaçons, dans le second membre de ces relations, y_k par $y_k + f_k$ et exprimons que chacun de ces seconds membres est identiquement nul pour $y'_{p+1} = y'_{p+2} = \dots = y'_n = 0$. Cela revient à exprimer que le second membre de (85) est nul lorsqu'on remplace y_k par f_k . On a donc

$$(86) \quad \sum_{j=1}^p [\lambda_j y_j + A_j(y_1, \dots, y_p, f_{p+1}, \dots, f_n)] \frac{\partial f_k}{\partial y_j} - \lambda_k f_k = A_k(y_1, \dots, y_p, f_{p+1}, \dots, f_n) \quad (k = p+1, \dots, n)$$

avec

$$A_i = [y_1, \dots, y_p, f_{p+1}, \dots, f_n]_2 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Nous avons ainsi $n - p$ équations aux dérivées partielles pour déterminer les $n - p$ fonctions $f_{p+1}, f_{p+2}, \dots, f_n$.

On pourra toujours vérifier ces équations au moyen de séries entières en $y_1, \dots, y_p$ convergentes lorsque les variables sont assez petites. En effet, si l'on suppose déterminés les termes de

degré inférieur à q des séries $f_{p+1}, \dots, f_n$ et si l'on veut déterminer un terme

$$C_{m_1, m_2, \dots, m_p}^k y_1^{m_1} y_2^{m_2} \dots y_p^{m_p}$$

de f_k , on obtiendra, en identifiant dans les deux membres de (86), les termes semblables au terme considéré,

$$(87) \quad (m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2 + \dots + m_p \lambda_p - \lambda_k) C_{m_1, m_2, \dots, m_p}^k = P_{m_1, m_2, \dots, m_p}^k,$$

$P_{m_1, m_2, \dots, m_p}^k$ étant une fonction connue des coefficients des Λ_k et des coefficients déjà déterminés des f_k . Les termes de moindre degré de la série f_k seront semblables aux termes de moindre degré de la série $\Lambda_k(y_1, \dots, y_p, 0, \dots, 0)$. Le coefficient de chacun de ces termes s'obtient par une égalité de la forme (87), dont le second membre est le coefficient du terme de $\Lambda_k(y_1, \dots, y_p, \dots, 0, \dots, 0)$ semblable au terme considéré. Dans l'égalité (87), le coefficient $m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2 + \dots + m_p \lambda_p - \lambda_k$ n'est jamais nul, car les parties réelles des différents termes $m_1 \lambda_1, m_2 \lambda_2, \dots, m_p \lambda_p$ et $-\lambda_k$ sont, par hypothèse, toutes positives.

Les séries f_k ainsi obtenues sont convergentes. Soit ε la plus petite des parties réelles des nombres $\lambda_1, \dots, \lambda_p, -\lambda_{p+1}, -\lambda_{p+2}, \dots, -\lambda_n$. Nous avons

$$(88) \quad |m_1 \lambda_1 + \dots + m_p \lambda_p - \lambda_k| > \varepsilon (m_1 + m_2 + \dots + m_p),$$

car le module d'une quantité est supérieur à sa partie réelle et de plus nous diminuons certains des termes réels en remplaçant ces termes par les termes correspondants du second membre. Désignons ensuite par

$$\frac{M(y_1 + \dots + y_p + f_{p+1} + \dots + f_n)^2}{1 - y_1 + \dots + y_p + f_{p+1} + \dots + f_n}$$

r

une fonction majorante commune aux diverses séries $\Lambda_k(y_1, \dots, y_p, f_{p+1}, \dots, f_n)$. Les termes des séries f_k seront inférieurs en module aux termes correspondants des fonctions F_k qui vérifient les équations

$$\varepsilon \sum_{j=1}^p y_j \frac{\partial F_k}{\partial y_j} = \frac{M(y_1 + \dots + y_p + F_{p+1} + \dots + F_n)^2}{1 - y_1 + \dots + y_p + F_{p+1} + \dots + F_n} \left(1 + \sum_{j=1}^p \frac{\partial F_k}{\partial y_j} \right).$$

Il est évident que ces diverses fonctions F seront identiques et seront égales à une fonction $F(u)$ dépendant seulement de la somme

$$y_1 + y_2 + \dots + y_p = u.$$

Cette fonction $F(u)$ vérifie l'équation différentielle

$$\varepsilon u \frac{dF}{du} = \frac{M(u + qF)^2}{1 - \frac{u + qF}{r}} \left(1 + q \frac{dF}{du} \right),$$

où nous posons $q = n - p$. Cette équation s'écrit

$$\left[\varepsilon u - \varepsilon \frac{(u + qF)}{r} - Mq(u + qF)^2 \right] \frac{dF}{du} = M(u + qF)^2$$

et admet, d'après un théorème connu de Briot et Bouquet, une solution $F(u)$ holomorphe et nulle pour $u = 0$. Cette série F étant convergente pour u suffisamment petit, les séries f_k seront aussi convergentes, lorsque le module des quantités $y_1, y_2, \dots, y_p$ seront suffisamment petits.

Si nous faisons le changement de variables (84), les équations (83) deviendront

$$(89) \quad \begin{aligned} \frac{dy_j}{dt} &= \lambda_j y_j + [y_1, \dots, y_p, y'_{p+1}, \dots, y'_n]_2, \\ \frac{dy'_k}{dt} &= \lambda_k y'_k + [y_1, \dots, y_p, y'_{p+1}, \dots, y'_n]_2. \end{aligned}$$

Les équations (89) sont identiquement vérifiées en prenant $y'_{p+1} = y'_{p+2} = \dots = y'_n = 0$; nous sommes donc ramenés au cas où l'hypothèse (a) est vérifiée. Nous chercherons les solutions pour lesquelles on a $y'_{p+1} = y'_{p+2} = \dots = y'_n = 0$ et par suite

$$(90) \quad \begin{aligned} y'_{pn} &= y'_{pn} = \dots = y'_n, \\ \frac{dy_j}{dt} &= \lambda_j y_j + [y_1, \dots, y_n, 0, \dots, 0]_2 \quad (j = 1, 2, \dots, p), \end{aligned}$$

$y_1, y_2, \dots, y_p$ s'exprimeront au moyen de développements procédant suivant les puissances des p quantités $C_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, C_p e^{\lambda_p t}$. Nous avons, d'autre part, pour les solutions que nous considérons, $y'_k = 0$ ($k = p + 1, \dots, n$); nous aurons donc, d'après (84),

$$(91) \quad y_k = f_k(y_1, \dots, y_p) \quad (k = p + 1, \dots, n),$$

et, par suite, les n variables $y_1, y_2, \dots, y_n$ seront exprimées au moyen de développements contenant p arbitraires.

Si nous considérons l'espace à n dimensions $y_1, y_2, \dots, y_n$, les courbes intégrales que nous obtenons ainsi forment une famille dépendant de $p - 1$ paramètres, car on peut, comme nous l'avons remarqué ailleurs, faire $C_1 = 1$ sans modifier ces courbes. Toutes les courbes ainsi obtenues sont situées sur les multiplicités à p dimensions représentées par les équations (91).

Cas C. — Supposons enfin que l'hypothèse (b) ne soit plus vérifiée. Nous ferons, comme au n° 9, le changement de variables

$$(92) \quad t = \log u^r, \quad y_i = u^{r_i} u_i \quad (r_i = 2n - i).$$

Les équations (83) deviennent

$$(93) \quad \frac{du_i}{dt} = \mu_i u_i + B_i(u, u_1, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

les B_i sont des séries ne contenant ni termes constants, ni termes du premier degré, et l'on a

$$u^{r_i} B_i(u, u_1, \dots, u_n) = \Lambda_i(y_1, \dots, y_n),$$

$$\mu_i = \lambda_i - \frac{r_i}{r}.$$

On peut donc supposer r assez grand pour que les nombres $\mu_1, \dots, \mu_p$ aient leurs parties réelles positives. Les parties réelles des nombres $\mu_{p+1}, \dots, \mu_n$ sont évidemment négatives. La condition (b) étant vérifiée pour les équations (93) auxquelles nous adjoignons l'équation

$$\frac{du}{dt} = \frac{u}{r},$$

les résultats obtenus dans le cas B nous montrent que nous avons des solutions de ce système, pour lesquelles $u_1, u_2, \dots, u_n$ seront développables en séries procédant suivant les puissances de $e^{\frac{t}{r}}$, $C_1 e^{\mu_1 t}, \dots, C_p e^{\mu_p t}$; les coefficients de ces développements peuvent être des polynômes en t . Il résulte alors immédiatement des formules (92) que $y_1, y_2, \dots, y_n$ seront exprimés par des développements de même forme dépendant des p constantes arbitraires $C_1, \dots, C_p$.

Montrons que, pour les solutions ainsi obtenues, nous avons entre les y des relations analogues aux relations (91).

Pour démontrer l'existence, pour les équations (93), des solutions considérées nous introduisons, conformément à ce que nous avons fait dans le cas B, de nouvelles variables $u'_{p+1}, \dots, u'_n$ définies par

$$(94) \quad u'_k = u_k - F_k(u, u_1, \dots, u_p),$$

et nous considérons toutes les solutions pour lesquelles on a

$$u'_{p+1} = u'_{p+2} = \dots = u'_n = 0.$$

Les fonctions F_k sont des séries entières vérifiant les $n - p$ équations

$$(95) \quad \frac{u}{r} \frac{\partial F_k}{\partial u} + \sum_{j=1}^p [\lambda_j u_j + B_j(u, u_1, \dots, u_p, F_{p+1}, \dots, F_n)] \frac{\partial F_k}{\partial u_j} - \lambda_k F_k = B_k(u, u_1, \dots, u_p, F_{p+1}, \dots, F_n).$$

Les raisonnements que nous avons faits pour l'équation (54) s'appliquent sans modifications aux équations (95) et nous montrent qu'on a

$$u^r F_k(u, u_1, \dots, u_p) = F_k(1, y_1, \dots, y_p) \equiv f_k(y_1, \dots, y_p),$$

identité définissant la série entière f_k . On a donc, d'après (94),

$$(94') \quad u^r u'_k = y_k - f_k(y_1, \dots, y_p) \quad (k = p+1, \dots, n);$$

$u'_{p+1}, u'_{p+2}, \dots, u'_n$ étant nuls pour toutes les solutions considérées, nous aurons, pour toutes ces solutions, les relations (91)

$$(96) \quad y_k = f_k(y_1, \dots, y_p) \quad (k = p+1, \dots, n).$$

Remarque I. — Le coefficient b_{p+1} du terme $b_{p+1} y_p$ de A_{p+1} est nul, car on a toujours $\lambda_{p+1} \neq \lambda_p$. Il en résulte que $f_k(y_1, \dots, y_p)$ ne contient pas de termes du premier degré. Dans le cas B, nous voyons en effet que les expressions $\Lambda_k(y_1, y_2, \dots, y_p, 0, \dots, 0)$ ne contiennent pas de termes du premier degré. Il en sera de même pour f_k , puisque les termes de moindre degré de f_k sont semblables aux termes de moindre degré de $\Lambda_k(y_1, \dots, y_p, 0, \dots, 0)$. Dans le cas C, les expressions $B_k(u, u_1, \dots, u_p, 0_{p+1}, \dots, 0_n)$,

où $k = p + 1, p + 2, \dots, n$, ne contiennent que des termes du second degré au moins par rapport à $u_1, u_2, \dots, u_p$. Il en résulte, en raisonnant comme nous l'avons fait au n° 9, pour la fonction F_j vérifiant l'équation (57), que $F_{p+1}, \dots, F_n$ ne contiennent pas de termes du premier degré en $u_1, u_2, \dots, u_p$. Donc $f_{p+1}, \dots, f_n$ ne contiendront pas de termes du premier degré en $y_1, y_2, \dots, y_p$. On a

$$f_k(y_1, y_2, \dots, y_p) = [y_1, y_2, \dots, y_p]_2.$$

La convergence des séries f_k se déduit de la convergence des séries F_k en raisonnant comme dans la remarque I du n° 9.

Remarque II. — Pour compléter les résultats obtenus, faisons les remarques suivantes :

Le système (83) jouit dans le cas A où la condition (a) est remplie de la propriété suivante : Il existe une solution de ce système pour laquelle on a $y_{p+1} = y_{p+2} = \dots = y_n = 0$, tandis que $y_1, y_2, \dots, y_p$ prennent des valeurs initiales que l'on peut choisir arbitrairement. Réciproquement, si cette propriété est vérifiée, la condition (a) est remplie. En effet, si nous considérons les solutions pour lesquelles on a $y_{p+1} = y_{p+2} = \dots = y_n = 0$, le système (83) devient

$$\begin{aligned} \frac{dy_j}{dt} &= \lambda_j y_j + \Lambda_j(y_1, \dots, y_p, 0, 0) \quad (j = 1, 2, \dots, p), \\ (x) \quad 0 &= \Lambda_k(y_1, \dots, y_p, 0, 0) \quad (k = p + 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Si ces dernières égalités (x) ne sont pas identiquement vérifiées, elles établissent des relations entre les valeurs initiales de $y_1, y_2, y_3, \dots, y_p$. Ces égalités (x) doivent donc se réduire à des identités : la condition (a) est remplie.

2° Si nous posons

$$y'_k = u^{rk} u'_k \quad (k = p + 1, \dots, n),$$

nous avons, d'après (94'),

$$(96') \quad y'_k = y_k - f_k(y_1, \dots, y_p) \quad (k = p + 1, \dots, n).$$

Faisons le changement de variables défini par ces formules (96'),

les équations (83) deviennent

$$(97) \quad \frac{dy_j}{dt} = \lambda_j y_j + C_j(y_1, \dots, y_p, y'_{p+1}, \dots, y'_n) \quad (j = 1, 2, \dots, p),$$

$$(97') \quad \frac{dy'_k}{dt} = \lambda_k y'_k + C_k(y_1, \dots, y_p, y'_{p+1}, \dots, y'_n) \quad (k = p+1, \dots, n),$$

les expressions C_i ont la même forme que les expressions A_i correspondantes, les y'_k jouent le rôle des y_k .

D'après ce que nous avons dit, le système des équations (93) admet une solution pour laquelle les quantités $u'_{p+1}, \dots, u'_n$ définies par (94) sont identiquement nulles, tandis que $u_1, u_2, u_3, \dots, u_p$ prennent des valeurs initiales arbitraires. Puisqu'on a $y'_k = u'^k u'_k$ et que $u = e^{\frac{t}{\tau}}$ ne peut jamais être nul, on voit que, pour que les u'_k soient nuls ($k = p+1, \dots, n$), il faut et il suffit que les y'_k le soient. De plus, d'après les formules $y_j = u^j_j u_j$, on voit qu'en choisissant convenablement les valeurs initiales de $u_1, u_2, \dots, u_p$, on peut donner à $y_1, y_2, \dots, y_n$ des valeurs initiales arbitraires. Le système d'équation (97), (97') admettant une solution pour laquelle on a $y'_{p+1} = y'_{p+2} = \dots = y'_n$, tandis que $y_1, y_2, \dots, y_n$ prennent des valeurs initiales arbitraires, la condition (a) est vérifiée. Nous aurons

$$C_k(y_1, y_2, \dots, y_p, 0, 0) \equiv 0 \quad (k = p+1, \dots, n).$$

3° Nous voyons que, comme dans le cas B, notre méthode revient à faire un changement de variables (96') de manière à être ramené au cas A. Nous en concluons, comme dans B, que les fonctions $f_{p+1}, \dots, f_n$ vérifient les $n - p$ équations (86), mais ici on a

$$\Lambda_i(y_1, \dots, y_p, y_{p+1}, \dots, y_n) = b_i y_{i-1} + [y_1, \dots, y_p, y_{p+1}, \dots, y_n]_2 \\ (i = 1, 2, \dots, n),$$

et les constantes $b_1, b_2, \dots, b_p$ ne sont pas supposées nulles. Nous avons donc démontré que ce système d'équations admet pour solutions des séries entières $f_k(y_1, \dots, y_p)$ ne contenant pas de termes de degré inférieur au second. La démonstration de ce théorème s'étend, au moyen d'un changement linéaire de variables, au cas où les termes du premier degré des expressions Λ_j sont des fonctions linéaires quelconques des seules variables $y_1, y_2, \dots, y_p$.

La convergence des séries f_k qui résulte de la démonstration donnée entraîne, comme cas particuliers, la convergence de toutes les séries employées dans ce travail.

Le théorème que nous avons démontré sur l'existence des solutions de (86) a été établi par Poincaré (*Acta*, t. XIII), dans le cas où tous les b_j sont nuls. Il a été démontré par M. Liapounoff (Mémoire cité, p. 310) dans un cas qui se ramène par un changement linéaire de fonctions au cas que nous avons considéré.

Remarque III. — Nous avons obtenu, dans la remarque II, le résultat suivant : il existe un changement de variables (96') ramenant le système (83) au système (97), (97') pour lequel la condition (a) est vérifiée. Si nous cherchons toutes les solutions du système (97), (97') pour lesquelles on a $y'_{p+1} = \dots = y'_n = 0$. Ce système se réduit à

$$\frac{dy_j}{dt} = \lambda_j y_j + b_j y_{j-1} + [y_1, \dots, y_p]_2.$$

La condition 1° étant vérifiée pour ce système, on peut, au moyen d'un changement de variables

$$(98) \quad y_j = z_j + [z_1, \dots, z_p]_2 \quad (j = 1, 2, \dots, p).$$

le ramener à la forme réduite

$$(99) \quad \frac{dz_j}{dt} = \lambda_j z_j + \varphi_j(z_1, \dots, z_{j-1}) \quad (j = 1, 2, \dots, p),$$

et les formules (96) nous donneront

$$(100) \quad y_k = f_k(y_1, \dots, y_p) = [z_1, \dots, z_p]_2 \quad (k = p+1, \dots, n).$$

Toute solution du système (99) donnera, par l'intermédiaire des formules (98) et (100), une solution du système (83). La solution générale du système (99) nous donnera une famille de solutions (83) s'exprimant au moyen de développements suivant les puissances de $C_1 e^{\lambda_1 t}$, $C_2 e^{\lambda_2 t}$, ..., $C_p e^{\lambda_p t}$. Les coefficients de ces développements peuvent être des polynômes en t . Nous arrivons donc au théorème suivant d'où l'on déduit immédiatement le théorème B (n° 2).

Étant donné le système

$$\frac{dy_j}{dt} = \lambda_i y_i + B_i y_{i-1} + [y_1, \dots, y_n]_2 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

désignons par $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ les divers points λ_i situés d'un même côté d'une droite D passant par l'origine, tandis que tous les autres points λ_i sont situés de l'autre côté de D. On peut toujours exprimer $y_1, y_2, \dots, y_n$ en fonction de p variables $z_1, z_2, \dots, z_p$ par des formules

$$y_j = z_j + [z_1, \dots, z_p]_2 \quad (j = 1, 2, \dots, p).$$

$$y_k = [z_1, \dots, z_p]_2 \quad (k = p+1, \dots, n),$$

de telle façon que si $z_1, z_2, \dots, z_p$ vérifient un certain système d'équations différentielles

$$\frac{dz_j}{dt} = \lambda_j z_j + \varphi_j(z_1, \dots, z_{j-1}) \quad (j = 1, 2, \dots, p),$$

toute solution de ce système fournisse une solution du système donné.

Remarque IV. — Tous les résultats que nous avons obtenus subsisteraient si certains des nombres $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \dots, \lambda_n$ étaient nuls. Il n'y aurait qu'à modifier la démonstration de l'inégalité (88) en désignant par ε la plus petite des parties réelles des nombres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ et $-\lambda_{p+1}, -\lambda_{p+2}, \dots, -\lambda_n$, en ne considérant parmi ces derniers que ceux qui ne sont pas nuls.

Remarque V. — Si aucun des nombres $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n$ n'est nul, nous pouvons faire jouer à ces nombres le rôle joué par les nombres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$. Nous aurons donc une nouvelle famille de solutions dépendant de $n - p$ arbitraires. Si certains des nombres $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n$, par exemple $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \dots, \lambda_{p+s}$, étaient nuls, nous ferions jouer aux nombres $\lambda_{p+s+1}, \dots, \lambda_n$ le rôle joué par $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.

En faisant varier la position de la droite D, sans jamais la faire passer par ceux des points λ_i qui ne sont pas confondus avec l'origine, nous aurons, pour chaque manière de séparer, au moyen de cette droite, les points λ_i en deux groupes, deux familles de solutions dépendant, l'une de p' constantes arbitraires, l'autre de q' et si l'on désigne par s le nombre des λ_i qui sont nuls, on a $p' + q' = n - s$.

V.

13. CAS D'UNE SEULE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE. — Considérons le cas où l'on a $n = 2$, c'est-à-dire l'équation

$$(101) \quad \frac{dx}{\alpha x + \beta y + [x, y]_2} = \frac{dy}{\alpha' x + \beta' y + [x, y]_2}.$$

Nous allons facilement retrouver les résultats connus relatifs à cette équation.

Si les racines λ_1 et λ_2 de l'équation caractéristique

$$(x - \lambda)(\beta' - \lambda) - \beta x' = 0$$

ne sont pas nulles toutes les deux, les résultats précédents s'appliquent.

Pour que la condition 1° soit vérifiée, il faut et il suffit que le rapport $\lambda_1 : \lambda_2$ ne soit ni négatif, ni nul, ni infini. Si cette condition 1° n'est pas vérifiée, les résultats du n° 11 mettent seulement en évidence l'existence bien connue de deux solutions holomorphes, si λ_1, λ_2 est négatif, et d'une seule solution, si λ_1 ou λ_2 sont nuls.

Supposons que la condition 1° soit vérifiée. La condition 2° est sûrement vérifiée si l'on a $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Il existe un changement de variable, tel que, si $\bar{x}$ et $\bar{y}$ étant les nouvelles variables, l'équation (101) se mette, si la condition 2° est vérifiée, sous la forme

$$(102) \quad \frac{d\bar{x}}{\bar{x} + [\bar{x}, \bar{y}]_2} = \frac{d\bar{y}}{\lambda \bar{y} + [\bar{x}, \bar{y}]_2},$$

et, si la condition 2° n'est pas vérifiée, sous la forme

$$(103) \quad \frac{d\bar{x}}{\bar{x} + [\bar{x}, \bar{y}]_2} = \frac{d\bar{y}}{\bar{y} + a\bar{x} + [\bar{x}, \bar{y}]_2}.$$

Pour que la condition 3° ne soit pas vérifiée, il faut qu'on ait, soit $\lambda = m$, soit $1 = m\lambda$, le nombre m étant un entier. Le premier cas seul peut se présenter si l'on suppose, comme on peut toujours le faire, qu'on a $\lambda_1 : \lambda_2 > 1$, lorsque ce rapport est réel.

Il résulte alors de ce que nous avons vu que si λ n'est pas un

entier, les équations (102) se ramènent, par un changement de variables

$$(104) \quad \bar{x} = x_1 + [x_1, y_1]_2, \quad \bar{y} = y_1 + [x_1, y_1]_2,$$

à la forme

$$(105) \quad \frac{dx_1}{x_1} = \frac{dy_1}{\lambda y_1}.$$

Si λ est un entier ($\lambda = m$), un changement (104) donne les équations

$$(106) \quad \frac{dx_1}{x_1} = \frac{dy_1}{m y_1 + a x_1^m},$$

a étant une constante. C'est encore cette même forme (106) avec $m = 1$ qu'on obtient si la condition 2^e n'est pas vérifiée. Nous supposons que dans (106) a n'est pas nul; en effet, si a est nul, on est dans le cas de l'équation (105).

Les solutions générales (105 et (106) sont données respectivement par

$$(107) \quad y_1 = C x_1^\lambda, \quad y_1 = C x_1^m + a x_1^m \log x_1.$$

On voit que l'équation (106) n'admet pas de solution $y = [x]_1$, en désignant par cette notation une solution holomorphe et nulle pour $x_1 = 0$. Il en résulte que l'équation correspondante (102) ou (103) n'admet pas non plus de solution $\bar{y} = [\bar{x}]_1$, car une pareille solution entraînerait, d'après les formules (104), l'existence d'une solution $y_1 = [x]_1$. Au contraire, l'équation (105) admet toujours la solution holomorphe $y_1 = 0$ et en admet une infinité d'autres si λ est un entier. Donc, lorsqu'on pourra ramener à la forme réduite (105) l'équation (102) ou (103), cette équation admettra au moins une solution $\bar{y} = [\bar{x}]_1$.

Si λ n'est pas un entier, on obtient toujours la forme réduite (105).

Si λ est un entier, on peut obtenir, soit la forme réduite (105), soit la forme réduite (106). Il résulte de ce qui précède que, pour savoir dans lequel de ces deux cas on se trouve, il n'est pas nécessaire d'effectuer le changement de variable (104). On met, suivant qu'on a $\lambda > 1$ ou $\lambda = 1$, l'équation (101) sous la forme (102) ou (103). Il suffit alors de chercher si cette dernière équation admet

une solution $\bar{y} = [\bar{x}]_1$. Si l'on a $\lambda > 1$, il ne peut se présenter d'impossibilité dans la recherche des coefficients du développement $[\bar{x}]_1$ que dans la détermination du terme en $\bar{x}^m$. Si l'on a $\lambda = 1$ et par suite l'équation (103), il ne peut se présenter d'impossibilité que si l'on a dans cette équation $a \neq 0$. Dans les deux cas, on sait que les séries obtenus sont convergentes.

Si nous remarquons que, d'après les formules (104), on a, en désignant par P et Q des fonctions de la forme $[x, y]_1$

$$x_1 = P(x, y), \quad y_1 = Q(x, y),$$

on voit, d'après (107), que nous pouvons énoncer le théorème suivant :

L'intégrale générale de l'équation (101) se met, ou bien sous la forme

$$QP^{-\lambda} = \text{const.},$$

puisque dans (106) on peut supposer $a = 1$, ou bien sous la forme

$$QP^{-m} - \log P = \text{const.}$$

Elle ne se met sous cette seconde forme que dans les deux cas suivants :

1° *Le rapport des racines λ_1 et λ_2 de l'équation caractéristique étant égal à 1, l'équation (101) se ramène par un changement linéaire de variable à la forme (103) avec $a \neq 0$.*

2° *Le rapport des racines λ_1 et λ_2 étant un entier m et l'équation étant ramenée à la forme (102) avec $\lambda = m$, il est impossible de déterminer le terme de degré m d'un développement $\bar{y} = [\bar{x}]_1$ vérifiant l'équation (102).*

14. CAS DE DEUX ÉQUATIONS. — 1. Considérons le cas de deux équations à trois variables

$$(108) \quad \frac{dx}{X(x, y, z)} = \frac{dy}{Y(x, y, z)} = \frac{dz}{Z(x, y, z)},$$

où X, Y, Z contiennent des termes du premier degré. Nous n'examinerons que le cas où la condition 1° est vérifiée, ce qui revient à dire que les affixes des trois racines $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de l'équation caractéristique sont les sommets d'un triangle à l'intérieur duquel

ne se trouve pas l'origine. Nous allons rechercher quelles sont les formes réduites les plus simples possibles auxquelles on peut ramener le système (108), lorsque les conditions 2° ou 3° ne sont pas vérifiées.

Si nous supposons tout d'abord la condition 2° vérifiée, un changement linéaire de variables permet de supposer que les termes du premier degré de X, Y, Z se réduisent respectivement à $\lambda_1 x, \lambda_2 y, \lambda_3 z$. Pour trouver les polynômes φ qui figurent dans les formes réduites, nous avons à chercher toutes les façons possibles dont une quelconque des quantités $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ peut s'exprimer au moyen d'une combinaison linéaire des deux autres.

Considérons tout d'abord le cas où une seule des racines $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ figure dans une de ces combinaisons. Nous pouvons supposer qu'on a $\lambda_2 = m\lambda_1$. Deux cas se présentent alors : 1° λ_3 n'est pas égal à une combinaison de λ_1 et λ_2 ; 2° λ_3 est égal à une combinaison de λ_1 et λ_2 : on a $\lambda_3 = p\lambda_1 + q\lambda_2$. Dans les deux cas nous pourrions, en remplaçant t par t : λ_1 , prendre $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = m$.

Dans le cas 1°, un changement de variable du genre de ceux employés ramène, en supprimant l'indice de λ_3 , le système à la forme réduite

$$(109) \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{my + ax^m} = \frac{dz}{\lambda z} = dt,$$

dont l'intégrale générale est donnée par

$$z = Cx^\lambda, \quad y = Bx^m + ax^m \log x.$$

Dans le cas 2°, nous avons une combinaison telle qu'on ait $\lambda_3 = p + qm$ et il peut y avoir d'autres combinaisons telles qu'on ait $\lambda_3 = p' + q'm$. Il suffit pour cela qu'on ait

$$\begin{aligned} p' + q'm &= p + qm, & p' - p &= m(q - q'), \\ q' &= q - r, & p' &= p + rm. \end{aligned}$$

Nous pouvons supposer qu'on a $q' \leq q$, puisque rien ne distingue les uns des autres les couples de nombres $p, q; p', q'$. Le nombre r sera donc un entier positif, au plus égal à q . Il faut de plus qu'on ait

$$p \leq m.$$

S'il n'en était pas ainsi, nous pourrions, en faisant $r = -1$, prendre $q' = q + 1$ et $p' = p - m$, ces valeurs de q' et p' étant positives seraient acceptables et l'on n'aurait pas $q' \leq q$. Nous avons donc, par un changement de variables, la forme réduite

$$(110) \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{my + ax^m} = \frac{dz}{(p + qm)z + \sum_{r=0}^q b_r x^{p+rm} y^{q-r}} = dt.$$

Pour obtenir l'intégrale générale, conformément à ce que nous avons fait au n° 6, nous prenons

$$(111) \quad x = e^t, \quad y = B e^{mt} + a t e^{mt}.$$

En remplaçant dans la troisième équation x, y par ces expressions, nous aurions z . Si nous voulons obtenir les intégrales de M. Lindelöf, nous avons d'abord, d'après (111),

$$(112) \quad \frac{y}{x^m} - a \log x = B.$$

Nous devons ensuite, d'après la remarque II, n° 8, supposer $B = 0$ dans les relations (111), qui donnent

$$(113) \quad x = e^t, \quad y = a t e^{mt},$$

intégrer dans cette hypothèse l'équation en $\frac{dz}{dt}$ et enfin porter dans l'intégrale générale ainsi obtenue les valeurs de e^t et de t tirées des relations (111). Nous avons ainsi

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= (p + qm)z - e^{(p+qm)t} \sum_{r=0}^q b_r (at)^{q-r}, \\ z &= C e^{(p+qm)t} + \frac{t}{a} e^{(p+qm)t} \sum_{r=0}^q \frac{b_r}{q-r+1} (at)^{q-r}, \\ z &= C x^{p+qm} + \frac{y x^{p+qm}}{a^2 x^m} \sum_{r=0}^q \frac{b_r}{q-r+1} \left(\frac{y}{x^m} \right)^{q-r}, \\ (114) \quad z &- \frac{1}{a^2} \sum_{r=1}^q \frac{b_r}{q-r+1} x^{p+m(r-1)} y^{q-r+1} = C x^{p+qm} + \frac{b_0 y}{(q+1)a^2 x^{m-p}}. \end{aligned}$$

Si nous prenons le premier membre de (114) pour nouvelle

variable z , la première intégrale (112) ne sera pas changée et l'intégrale (114) nous donne

$$\frac{z}{x^{p+qm}} - \frac{b_0 y}{(q+1)a^2 x^{(q+1)m}} = C,$$

qui est l'intégrale de M. Lindelöf relative à un système (110) où $b_1, b_2, \dots, b_q$ seraient nuls. En supprimant l'indice de b_0 , on voit donc que le système (108) est ramené à la forme réduite simple

$$(115) \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{my + ax^m} = \frac{dz}{(p+qm)z + bx^p y^q} = dt, \quad p \leq m.$$

Si a et b ne sont pas nuls, on peut les supposer égaux à 1, en changeant y en ay et z en bz .

II. Considérons le cas où il n'y a entre les racines $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ aucune relation de la forme $\lambda_2 = m\lambda_1$, mais où une combinaison de deux des racines est égale à la troisième racine

$$(116) \quad \lambda_3 = p\lambda_2 + q\lambda_1.$$

Nous pouvons distinguer deux cas, suivant que cette égalité a lieu pour un seul couple de valeurs de p et de q , ou bien a lieu pour différentes valeurs de p et q .

1° Dans le premier cas, nous pouvons faire $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda$ et nous avons la forme réduite

$$(117) \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{\lambda y} = \frac{dz}{(p+q\lambda)z + ax^p y^q} = dt,$$

dont l'intégration est immédiate.

2° Dans le second cas, nous devons avoir, en dehors de l'égalité (116), une ou plusieurs égalités $\lambda_3 = p'\lambda_1 + q'\lambda_2$, d'où

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{p' - p}{q - q'} = \frac{\beta}{\alpha},$$

$\alpha : \beta$ étant une fraction irréductible. Nous pouvons prendre

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha, & \lambda_2 &= \beta, & p' - p &= r\beta, & q - q' &= r\alpha, \\ & & p &= p + r\beta, & q' &= q - r\alpha. \end{aligned}$$

Nous pouvons, comme tout à l'heure, supposer qu'on a $q' \leq q$, ce qui exige que l'entier r ne prenne que des valeurs positives.

Il faut de plus, pour que q' soit positif, que l'on ait $r < q : \alpha$.

Si s est le plus grand entier tel que l'on ait $s \leq q : \alpha$, nous aurons $r \leq s$.

Enfin, il faut qu'on ait $p < \beta$, car si cette condition n'était pas vérifiée, on aurait, en prenant $r = 1$, un couple de valeurs positives $p' = p - \beta$, $q' = q + \alpha$ qui seraient acceptables, tandis que r doit être positif d'après nos hypothèses. Nous avons la forme réduite

$$(118) \quad \frac{dx}{\alpha x} = \frac{dy}{\beta y} = \frac{dz}{(p\alpha + q\beta)z + \sum_{r=0}^s b_r x^{p+r\beta} y^{q-r\alpha}} = dt,$$

d'où

$$x = e^{\alpha t}, \quad y = B e^{\beta t}, \quad z = e^{(p\alpha + q\beta)t} \left(C + t \sum_{r=0}^s b_r B^{q-r\alpha} \right),$$

$$z = C p y^q + \frac{\log x}{\alpha} \sum_{r=0}^s b_r x^{p+r\beta} y^{q+r\alpha}.$$

III. Passons au cas où l'équation caractéristique a une racine double. Trois cas peuvent se présenter :

1° Aucune des deux racines distinctes n'est égale à une combinaison formée avec l'autre racine. Nous pouvons prendre

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = \lambda,$$

et nous avons la forme réduite

$$(119) \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y + ax} = \frac{dz}{\lambda z} = dt,$$

où l'on peut supposer $a = 1$.

2° La racine double est égale à une combinaison de la racine simple. Nous pouvons prendre

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = m, \quad m \text{ entier positif,}$$

et nous avons la forme réduite

$$(120) \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{my + ax^m} = \frac{dz}{mz + by + cx^m} = dt.$$

On a ensuite, conformément au n° 6,

$$(121) \quad x = e^t, \quad y = B e^{mt} + at e^{mt}, \quad y = B x^m + a x^m \log x.$$

Pour obtenir l'intégrale de M. Lindelöf, faisons $B = 0$, nous avons

$$(122) \quad \begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= m z + abt e^{mt} + c e^{mt}, \\ z &= C e^{mt} + e^{mt} \left(\frac{abt^2}{2} + ct \right), \\ z &= C x^m + x^m \left(\frac{b y^2}{2 a x^{2m}} + \frac{c y}{a x^m} \right), \\ z - \frac{c y}{a} &= C x^m + \frac{b y^2}{2 a x^m}. \end{aligned}$$

Si nous prenons pour nouvelle variable z l'expression $z - \frac{c y}{a}$, la première intégrale (121) ne sera pas changée et (122) nous donne

$$\frac{z}{x^m} - \frac{b y^2}{2 a x^m} = C,$$

qui est l'intégrale (122) relative à un cas où l'on a $c = 0$. Le système (120) est donc ramené à la forme réduite plus simple

$$(123) \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{m y + a x^m} = \frac{dz}{m z + b y} = dt,$$

ou l'on peut supposer $a = 1$ et $b = 1$ si ces constantes ne sont pas nulles.

3° La racine simple est égale à une combinaison formée avec la racine double. Nous pouvons prendre

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = m, \quad m \text{ entier},$$

et nous avons la forme réduite

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y + a x} = \frac{dz}{m z + \sum_{r=0}^m b_r x^{m-r} y^r} = dt.$$

d'où

$$x = e^t, \quad y = B e^t + at e^t, \quad y = B x + a x \log x.$$

Pour calculer l'intégrale de M. Lindelöf, faisons $B = 0$, nous

avons successivement :

$$\begin{aligned}
 \frac{dz}{dt} &= mz + e^{mt} \sum_{r=0}^m b_r (at)^r, \\
 z &= C e^{mt} + \frac{t e^{mt}}{a} \sum_{r=0}^m \frac{b_r}{r+1} (at)^r, \\
 z &= C x^m + \frac{y x^{m-1}}{a} \sum_{r=0}^m \frac{b_r}{r+1} \left(\frac{y}{x}\right)^r, \\
 (124) \quad z - \frac{1}{a} \sum_{r=0}^{m-1} \frac{b_r}{r+1} x^{m-1-r} y^{r+1} &= C x^m + \frac{b_m y^{m+1}}{(m+1)x}.
 \end{aligned}$$

Si nous prenons comme nouvelle variable z le polynome qui est dans le premier membre de cette égalité (124), nous aurons

$$\frac{z}{x^m} = \frac{b_m y^{m+1}}{(m+1)x^{m+1}}$$

qui est l'intégrale de M. Lindelöf relative au cas où l'on a

$$b_0 = b_1 = \dots = b_{m-1} = 0.$$

Si nous faisons ce changement de variable et si nous supprimons l'indice de b_m , nous avons la nouvelle forme réduite

$$(125) \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y + ax} = \frac{dz}{mz + by^m}.$$

IV. Supposons que l'équation caractéristique ait une racine triple $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Nous avons, en utilisant la remarque IV, n° 9, la forme réduite

$$(126) \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y + ax} = \frac{dz}{z + by} = dt,$$

d'où

$$x = e^t, \quad y = B e^t + a t e^t,$$

et en faisant ensuite $B = 0$ pour obtenir l'intégrale de M. Lindelöf

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dt} &= z + a b t e^t, \\
 z &= C e^t + \frac{a b t^2}{2} e^t, \quad \frac{z}{x} = \frac{b y^2}{2 a x^2} = C.
 \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi 8 systèmes : (109), (115), (117), (118), (119), (123), (125), (126), que nous appellerons *formes réduites exceptionnelles*. Si nous ajoutons à ces 8 formes réduites le système

$$(127) \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{\lambda y} = \frac{dz}{\mu z} = dt,$$

que nous appellerons *forme réduite normale* et qui convient au cas général où les conditions 2° et 3° sont vérifiées, ainsi qu'aux cas particuliers où les constantes a et b figurant dans les *formes réduites exceptionnelles* sont toutes nulles, nous aurons le tableau complet des formes réduites, dans le cas où la condition 1° est vérifiée.

Remarque. — Pour traiter les questions qu'on peut étudier à l'aide des formes réduites, il est utile d'éviter d'examiner le même cas avec 2 formes réduites différentes. Pour éviter ces doubles emplois, il est nécessaire de préciser les valeurs que peuvent prendre les constantes a, b, p, q, λ qui figurent dans ces équations. C'est ce que nous allons faire, en exprimant que pour chacune des formes réduites nous n'avons pas d'autres relations entre les racines $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ que les relations que nous avons envisagées et spécifiées dans l'établissement de chacune de ces formes réduites.

Tout d'abord, nous supposerons que les constantes $a, b, b_0, b_1, \dots, b_s$ qui figurent dans les équations d'une même forme réduite ne sont pas toutes nulles simultanément, car, s'il en était ainsi, on serait dans le cas de la forme réduite (127); un certain nombre de ces constantes pourront être nulles.

Les entiers m, α, β ne pourront pas être nuls. Sauf avis contraire, p et q pourront prendre des valeurs entières positives quelconques ou être nuls. Passons maintenant en revue les divers systèmes réduits.

Système (109). — λ ne devra pas être égal à une fraction de la forme $(m - p) : q$, car nous aurions $m = p + q\lambda$, c'est-à-dire entre les racines $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, la relation $\lambda_2 = p\lambda_1 + q\lambda_3$, relation que nous avons supposée ne pas exister dans le cas I, 1°. En particulier, λ n'est ni un entier, ni l'inverse d'un entier.

Système (115). — Nous avons dit qu'on doit avoir $p < m$ et que a et b ne sont pas nuls simultanément.

Système (117). — Rien ne s'opposerait, dans ce cas II, 1°, à ce qu'on prenne, dans certains cas, $\lambda = \beta : \alpha$, α et β étant des entiers, mais nous tomberions alors dans un cas que le système (118) permet de considérer en faisant $s = 0$. Nous supposons donc que λ n'est pas un nombre rationnel. De plus, nous supposons $q \neq 0$, car, pour $q = 0$ on retombe dans un cas que le système (109) permet de considérer.

Système (118). — Nous avons $p < \beta$ et $q - s\alpha \geq 0$. Nous supposons, de plus, qu'aucun des entiers α et β n'est égal à 1, afin de ne pas retomber dans un cas que le système (115) permet de considérer.

Système (119). — Nous supposons que λ n'est ni un entier, ni l'inverse d'un entier, afin de ne pas être dans l'un des cas que les équations (123) ou (125) permettent de considérer, mais λ peut être rationnel.

15. *Recherche des solutions algébroides.* — Parmi les questions pour l'étude desquelles il y a avantage à employer les formes réduites trouvées, je signalerai la recherche, pour le système primitif (108) des solutions holomorphes ou algébroides pour lesquelles x , y et z s'annulent simultanément.

Étant donné le système (108), je dirai qu'on a une *solution algébroïde passant par l'origine* lorsqu'on a des fonctions x , y , z qui peuvent s'exprimer au moyen de séries entières par rapport à un paramètre θ , les fonctions ainsi obtenues vérifiant les équations (108) et s'annulant pour $\theta = 0$.

Je dirai qu'on a une *solution holomorphe et nulle pour $x = 0$* , si l'on a des fractions y et z de la variable x , holomorphes et nulles pour $x = 0$ et vérifiant le système.

Nous pouvons considérer de même des solutions holomorphes et nulles pour $y = 0$ ou pour $z = 0$.

Une solution passant par l'origine sera dite *tangente à Ox* , si, lorsque x tend vers 0, $y : x$ et $z : x$ tendent vers 0.

Étant donné le système primitif (108), pour le ramener à l'un

des systèmes réduits considérés, nous avons employé un système intermédiaire

$$(128) \quad \frac{dx}{\lambda_1 x + [x, y, z]_2} = \frac{dy}{\lambda_2 y + a_1 x + [x, y, z]_2} = \frac{dz}{\lambda_3 z + a_2 y + [x, y, z]_2},$$

où l'on a $a_1 = 0$, si l'on a $\lambda_2 \neq \lambda_1$, et $a_2 = 0$, si l'on a $\lambda_3 \neq \lambda_2$.

D'après la nature des changements de variables employés pour passer d'un système à l'autre, il est évident que toute *solution algébroïde passant par l'origine* de l'un des systèmes fournira une solution de même espèce pour les deux autres systèmes.

De plus, toute *solution holomorphe et nulle pour $x = 0$* d'un système réduit fournit une *solution holomorphe et nulle* du système intermédiaire et réciproquement. En effet, si nous désignons par $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ les variables de l'un des systèmes et par x, y, z celles de l'autre, nous avons

$$(129) \quad \bar{x} = x + [x, y, z]_2, \quad \bar{y} = y + [x, y, z]_2, \quad \bar{z} = z + [x, y, z]_2.$$

Si y et z sont remplacés par les fonctions de x correspondant à une *solution holomorphe et nulle* pour $x = 0$, nous pourrions de la première équation (129) tirer x en fonction holomorphe de $\bar{x}$, et en portant cette expression de x dans les deux dernières équations (129), $\bar{y}$ et $\bar{z}$ sont exprimés en fonction holomorphe de x .

Ces mêmes formules (129) montrent qu'à une solution passant par l'origine, tangente à Ox et vérifiant le système intermédiaire (128) correspond une solution de même espèce du système réduit et réciproquement.

De ces remarques il résulte que, pour étudier les solutions holomorphes ou algébroïdes du système primitif (108) ou du système (128), il nous suffira d'étudier les solutions holomorphes ou algébroïdes du système réduit correspondant. Cette étude ne présente aucune difficulté, elle demande cependant une attention assez minutieuse, pour ne laisser échapper aucun des cas qui peuvent se présenter, suivant les valeurs attribuées aux constantes, qui figurent dans les équations et aux constantes arbitraires qui s'introduisent par l'intégration. Pour donner un exemple des circonstances qui peuvent se présenter, considérons le sys-

tème (118)

$$\frac{dx}{\alpha x} = \frac{dy}{\beta y} = \frac{dz}{(p\alpha + q\beta)z + \sum_{r=0}^s b_r x^{p+r\beta} y^{q-r\alpha}}.$$

Nous avons

$$x = A e^{\alpha t}, \quad y = B e^{\beta t}, \quad z = e^{(p\alpha + q\beta)t} \left(C + t \sum_{r=0}^s b_r A^{p+r\beta} B^{q-r\alpha} \right).$$

Supposons d'abord qu'on prenne $A \neq 0$; nous pouvons faire $A = 1$ et prendre comme paramètre $\theta = e^t$. Nous n'aurons de solution algébroïde passant par l'origine que si l'on a

$$(130) \quad \sum_{r=0}^s b_r B^{q-r\alpha} = 0;$$

nous aurons alors

$$x = \theta^\alpha, \quad y = B \theta^\beta, \quad z = C \theta^{p\alpha + q\beta}.$$

A chaque racine B de l'équation (130), y compris la racine $B = 0$ qui existe si l'on a $q - s\alpha \neq 0$, correspond une famille de solutions algébroïdes dépendant d'un paramètre arbitraire C . Nous n'avons de solution holomorphe et nulle pour $x = 0$ que si l'on a $B = 0$, $C = 0$.

Supposons qu'on prenne $A = 0$. Nous avons les deux cas suivants :

1° p n'est pas nul, ou bien p étant nul b_0 est aussi nul. Nous avons

$$x = 0, \quad y = B e^{\beta t}, \quad z = C e^{(p\alpha + q\beta)t}.$$

En faisant $B = 0$ nous avons la solution $x = 0$, $y = 0$ holomorphe et nulle pour $z = 0$.

Si B n'est pas nul, nous pouvons faire $B = 1$ et nous aurons une famille de solutions algébroïdes dépendant d'un paramètre C . On n'obtient dans cette famille une solution holomorphe qu'en faisant $C = 0$ qui fournit $x = 0$, $z = 0$ solution holomorphe et nulle pour $y = 0$;

2° p est nul et b_0 n'est pas nul. Nous avons

$$x = 0, \quad y = B e^{\beta t}, \quad z = e^{(p\alpha + q\beta)t} (C + b_0 t B q).$$

En faisant $B=0$ nous avons, comme dans 1°, la solution $x=0$, $y=0$ qui est holomorphe et nulle pour $z=0$. Dans tous les autres cas, nous n'obtenons jamais de solution algébroïde passant par l'origine.

16. *Détermination de la forme réduite correspondant à un système donné.* — Étant donné un système (108), la résolution de l'équation caractéristique permet de reconnaître si les conditions 1°, 2° et 3° sont vérifiées. S'il en est ainsi, la forme réduite correspondant au système (108) sera la forme normale (127). Si la condition 1° est vérifiée, sans que les conditions 2° et 3° le soient, la connaissance des diverses manières dont une des racines peut s'exprimer au moyen d'une combinaison des deux autres permet de reconnaître quelle est la forme réduite exceptionnelle qui correspond au système donné, mais cette connaissance ne permet pas de décider si les constantes a et b qui figurent dans la forme réduite considérée ne sont pas toutes nulles et si, par conséquent, on n'a pas affaire en réalité à la forme réduite normale (127).

Pour distinguer si oui ou non la forme réduite correspondant au système (108) est la forme normale, il sera presque toujours utile, pour la commodité des calculs, de ramener le système (108) à la forme intermédiaire (128), mais il ne sera pas nécessaire ensuite de chercher le changement de variable permettant de passer à la forme réduite, ni même de faire les calculs de ce changement de variables avec un nombre fini de termes figurant dans les séries employées.

Assez souvent, en comparant les résultats obtenus pour la forme réduite dans l'étude des solutions holomorphes pour $x=0$, ou $y=0$, ou $z=0$, avec les résultats obtenus par la recherche directe sur le système intermédiaire (128) des solutions holomorphes on pourra décider si cette forme réduite convient, ou si l'on retombe dans la forme réduite normale. Par exemple, si les trois racines de l'équation caractéristique sont proportionnelles aux nombres 1, m et λ , m étant un entier et λ un nombre irrationnel, nous ne pouvons être que dans le cas de la forme réduite (109) ou dans celui de la forme réduite normale. La forme réduite (109) n'admet pas de solution holomorphe et nulle pour $x=0$. Donc, si l'on trouve pour le système (128) une solution holomorphe et

nulle pour $x = 0$, on a $a \neq 0$ et l'on retombe dans le cas de la forme réduite normale.

Dans le même ordre d'idées, si l'étude des solutions holomorphes ne suffit pas, on peut avoir recours à l'étude des solutions algébroides.

Si ces procédés ne suffisent pas, ou présentent des complications, on pourra avoir recours aux développements de x, y, z en séries procédant suivant les puissances de constantes arbitraires. Nous avons appris à former ces développements (remarque du n° 7). Si l'on a affaire à la forme réduite normale (127) on voit que ces développements ne contiennent que des puissances des quantités $Ae^t, Be^{\lambda t}, Ce^{\mu t}$, tandis que, si l'on a affaire à une forme réduite exceptionnelle, les coefficients des séries considérées contiennent, en dehors des exponentielles, des puissances entières de t . On vérifie en effet sans peine que, pour toutes les formes réduites, les expressions de x, y ou z contiennent des puissances de t en dehors des exponentielles. Si nous désignons par $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ les variables du système intermédiaire (128) nous avons les relations (129)

Si nous remplaçons x, y, z par leurs expressions, nous avons les développements dont nous parlons. Nous verrons dans un instant, d'après l'étude d'un cas particulier, qu'il est impossible que les puissances entières de t disparaissent dans ces développements. Donc, si, en cherchant directement sur le système (128) ces développements, on ne trouve pas de terme en t , la forme réduite normale conviendra. Précisons la méthode par un exemple.

Supposons que les racines de l'équation caractéristique soient proportionnelles à $1, m, p + qm, m, p, q$ étant des entiers positifs. La forme réduite correspondante sera

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{my + ax^m} = \frac{dz}{(p + qm)z + bx^p y^q} = dt.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} x &= Ae^t, & y &= e^{mt}(B + aA^m t), \\ z &= e^{(p+qm)t} \left[C + \frac{b(B + aA^m t)^{q+1} - bB^{q+1}}{(q+1)aA^{m-p}} \right]. \end{aligned}$$

Nous nous sommes arrangés de telle manière que, toutes réduc-

tions faites, les expressions de x, y, z soient des polynomes par rapport aux constantes.

Si a n'est pas nul et si l'on a $m \geq p + q$, l'expression de y contient le terme $aA^m t e^{mt}$ qui est, parmi les termes de y et de z où figurent t , le terme de degré minimum par rapport à A et B . Ce terme ne se réduira donc avec aucun autre dans le développement de $\bar{y}$, puisqu'il sera seul de son espèce. Si a est nul, ou si l'on a $m \geq p + q$, nous remarquerons que l'expression de z contient le terme $\frac{bA^p B^q t e^{(pq+m)t}}{q+1}$, ce terme ne disparaît pas dans le développement de $\bar{z}$, puisque tous les autres termes de y et de z qui contiennent t sont, par rapport à A et B , de degré supérieur à ce terme. Si nous cherchons, pour le système (128), les développements de $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ suivant les puissances des A, B, C , nous pourrions, après avoir trouvé les termes de degré égal au plus grand des deux nombres m et $p + q$, décider si la forme réduite normale convient, ou s'il faut se servir de la forme réduite exceptionnelle (115). Nous pouvons, pour abrégier les calculs, supposer $C = 0$ dans les développements que nous cherchons. Nous pourrions même, si nous voulions seulement voir si a est nul ou non, supposer $B = 0, C = 0$.

SUR LES ÉQUATIONS A QUATRE VARIABLES D'ORDRE NOMOGRAPHIQUE SUPÉRIEUR,

PAR M. FARID BOULAD.

On sait que, pour représenter une équation $F_{1234} = 0$ à quatre variables z_1, z_2, z_3, z_4 par un nomogramme à double alignement, il faut, en premier lieu, résoudre le problème analytique suivant posé, par M. d'Ocagne, sous le nom de *la disjonction des variables*, dans son *Traité de Nomographie*, page 213 et dans son *Cours de Calcul graphique et Nomographie*, page 305.

Les éléments F_i, G_i, H_i désignant des fonctions réelles d'une

seule variable z_i , former les deux déterminants

$$(1) \quad \begin{vmatrix} F_1 & G_1 & H_1 \\ F_2 & G_2 & H_2 \\ F_0 & G_0 & H_0 \end{vmatrix} = 0, \quad (2) \quad \begin{vmatrix} F_0 & G_0 & H_0 \\ F_3 & G_3 & H_3 \\ F_4 & G_4 & H_4 \end{vmatrix} = 0,$$

tels que l'équation proposée $F_{1234} = 0$ résulte de l'élimination de la variable auxiliaire z_0 entre ces deux déterminants.

A notre connaissance, ce problème assez difficile n'a reçu, jusqu'à ce jour, aucune solution entièrement générale.

Toutefois, nous croyons qu'il est possible de parvenir à le résoudre dans le cas pratiquement fréquent où l'équation ci-dessus se présente sous la forme suivante :

$$(3) \quad F_{1234} \equiv F_1 F_{234} + G_1 G_{234} + H_1 H_{234} = 0,$$

au plus d'ordre nomographique 2 par rapport à une même variable, d'après M. Soreau, et d'ordre quelconque par rapport à chacune des trois autres variables z_2 , z_3 et z_4 .

En effet, en étendant à ce cas particulier la notion fondamentale des valeurs critiques de M. d'Ocagne, que nous avons appliquée récemment à la disjonction des variables de l'équation suivante :

$$F_{123} = F_1 F_{23} + G_1 G_{23} + H_1 H_{23} = 0,$$

en vue de sa représentation par un nomogramme à simple alignement ⁽¹⁾, nous avons été conduit à une méthode permettant, d'effectuer la disjonction des variables de l'équation (3), en résolvant des identités fonctionnelles au moyen de la susdite notion de M. d'Ocagne et l'emploi de la notion d'ordre nomographique de M. Soreau.

Voici en quoi consiste notre méthode :

Il est aisé de voir que, si l'équation (3) est représentable par un nomogramme à double alignement, et si les lettres F_1 , G_1 , H_1 qui y sont figurées sont les éléments de la première ligne du déterminant (1), chacun des autres éléments F_0 , G_0 , H_0 de ce dernier peut être admis, dans ce cas, comme fonction des deux variables z_3

⁽¹⁾ (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 14 février 1910, p. 379; *Bull. de la Soc. math. de France*, t. XXXIX, p. 105.

et z_4 . Cela dit, soient

$$(4) \quad F_0 = F_{34}, \quad G_0 = G_{34}, \quad H_0 = H_{34}$$

les expressions de ces fonctions. Pour qu'il existe une *charnière* ou *ligne des pivots* pour ce nomogramme, il faudrait que l'élimination de z_3 et z_4 entre ces expressions donne une certaine relation

$$(5) \quad \Phi(F_0, G_0, H_0) = 0,$$

qui soit réelle et homogène en F_0, G_0, H_0 .

Si cette condition est réalisée, on obtient alors l'équation de cette *charnière* en coordonnées cartésiennes et homogènes x, y, z , en substituant ces dernières respectivement à F_0, G_0, H_0 dans la relation (5).

Il en résulte que le problème de la disjonction des variables de l'équation $F_{1234} = 0$, dans le cas de la forme (3), se ramène à la recherche des trois systèmes de trois fonctions F_i, G_i, H_i ($i = 2, 3, 4$) et du système de fonctions (4) de deux variables z_3 et z_4 avec la condition que l'élimination de ces variables entre les fonctions de ce dernier système donne une certaine relation qui soit réelle et homogène en F_0, G_0, H_0 et que les deux déterminants (1) et (2) soient nuls.

Cela posé, les deux systèmes de fonctions (F_2, G_2, H_2) et (F_0, G_0, H_0) s'obtiennent en résolvant les deux identités suivantes (1) :

$$(6) \quad F_2 F_{234} + G_2 G_{234} + H_2 H_{234} \equiv 0 \quad (\text{quels que soient } z_3 \text{ et } z_4),$$

$$(7) \quad F_0 F_{224} + G_0 G_{234} + H_0 H_{234} \equiv 0 \quad (\text{quel que soit } z_2),$$

lesquelles avec l'équation (3) donnent, par élimination, le premier déterminant cherché

$$(8) \quad F_{1234} \equiv \begin{vmatrix} F_1 & G_1 & H_1 \\ F_2 & G_2 & H_2 \\ F_0 & G_0 & H_0 \end{vmatrix} = 0.$$

(1) Il convient de remarquer qu'en résolvant les deux identités (6) et (7), on effectue, en même temps, la disjonction des variables de l'équation (3) en vue de sa représentation par nomogramme à simple alignement, constitué par deux échelles curvilignes (z_1) et (z_2) et par un réseau (z_3, z_4) formé de deux faisceaux de lignes (z_3) et (z_4). *Cours de Calcul graphique et Nomographie* de M. d'Ocagne, p. 239 et son *Traité de Nomographie*, p. 311.

Connaissant, dès lors, les éléments de ce déterminant, on peut définir les échelles (z_1) et (z_2) par les formules

$$x_i = \frac{F_i}{H_i}, \quad y_i = \frac{G_i}{H_i}, \quad H_i \neq 0 \quad (i = 1 \text{ et } 2).$$

Quant à la *charnière*, elle est définie, comme il a été dit ci-dessus, par l'équation $\Phi(x, y, 1) = 0$ obtenue en substituant à F_0 , G_0 , H_0 respectivement x , y , 1 dans la relation (5) qui résulte de l'élimination des deux variables z_3 et z_4 entre les expressions (4) de F_0 , G_0 , H_0 en fonctions de ces deux variables.

A présent, il reste à déterminer les deux systèmes de fonctions (F_3, G_3, H_3) et (F_4, G_4, H_4) . Pour cela remarquons que, si

$$(9) \quad F_0 \varphi_{34} + G_0 \psi_{34} + H_0 \chi_{34} = 0$$

est le développement du déterminant (2) par rapport à F_0 , G_0 , H_0 ces deux systèmes de fonctions inconnues sont définies par les deux identités

$$(10) \quad F_3 \varphi_{34} + G_3 \psi_{34} + H_3 \chi_{34} \equiv 0 \quad (\text{quel que soit } z_4),$$

$$(11) \quad F_4 \varphi_{34} + G_4 \psi_{34} + H_4 \chi_{34} \equiv 0 \quad (\text{quel que soit } z_3),$$

lesquelles avec l'équation (9) donnent, par élimination, le second déterminant cherché (2).

Or, pour avoir les expressions du système des trois fonctions φ_{34} , ψ_{34} , χ_{34} figurées dans les relations ci-dessus, il suffit d'identifier, quels que soient z_1 et z_2 , l'équation $F_{1234} = 0$ avec celle qui résulte en tirant les valeurs de F_0 , G_0 , H_0 des deux équations (5) et (9) et en les portant dans le développement suivant :

$$(12) \quad F_{1234} \equiv F_0 \varphi_{12} + G_0 \psi_{12} + H_0 \chi_{12} = 0.$$

du déterminant (8) par rapport à F_0 , G_0 , H_0 .

Il va sans dire que ce développement devra être effectué, après avoir fait disparaître dans ce déterminant les facteurs parasites; si, bien entendu, ces derniers ne sont pas contenus dans l'équation proposée (3).

Ces facteurs proviennent, comme on le sait, de la coïncidence de la *charnière* avec le support d'une ou deux échelles (z_1) et (z_2) .

Il peut arriver, également, que la *charnière* se confonde avec

le support d'une ou des deux échelles (z_3) et (z_4), il y aura lieu, dans ce cas, d'écrire le développement (9) du déterminant (z) sous la forme dans laquelle les facteurs parasites sont aussi chassés, comme on le verra dans les applications données ci-dessous.

Résolution des identités ci-dessus au moyen de la notion des valeurs critiques. — Distinguons les deux cas suivants :

Premier cas : Identité à satisfaire quelle que soit une seule des variables des fonctions connues. — Soit, par exemple, l'identité (7) à résoudre en rendant indéterminée la variable z_2 .

Pour cela, on l'ordonne nomographiquement par rapport aux fonctions de cette variable. Soit

$$f'_2 f'_{34} + f^2_2 f^2_{34} + \dots + f^{p_2}_2 f^{p_2}_{34} \equiv 0$$

la forme la plus générale obtenue d'ordre quelconque ($p_2 - 1$) par rapport à z_2 , et dans laquelle f'_{34} , f^1_{34} , f^2_{34} , $\dots$ désignent des fonctions quelconques de z_3 et z_4 linéaires et homogènes en F_0 , G_0 , H_0 . En exprimant, suivant la méthode de M. d'Ocagne, que cette équation doit avoir lieu quel que soit z_2 , on obtient le système suivant de p_2 équations linéaires et homogènes en F_0 , G_0 , H_0

$$f'_{34} \equiv 0, \quad f^2_{34} \equiv 0, \quad \dots, \quad f^{p_2}_{34} \equiv 0.$$

Finalement, il suffit de vérifier la compatibilité de ce système, quels que soient z_3 et z_4 , et ensuite d'en résoudre deux quelconques, pour avoir les fonctions inconnues.

Deuxième cas : Identité à satisfaire quelles que soient deux des variables des fonctions connues. — Soit, par exemple, l'identité (6) à résoudre en rendant indéterminées les deux variables z_3 et z_4 . Pour cela, on l'ordonne nomographiquement par rapport aux fonctions de l'une de ces deux variables, z_3 par exemple. Soit

$$f'_3 f'_{24} + f^2_3 f^2_{24} + \dots + f^{p_3}_3 f^{p_3}_{24} \equiv 0$$

la forme obtenue d'ordre quelconque ($p_3 - 1$) par rapport à z_3 . On ordonne, de même, chacune des fonctions f^k_{34} par rapport à l'autre variable z_4 . Soit également

$$f^k_{24} = f'_4 \varphi^k_2 + f^2_4 \varphi^k_2 + \dots + f^{p_4}_4 \varphi^k_2 = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots, p_4)$$

la forme obtenue d'ordre quelconque ($p_4 - 1$) par rapport à z_4 . Si l'on exprime que l'identité (6) doit avoir lieu quels que soient z_3 et z_4 , on a alors le système suivant de $p_3 \times p_4$ équations linéaires et homogènes en F_2, G_2, H_2 :

$$\varphi_2^k \equiv 0, \quad \psi_2^k \equiv 0, \quad \dots, \quad \theta_2^k \equiv 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots, p_3).$$

Il suffit, à présent, de vérifier, quel que soit z_2 , la compatibilité de ce système d'équations et d'en résoudre ensuite deux quelconques, pour avoir les valeurs des fonctions inconnues F_2, G_2, H_2 .

Remarque importante relative au premier cas ci-dessus. — S'il arrive que l'une des fonctions inconnues F_0, G_0, H_0 figurées dans l'équation (9), soit nulle, par exemple la fonction H_0 , on peut, dans ce cas, adopter pour son facteur χ_{34} l'expression

$$\chi_{34} = \Sigma \alpha f_3^k + \Sigma \beta f_4^{k'} + \Sigma \gamma f_3^k f_4^{k'} + 0,$$

où $f_3^k, f_4^{k'}$ désignent les fonctions de z_3 et z_4 par rapport auxquelles les deux fonctions φ_{34} et ψ_{34} figurées dans l'équation (9) sont nomographiquement ordonnables, et $\alpha, \beta, \gamma, \theta$ des constantes qui seront déterminées de façon que chacun des deux systèmes d'équation en (F_3, G_3, H_3) et (F_4, G_4, H_4) , résultant respectivement de la résolution des deux identités (6) et (11), soit compatible ⁽¹⁾.

APPLICATION.

Premier exemple. — Appliquons notre méthode à l'équation suivante :

$$(13) \quad F_{1234} \equiv f_1 - f_2 + (g_1 f_2 - 1) \left(\frac{f_3}{2} \pm \sqrt{\frac{f_3^2}{4} + \frac{1 - f_3 f_4}{g_4}} \right) = 0,$$

où f_i, g_i désignent des fonctions quelconques de la variable z_i .

⁽¹⁾ Il importe d'appliquer cette remarque dans la recherche des deux systèmes de fonctions (F_2, G_2, H_2) et (F_3, G_3, H_3) par notre susdit procédé de la disjonction des variables de l'équation

$$F_{1234} \equiv F_1 F_{23} + G_2 G_{23} + H_1 H_{23} = 0$$

dans le cas où l'une des trois fonctions F_1, G_1, H_1 est nulle, comme, par exemple, dans le cas de l'équation à trois variables d'ordre 3 la plus générale.

Pour cela posons, pour abrégé,

$$f_{34} = \pm \sqrt{\frac{f_3^2}{4} + \frac{1 - f_3 f_4}{g_4}}$$

et essayons d'effectuer la disjonction de ses variables en prenant

$$F_1 = f_1, \quad G_1 = 1, \quad H_1 = g_1.$$

Cette équation s'écrit alors sous la forme

$$F_{1234} \equiv F_1 - G_1 \left(f_2 + \frac{f_3}{2} + f_{34} \right) + H_1 f_2 \left(\frac{f_3}{2} + f_{34} \right) = 0.$$

Si maintenant on substitue à F_1 , G_1 , H_1 respectivement F_2 , G_2 , H_2 , et si l'on rend indéterminés successivement z_3 et z_4 dans l'identité obtenue, on a deux équations linéaires et homogènes ayant pour solution

$$F_2 = f_2^2, \quad G_2 = f_2, \quad H_2 = 1.$$

De même, en substituant à F_1 , G_1 , H_1 respectivement F_0 , G_0 , H_0 et en exprimant que l'identité obtenue doit avoir lieu quel que soit z_2 , on a les relations

$$\frac{F_0}{G_0} = \frac{G_0}{H_0} = \frac{f_3}{2} + f_{34},$$

qui montrent que la *charnière* est une parabole ayant pour équation

$$x = y^2.$$

Nous pouvons, dès lors, exprimer comme ci-après F_0 , G_0 , H_0 en fonction d'une seule variable auxiliaire z_0 :

$$F_0 = f_0^2, \quad G_0 = f_0, \quad H_0 = 1;$$

de là les deux déterminants

$$(14) \quad F_{1234} \equiv \begin{vmatrix} f_1 & 1 & g_1 \\ f_2^2 & f_2 & 1 \\ f_0^2 & f_0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (15) \quad \begin{vmatrix} f_0^2 & f_0 & 1 \\ F_3 & G_3 & H_3 \\ F_4 & G_4 & H_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Il s'agit, maintenant, d'avoir les éléments de ce dernier déterminant. Pour cela, écrivons le développement suivant du détermi-

nant (14), après en avoir chassé le facteur parasite $(f_0 - f_2)$

$$F_{1234} \equiv f_1 - (f_0 + f_2) + g_1 f_2 f_0 = 0.$$

Ensuite remplaçons dans ce développement f_0 par sa valeur tirée du développement suivant :

$$f_0^2 \varphi_{34} + f_0 \psi_{34} + 1 \times \gamma_{34} = 0,$$

du déterminant (15), nous avons l'équation

$$f_1 - f_2 + (g_1 f_2 - 1) \left[\frac{-\psi_{34}}{2\varphi_{34}} \pm \sqrt{\left(\frac{\psi_{34}}{2\varphi_{34}} \right)^2 - \frac{\gamma_{34}}{\varphi_{34}}} \right] = 0.$$

L'identification de celle-ci, quels que soient z_1 et z_2 , avec l'équation (13), donne

$$\varphi_{34} = g_4, \quad \psi_{34} = f_3 g_4, \quad \gamma_{34} = f_3 f_4 - 1.$$

Finalement en résolvant les deux identités (10) et (11) après y avoir remplacé φ_{34} , ψ_{34} , γ_{34} par leurs valeurs ci-dessus, nous aurons les éléments cherchés.

$$\begin{aligned} F_3 &= f_2, & G_3 &= 1, & H_3 &= 0, \\ F_4 &= 1, & G_4 &= 1, & H_4 &= g_4, \end{aligned}$$

Remarque. — Si, par notre méthode, on ne parvient pas à effectuer la disjonction des variables de l'équation proposée, même en combinant ses quatre variables de toutes les manières possibles, on essaiera d'y arriver en appliquant la même méthode à cette équation après lui avoir fait subir une transformation algébrique non linéaire.

Deuxième exemple. — Considérons l'équation

$$(16) \quad F_{1234} \equiv (f_1 f_2 - g_1)(f_3 - f_4)^2 + f_3 f_4 (f_3 - f_4) - f_2 f_3^2 f_4^2 = 0.$$

Pour effectuer la disjonction de ses variables, prenons

$$F_1 = f_1, \quad G_1 = g_1, \quad H_1 = 1$$

et ordonnons par rapport à ces éléments, il vient

$$F_{1234} \equiv F_1 f_2 (f_3 - f_4)^2 - G_1 (f_3 - f_4)^2 - H_1 [f_2 f_3^2 f_4^2 - f_3 f_4 (f_3 - f_4)] = 0.$$

Substituons à F_1 , G_1 , H_1 respectivement F_2 , G_2 , H_2 et rendons

indéterminées z_3 et z_4 dans l'identité obtenue; nous avons

$$F_2 = 1, \quad G_2 = f_2, \quad H_2 = 0.$$

De même, substituons à F_1, G_1, H_1 respectivement F_0, G_0, H_0 et rendons indéterminé z_2 dans l'équation obtenue, nous avons les relations

$$\frac{F_0}{f_3^2 f_4^2} = \frac{G_0}{f_3 f_4 (f_3 - f_4)} = \frac{H_0}{(f_3 - f_4)^2};$$

ce qui montre que la charnière est une parabole, ayant pour équation

$$y^2 = x.$$

Nous pouvons donc écrire

$$F_0 = f_0^2, \quad G_0 = f_0, \quad H_0 = 1,$$

où f_0 désigne, comme précédemment, une fonction quelconque d'une variable auxiliaire z_0 .

De là, les deux déterminants

$$(17) \quad F_{1234} \equiv \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & 1 \\ 1 & f_2 & 0 \\ f_0^2 & f_0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (18) \quad \begin{vmatrix} f_0^2 & f_0 & 1 \\ F_3 & G_3 & H_3 \\ F_4 & G_4 & H_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Pour avoir les éléments de ce dernier déterminant, écrivons le développement suivant du déterminant (17)

$$(19) \quad F_{1234} = f_0^2 f_2 + f_0 + f_1 f_2 - g_1 = 0.$$

Remarquons ensuite que, si

$$(20) \quad \Phi_{1234} = 0$$

est l'équation qu'on obtient en remplaçant dans (19) la valeur de f_0 tirée du développement suivant du déterminant (18)

$$f_0^2 \varphi_{34} + f_0 \varphi_{34} + 1 \times \chi_{34} = 0,$$

la résolution de l'identité suivante, quels que soient z_1 et z_2 ,

$$F_{1234} \equiv \Phi_{1234},$$

par rapport à $\varphi_{34}, \psi_{34}, \chi_{34}$, ne peut avoir lieu, à moins toutefois de faire coïncider le support de l'échelle (z_3) avec la charnière;

c'est-à-dire décrire le déterminant (18) sous la forme

$$(21) \quad \begin{vmatrix} f_0^2 & f_0 & 1 \\ f_3^2 & f_3 & 1 \\ F_4 & G_4 & H_4 \end{vmatrix} = 0,$$

ayant le développement suivant, après y avoir fait disparaître le facteur parasite $f_0 - f_2$,

$$(22) \quad (f_0 + f_3)\varphi_{34} + 1 \times \psi_{34} + 0 \times \chi_{34} = 0.$$

En effet, si l'on tire de ce dernier la valeur de f et si on la porte dans le développement (19), on obtient l'équation

$$-f_2(\psi_{34} + f_3\varphi_{34})^2 - (\psi_{34} + f_3\varphi_{34})\varphi_{34} + (f_1f_3 - g_1)\varphi_{34}^2 = 0.$$

Or, l'identification de cette dernière, quels que soient z_1 et z_2 , avec l'équation (16), donne les expressions suivantes de φ_{34} et ψ_{34} :

$$\varphi_{34} = f_3 - f_4, \quad \psi_{34} = -f_3^2.$$

Quant à celle de la fonction χ_{34} , elle est de la forme suivante, en vertu de la remarque importante ci-dessus :

$$\chi_{34} = \alpha f_3 + \beta f_4 + \gamma f_3^2 + \delta f_3^2 f_4;$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des paramètres que nous allons déterminer, en même temps que les éléments F_4, G_4, H_4 . Pour cela introduisons, dans les deux identités (10) et (11), les expressions ci-dessus des trois fonctions φ_{34}, ψ_{34} et χ_{34} et remplaçons aussi, dans l'identité (10), F_3, G_3, H_3 par leurs valeurs suivantes admises ci-dessus :

$$F_3 = f_3^2, \quad F_3 = f_3, \quad H_3 = 1.$$

A présent, en exprimant que cette dernière identité doit avoir lieu quels que soient z_3 et z_4 , on obtient

$$\delta = 1, \quad \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Tenant compte de cette condition, la résolution de l'identité (11) donne les éléments cherchés

$$F_4 = 0, \quad G_4 = f_4, \quad H_4 = 1.$$

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME XL.

(Les lettres et numéros qui précèdent les titres indiquent les classifications du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*, nouvelle édition, 1908.)

	Pages.
[B12f] Autonne (L.). — Sur les groupes pseudo-nuls et non commutatifs de quantités hypercomplexes	187
[R8e] Birkhoff (G.-D.). — Quelques théorèmes sur le mouvement des systèmes dynamiques.....	365
[D3a] Borel (E.). — Les fonctions monogènes non analytiques	205
[X3] Boulad (F.). — Sur les équations à quatre variables d'ordre nomographique supérieur	383
[S2b] Bouligand. — Sur les équations des petits mouvements de surface des fluides parfaits	149
[D2b] Cahen (E.). — Sur l'irrationalité des sommes des séries dont le terme général est une fonction rationnelle de l'indice.....	52
[I23a] Chatelet (A.). — Contribution à la théorie des fractions continues arithmétiques.....	1
[R6a] Cotton (E.). — Sur la réduction des forces d'inertie	139
[R6a] Delassus (E.). — Sur le principe des travaux virtuels	244
[D2a] Denjoy (A.). — Sur quelques propriétés des séries à termes positifs.....	223
[J4a] De Séguier. — Sur les produits directs.....	219
[H1g] Dulac (H.). — Solutions d'un système d'équations différentielles dans le voisinage de valeurs singulières.....	324
[O'5j α] Kéraval (E.). — Surfaces dont les lignes asymptotiques se déterminent comme celles de la surface des ondes.....	39
[R1c] Kœnigs (G.). — Sur l'enseignement de la Cinématique	180
[G41a] Lebesgue (H.). — Sur un théorème de M. Volterra.....	538
[D3f β] Lévy (P.). — Remarques sur le théorème de M. Picard.....	25

COMPTES RENDUS DES SÉANCES

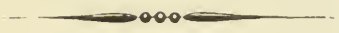
DE L'ANNÉE 1912.

500⁷⁷ PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
55, quai des Grands-Augustins.

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES

DE L'ANNÉE 1912.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1912

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés
pour tous pays.

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

ÉTAT

DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

AU COMMENCEMENT DE L'ANNÉE 1912 ⁽¹⁾.

Membres honoraires du Bureau....	MM. APPELL. DARBOUX. GUYOU. HATON DE LA GOUPILLIÈRE. HUMBERT. JORDAN. LECORNÜ. MITTAG-LEFFLER. PAINLEVÉ. PICARD. POINCARÉ. VOLTERRA. ZEUTHEN.
----------------------------------	---

Président.....	MM. ANDOYER.
Vice-Présidents.....	COSSERAT (F.). FONTENÉ. MAILLET. VESSIOT.
Secrétaires.....	CARTAN. MONTEL.
Vice-Secrétaires.....	FATOU. HALPHEN.
Archiviste.....	FOUCHÉ.
Trésorier.....	SERVANT.
Membres du Conseil ⁽²⁾	BIOCHE, 1913. BOREL, 1913. BRICARD, 1914. CAHEN (E.), 1915. D'OCAGNE, 1913. FOURET, 1915. GRÉVY, 1914. GUICHARD, 1914. HADAMARD, 1913. KOENIGS, 1912. LEBESGUE, 1915. LÉVY (L.), 1915.

(1) MM. les Membres de la Société sont instamment priés d'adresser au Secrétariat les rectifications qu'il y aurait lieu de faire à cette liste.

(2) La date qui suit le nom d'un membre du Conseil indique l'année au commencement de laquelle expire le mandat de ce membre.

Date
de
l'admission.

1872. ACHARD, ancien directeur de la Compagnie d'assurances sur la vie *La Foncière*,
rue de la Terrasse, 6 bis, à Paris (17°).
1900. ACKERMANN-TEUBNER, éditeur, à Leipzig (Allemagne). S. P. (¹).
1900. ADHÉMAR (vicomte Robert n°), professeur à la Faculté libre des Sciences, place de
Genevières, 14, à Lille (Nord).
1896. ANDOYER, professeur à la Faculté des Sciences, membre du Bureau des Longitudes,
rue du Val-de-Grâce, 11, à Paris (5°).
1894. ANDRADE, professeur à la Faculté des Sciences, rue de la Mouillière, 1, à Besançon.
1872. ANDRÉ (Désiré), docteur ès sciences, rue Bonaparte, 70 bis, à Paris (6°).
1879. APPELL, membre de l'Institut, doyen de la Faculté des Sciences et professeur à l'École
Centrale des Arts et Manufactures, rue du Bac, 32, à Paris (7°).
1910. ARCHBALD (R.-C.), professeur à Brown-Université, Providence, Rhode Island (États-Unis).
1900. AURIC, ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue Pierre-Corneille, 38, à Lyon.
1882. AUTONNE, ingénieur en chef des ponts et chaussées, professeur adjoint honoraire à la
Faculté des Sciences de Lyon, rue de l'Hospice, 69, à Châteauroux (Indre).
1900. BAIRE, professeur à la Faculté des Sciences, 24, rue Audria à Dijon.
1896. BAKER, professeur à l'Université de Toronto (Canada).
1905. BARRÉ, capitaine du génie, docteur ès sciences mathématiques, quai de la Répu-
blique, 8, à Verdun (Meuse).
1906. BARTHELS, docteur en philosophie, professeur honoraire de Mathématiques, à
Aschaffenburg (Bavière).
1875. BERDELLÉ, ancien garde général des forêts, à Rioz (Haute-Saône). S. P.
1904. BERNSTEIN (S.), docteur ès sciences, privat docent à l'Université, Apterkarsky, 22, à
Kharkow (Russie).
1891. BERTRAND DE FONTVILANT, professeur à l'École Centrale des Arts et Manufactures,
rue Brémontier, 16, à Paris (17°). S. P.
1910. BERTRAND (G.), professeur à l'École Sainte-Geneviève, rue Lhomond, 18, à Paris (5°).
1888. BLOCHE, professeur au lycée Louis-le-Grand, rue Notre-Dame-des-Champs, 56, à
Paris (6°) S. P.
1900. BLUMENTHAL (Otto), professeur à la Technische Hochschule, Rüttscherstrasse, 48, à
Aix-la-Chapelle (Allemagne).
1891. BLUTEL, inspecteur général de l'Instruction publique, rue Denfert-Rochereau, 110,
à Paris (14°).
1902. BODERIL (vicomte Roger du), à Saint-Barthélemy, Marseille. S. P.
1907. BOITEL DE DIENVAL, ancien élève de l'École Polytechnique, au château de Valsery, à
Cœuvres (Aisne). S. P.
1892. BONAPARTE (prince Roland), membre de l'Institut, avenue d'Iéna, 10, à Paris (16°).
1895. BOREL (Émile), professeur à la Faculté des Sciences, sous-directeur de l'École
Normale, rue d'Ulm, 45, à Paris (5°). S. P.
1909. BOULAD (F.), ingénieur au service des Ponts des Chemins de fer de l'État égyptien,
au Caire (Égypte).
1896. BOULANGER, docteur ès sciences, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Gay-
Lussac, 68, à Paris (5°).
1896. BOURGET (H.), directeur de l'Observatoire, à Marseille.
1896. BOURLET, docteur ès sciences, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers et à
l'École des Beaux-Arts, rue Raynouard, 56, à Paris (16°). S. P.

(¹) Les initiales S. P. indiquent les Sociétaires perpétuels.

Date
de
admission.

1903. BOUTIN, rue Lavieuville, 26, à Paris (18°).
1904. BOUTROUX (P.), professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers. S. P.
1900. BREITLING, proviseur du lycée Buffon, boulevard Pasteur, 16, à Paris (14°).
1911. BRATU, professeur, rue Galipeau, 3, à Antony (Seine).
1897. BRICARD, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Denfert-Rochereau, 108, à Paris (14°).
1873. BROCARD, lieutenant-colonel du génie territorial, rue des Ducs-de-Bar, 75, à Bar-le-Duc. S. P.
1912. BROWNE, Collège des Irlandais, rue des Irlandais, 5, à Paris (5°).
1901. BUHL, professeur à la Faculté des Sciences, rue des Coffres, 11, à Toulouse.
1893. BURKHARDT, professeur à la Technische Hochschule, Martinstrasse, 3, à Munich (Bavière).
1894. CAHEN, professeur au collège Rollin, rue Cortambert, 46, à Paris (16°).
1893. CALDARERA, professeur à l'Université, palazzo Giampaolo, via della Libertà, à Palerme (Italie).
1885. CARON, chef honoraire des travaux graphiques à la Sorbonne, rue Claude-Bernard, 71, à Paris (5°).
1892. CARONNET, docteur ès sciences mathématiques, rue Demours, 62 bis, à Paris (17°).
1896. CARTAN, maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue de Vaugirard, 174, à Paris (15°).
1887. CARVALLO, directeur des études à l'École Polytechnique, rue Descartes, 21, à Paris (5°). S. P.
1890. CEDERCREUTZ (baronne Nanny), Unionsgatan, 4, à Helsingfors (Finlande).
1892. CELLÉRIER (Gustave), ancien astronome à l'Observatoire, cours de Rive, 12, à Genève (Suisse).
1888. CHAILAN (Édouard), professeur à l'Institut catholique, rue Denfert-Rochereau, 95, à Paris (14°).
1911. CHALORY, professeur au lycée Carnot, rue de Vaugirard, 38, à Paris (6°).
1896. CHARVE, doyen de la Faculté des Sciences, cours Pierre-Puget, 60, à Marseille.
1911. CHATELET, ancien élève de l'École Normale supérieure, rue de la Californie, 69, à Tours.
1907. CHAZY, maître de conférences à la Faculté des Sciences, à Lille.
1884. CHRYSTAL, professeur à l'Université, à Édimbourg (Écosse).
1901. CLAIRIN, professeur à la Faculté des Sciences, rue Jacquemars-Giélée, 57 bis, à Lille.
1898. COMBEBIAC, chef de bataillon du génie en retraite, docteur ès sciences, rue Arbonneau, 7, à Limoges.
1896. COSSERAT (E.), directeur de l'Observatoire, à Toulouse.
1896. COSSERAT (F.), ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue d'Alsace, 23, à Paris (10°).
1900. COTTON (Émile), professeur à la Faculté des Sciences, à Grenoble. S. P.
1904. CURTISS, professeur à l'Université Northwestern, Milburn Street, 720, à Evanston (Illinois, États-Unis).
1872. DARBOUX, secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, doyen honoraire de la Faculté des Sciences, rue Mazarine, 3, à Paris (6°).
1885. DAUTHEVILLE, doyen de la Faculté des Sciences, cours Gambetta, 27, à Montpellier.
1901. DELASSUS, professeur de Mécanique rationnelle à la Faculté des Sciences, rue de Brach, 92, à Bordeaux.
1895. DELAUNAY (N.), professeur à l'Institut Empereur Alexandre II, à Kiew (Russie).
1885. DEMARTRES, doyen de la Faculté des Sciences, avenue Saint-Maur, à la Madeleine-lès-Lille (Nord).

Date
de
l'admission

1892. DEMOULIN (Alph.), professeur à l'Université, rue Joseph-Plateau, 10, à Gand (Belgique).
1905. DENJOY, maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue Duguesclin, 3, à Montpellier.
1883. DERUYTS, professeur à l'Université, rue des Augustins, 35, à Liège (Belgique).
1894. DESAINT, docteur ès sciences, boulevard Gouvion-Saint-Cyr, 47, à Paris (17°).
1900. DICKSTEIN, Marszatkowska, 117, à Varsovie.
1899. DRACH, professeur à la Faculté des Sciences, rue du Japon, 12, à Toulouse.
1909. DRURY, bibliothécaire de l'Université, University Station, Urbana (Illinois, États-Unis).
1907. DULAC, professeur à la Faculté des Sciences, quai des Brotteaux, 4, à Lyon.
1896. DUMAS (G.), docteur de l'Université de Paris, privat-docent à l'École Polytechnique fédérale, Asylstrasse, 81, à Zurich (Suisse).
1897. DUMONT, professeur au lycée, avenue Bouvard, 6, à Annecy (Haute-Savoie).
1886. DUNCAN, Consulting Engineer, Empire Building, Broadway, 71, New-York City.
1885. DYCK (Walther), professeur à l'École Polytechnique de Munich, membre de l'Académie des Sciences de Bavière, Hildegardstrasse, 5, à Munich (Bavière).
1902. EGOROFF (Dimitry), professeur à l'Université, Povarskaïa, Borissoglebsky per., n° 8, à Moscou (Russie).
1903. ESPANET, ingénieur civil, Brazil Railway Company, rue Louis-le-Grand, 9, à Paris.
1900. ESTAVAVE, docteur ès sciences, secrétaire de la Faculté des Sciences de Marseille.
1907. ETZEL, St Bernard's Seminary, à Rochester (État de New-York, États-Unis).
1896. EUVERTE, ancien élève de l'École Polytechnique, ancien capitaine d'artillerie, rue du Pré-aux-Cleres, 18, à Paris (7°).
1888. FABRY, professeur à la Faculté des Sciences, rue Chaptal, 17, à Montpellier.
1906. FARAGGI, professeur à Sétif (Algérie).
1904. FATOU, docteur ès sciences, astronome-adjoint à l'Observatoire, boulevard du Mont-Parnasse, 172, à Paris (14°).
1891. FAUQUEMBERGUE, professeur au lycée, à Mont-de-Marsan.
1892. FEHR (Henri), professeur à l'Université, route de Florissant, 110, à Genève (Suisse).
1885. FIELDS (J.), professeur à l'Université, Toronto (Ontario, Canada).
1881. FLOQUET, doyen de la Faculté des Sciences, rue de la Commanderie, 21, à Nancy.
1872. FLYE SAINTE-MARIE, chef d'escadron d'artillerie en retraite, ancien répétiteur à l'École Polytechnique, place Royer-Collard, à Vitry-le-François (Marne).
1897. FONTENÉ, inspecteur de l'Académie de Paris, rue Le Goff, 7, à Paris (5°).
1903. FORD (WALTER B.), professeur de Mathématiques à l'Université de Michigan, à Ann Arbor (Michigan, États-Unis).
1889. FOUCHÉ, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Soufflot, 5, à Paris (5°).
1905. FOUËT, professeur à l'Institut catholique, rue Le Verrier, 17, à Paris (6°).
1872. FOURET, ancien examinateur d'admission à l'École Polytechnique, avenue Carnot, 4, à Paris (17°). S. P.
1903. FRAISSÉ, inspecteur des études au Prytanée, à La Flèche (Sarthe).
1911. FRÉCHET, professeur à la Faculté des Sciences, à Poitiers.
1903. FUETER, professeur à l'Université, Wartenbergstrasse, 17, à Bâle (Suisse).
1911. GALBRUN, docteur ès sciences, avenue Élysée-Reclus, 32, à Paris (7°).
1900. GALDEANO (Z.-G. DE), correspondant des Académies royales des Sciences de Madrid et de Lisbonne, professeur à l'Université, Calle del Coso, 99, à Saragosse (Espagne).
1906. GARGAM DE MONCETZ, licencié ès sciences, square de Latour-Maubourg, 8, à Paris (7°).
1872. GABRIEL, inspecteur général des ponts et chaussées en retraite, professeur honoraire à la Faculté de Médecine, rue Édouard-Detaille, 6, à Paris (17°).

Date
de
l'admission.

1908. **GARNIER**, docteur ès sciences, boulevard Arago, 99, à Paris (14°).
1911. **GAU**, maître des conférences à la Faculté des Sciences, à Grenoble.
1896. **GAUTHIER-VILLARS**, ancien élève de l'École Polytechnique, éditeur, quai des Grands-Augustins, 55, à Paris (6°).
1890. **GEBBIA**, professeur libre à l'Université, à Palerme (Italie).
1906. **GÉRARDIN**, quai Claude-le-Lorrain, 32, à Nancy.
1897. **GERRANS**, professeur à Worcester College, Saint-John street, 20, à Oxford (Grande-Bretagne).
1907. **GIORDANO**, directeur du R. Ginnasio, à Licata (Italie).
1903. **GODEY**, ancien élève de l'École Polytechnique, rue du Bois-de-Boulogne, 7, à Paris (16°).
1907. **GOT** (Th.), ancien ingénieur de la marine, Hôtel Soufflot, rue Toullier, à Paris (5°).
1881. **GOURSAT**, professeur à la Faculté des Sciences, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Denfert-Rochereau, 39, à Paris (5°). **S. P.**
1896. **GRÉVY**, professeur au lycée Saint-Louis, rue Claude-Bernard, 71, à Paris (5°).
1899. **GUADET**, ancien élève de l'École Polytechnique, rue de l'Université, 69, à Paris (7°).
1880. **GUCCIA** (Jean), professeur à l'Université, via Ruggiero Settimo, 30, à Palerme (Italie).
1906. **GUERBY**, professeur au collège Stanislas, rue d'Assas, 50, à Paris (6°). **S. P.**
1900. **GUICHARD** (C.), maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue Boulainvilliers, 14, à Paris (16°).
1907. **GUICHARD** (L.), rue Condorcet, 42, à Paris (9°).
1881. **GUNTHER** (Dr Sigismond), professeur à l'École Polytechnique, à Munich (Bavière).
1885. **GUYOU**, membre de l'Institut, boulevard Raspail, 28½, à Paris (14°).
1882. **HABICH**, directeur de l'École des Ingénieurs, à Lima (Pérou).
1896. **HADAMARD**, professeur au Collège de France et à l'École Polytechnique, rue Humboldt, 25, à Paris (14°). **S. P.**
1910. **HALPHEN** (Ch.), ingénieur des Arts et Manufactures, Chaussée de la Muette, 8 bis, à Paris (16°).
1894. **HALSTED** (G.-B.), Colorado State Teachers College, à Greeley (Colorado, États-Unis). **S. P.**
1901. **HANCOCK**, professeur à l'Université de Cincinnati, Auburn Hotel (Ohio, États-Unis).
1909. **HANSEN**, privat-docent à l'Université, Strandboulevarden, 66, Copenhague (Danemark).
1872. **HATON DE LA GOUPILLIÈRE**, membre de l'Institut, inspecteur général des mines, directeur honoraire de l'École des Mines, rue de Vaugirard, 56, à Paris (6°). **S. P.**
1905. **HEDRICK**, professeur à l'Université, South Ninth street, 302, à Columbia (Missouri, États-Unis).
1892. **HERMANN**, libraire-éditeur, rue de la Sorbonne, 8, à Paris (5°).
1911. **HERHOLTZ**, professeur, avenue de Belmont, 28, à Montreux (Suisse).
1911. **HOLMGREN**, professeur à l'Université d'Upsal, à l'Observatoire, Upsal (Suède).
1895. **HOTT** (S.), professeur à l'École St-Croix de Neuilly, boulevard Pereire, 218 bis, à Paris (17°). **S. P.**
1880. **HUMBERT**, membre de l'Institut, ingénieur en chef des mines, professeur à l'École Polytechnique, rue Daubigny, 6, à Paris (17°).
1907. **HUSSON**, professeur à la Faculté des Sciences, rue des Tiercelins, 60, à Nancy.
1881. **IMBER**, ancien directeur des études à l'École Centrale, ancien membre du Conseil de l'École Centrale, place Voltaire, 2, à Paris (11°).

Date
de
l'admission.

1896. JACQUET (E.), professeur, rue Lagarde, 3, à Paris (5°).
1898. JAHNKE (E.), professeur à l'Académie des Mines, Darmstädter strasse, 11, à Berlin, W.15 (Allemagne).
1903. JENSEN (J.-L.-W.-V.), ingénieur en chef des Téléphones, Frederiksberg allée, 68, à Copenhague (Danemark).
1872. JORDAN, membre de l'Institut, professeur à l'École Polytechnique et au Collège de France, rue de Varenne, 48, à Paris (7°). S. P.
1875. JUNG, professeur à l'Institut technique supérieur, via Fatebenefratelli, 19, à Milan (Italie).
1910. KÉRAVAL, professeur au lycée Louis-le-Grand, avenue du Maine, 46, à Paris (14°).
1892. KOCH (H. von), professeur à l'École Polytechnique, à Djursholm-Stockholm (Suède).
1880. KÖNIGS, professeur à la Faculté des Sciences, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, boulevard Arago, 101, à Paris (14°).
1907. KRYLOFF, professeur d'analyse à l'École supérieure des Mines, à Saint-Petersbourg (Russie).
1897. LACAUCHIE, ingénieur civil, rue Brochant, 18, à Paris (17°).
1873. LAISANT, docteur ès sciences, répétiteur et examinateur à l'École Polytechnique, rue du Conseil, 5, à Asnières (Seine).
1906. LALESCO, maître de conférences à l'Université, str. Luteranà, 31, à Bucarest.
1893. LANCELIN, astronome-adjoint à l'Observatoire, rue Boissonnade, 3, à Paris (14°).
1899. LANDAU, professeur à l'Université, Herzbergerchaussee, 48, à Göttingen (Allemagne).
1896. LAROZE, ingénieur des télégraphes, rue Froidevaux, 8, à Paris (14°).
1908. LATTÈS, professeur à la Faculté des Sciences, à Toulouse.
1873. LAUTH, manufacturier à Thann (Alsace).
1896. LEAU, professeur au lycée Michelet, rue Denfert-Rochereau, 83, à Paris (14°).
1880. LÉAUTÉ, membre de l'Institut, boulevard de Courcelles, 18, à Paris (17°). S. P.
1896. LEBEL, professeur au lycée, rue Pelletier-de-Chambrun, 12, à Dijon.
1902. LEBESGUE, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Paris, avenue de la Tourelle, 7, à Saint-Mandé.
1903. LEBEUF, directeur de l'Observatoire, professeur d'astronomie à l'Université, à Besançon.
1893. LECORNU, membre de l'Institut, Inspecteur général des mines, professeur à l'École Polytechnique, rue Gay-Lussac, 3, à Paris (5°).
1895. LÉMERAY, licencié ès sciences mathématiques et physiques, ingénieur civil du génie maritime, villa Véga, à Antibes (Alpes-Maritimes).
1904. LEMOYNE (T.), rue Claude-Bernard, 74, à Paris (5°).
1879. LE PAIGE, professeur à l'Université, à l'Observatoire de Cointe, à Liège (Belgique).
1895. LE ROUX, professeur à la Faculté des Sciences, rue de Châteaudun, 13, à Rennes.
1898. LE ROY, docteur ès sciences, boulevard Raspail, 117, à Paris (6°).
1891. LERY, agent-voyer en chef de Seine-et-Oise, rue Magenta, 5, à Versailles.
1900. LEVI CIVITA (T.), professeur à l'Université, via Altinate, 14, à Padoue (Italie).
1907. LESGOURGUES, professeur au lycée Henri IV, rue Jean-Bart, 4, à Paris (6°).
1909. LÉVY (Albert), professeur au lycée Saint-Louis, rue de Rennes, 86, à Paris (6°).
1882. LÉVY (Lucien), répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue du Regard, 12, à Paris (6°).
1907. LÉVY (Paul), ingénieur des mines, professeur à l'École des Mines de Saint-Étienne, à Saint-Étienne.

Date
de
l'admission.

1875. LEZ (Henri), à Lorrez-le-Bocage (Seine-et-Marne).
1898. LINDELÖF (Ernst), professeur à l'Université, Sandvikskajen, 15, à Helsingfors (Finlande).
1877. LINDEMANN, professeur à l'Université, Franz-Josefstrasse, 9, à Munich (Bavière).
1886. LIOUVILLE, ingénieur des poudres, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, quai Henri IV, 12, à Paris (4°).
1912. LOVETT (E.-O.), Rice Institute, à Houston (Texas, États-Unis).
1888. LUCAS (Félix), ingénieur en chef des ponts et chaussées en retraite, rue Boissière, 30, à Paris (16°).
1902. LUCAS-GIRARDVILLE, au Ministère des Finances, Direction des manufactures de l'État, à Paris (2°).
1902. LUCAS DE PESLOUAN, ancien élève de l'École Polytechnique, avenue Rapp, 41, à Paris (7°).
1895. MAILLET, ingénieur des ponts et chaussées, répétiteur à l'École Polytechnique, rue de Fontenay, 11, à Bourg-la-Reine (Seine). S. P.
1905. MALUSKI, proviseur du lycée de Nîmes.
1906. MARCUS, licencié ès sciences, rue de Montsouris, 33, à Paris (14°).
1904. MAROTTE, professeur au lycée Charlemagne, rue de Renilly, 35 bis, à Paris (12°).
1884. MARTIN (Artemas), 1535, Colombia Street N. W., à Washington D. C. (États-Unis).
1887. MEHMKE, professeur à l'École technique supérieure, Lowenstrasse, à Stuttgart-Degerloch (Wurtemberg).
1888. MENDIZABAL TAMBOREL (DE), membre de la Société de Géographie de Mexico, calle de Jesus, 13, à Mexico (Mexique). S. P.
1881. MERCEREAU, licencié ès sciences, docteur en médecine, rue de l'Université, 191, à Paris (7°). S. P.
1901. MERLIN (Émile), docteur ès sciences physiques et mathématiques, ancien astronome adjoint à l'Observatoire royal de Belgique, répétiteur à l'Université, rue d'Ostende, 11, à Gand (Belgique).
1901. MERLIN (Jean), astronome à l'Observatoire de Lyon, à Saint-Genis-Laval (Rhône).
1901. METZLER, professeur à l'Université, à Syracuse (État de New-York).
1901. MICHEL (Charles), professeur au lycée Saint-Louis, rue Sarrette, 14, à Paris (14°).
1893. MICHEL (François), ingénieur, licencié ès sciences, chef du service des parcours de la Compagnie des chemins de fer du Nord, faubourg Saint-Denis, 210, à Paris (10°).
1873. MITTAG-LEFFLER, professeur à l'Université, à Djursholm-Stockholm (Suède).
1904. MIWA, professeur à l'Université de Kyoto (Japon).
1902. MOLK (J.), professeur à la Faculté des Sciences, rue d'Alliance, 8, à Nancy.
1907. MONTEL, chargé de conférences à la Faculté des Sciences, boulevard de Vaugirard, 57, à Paris (15°).
1898. MONTESSUS DE BALLORE (vicomte Robert DE), professeur à la Faculté libre des Sciences, boulevard Bigot-Danel, 15, à Lille (Nord).
1911. MOORE (CH.-N.), professeur assistant à l'Université de Cincinnati, rue Notre-Dame-des-Champs, 99, à Paris (6°).
1903. MULLER (J.-O.), Vennsbergerweg, 32, à Bonn (Allemagne).
1909. MYERS (G.-W.), professeur de mathématiques et d'astronomie et supervisor de mathématiques à l'Université de Chicago (États-Unis).
1909. NEOVIUS, ancien professeur à l'Université d'Helsingfors, Chr. Vinthersvei 31, à Copenhague (Danemark).
1885. NEUBERG, professeur à l'Université, rue Sclessin, 6, à Liège (Belgique).
1897. NICOLLIER, professeur, la Chataigneraie, à Saint-Clarens (Vaud, Suisse).

Date
de
l'admission.

1900. NIEWENGLOWSKI, docteur ès sciences, inspecteur général de l'Instruction publique, rue de l'Arbalète, 35, à Paris (5°).
1882. OCAGNE (M. v'), ingénieur en chef des ponts et chaussées, professeur à l'École Polytechnique, rue La Boétie, 30, à Paris (8°). S. P.
1905. OUIVET, rue Pierre-Nicole, 7, à Paris (3°).
1873. OVIDIO (E. v'), professeur à l'Université, Corso Sommeiller, 16, à Turin (Italie).
1901. PADÉ (H.), recteur de l'Académie de Besançon.
1893. PAINLEVÉ, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences et à l'École Polytechnique, rue Séguier, 18, à Paris (6°).
1912. PANGE (DE), ancien élève de l'École Polytechnique, rue François I^{er}, 31, à Paris (8°).
1888. PAPELIER, professeur au lycée, rue Notre-Dame-de-Reouvrance, 29, à Orléans.
1881. PELLET, professeur à la Faculté des Sciences, boulevard Gergovia, 77, à Clermont-Ferrand.
1874. PERCIN, général de division, avenue Elisée-Reclus, 23, à Paris (7°).
1881. PEROTT (Joseph), Université Clark, à Worcester (Massachusetts, États-Unis). S. P.
1892. PERRIN (Élie), professeur de mathématiques, rue Tarbé, 3, à Paris (17°).
1896. PETROVITCH, professeur à l'Université, Kossantch-Venac, 26, à Belgrade (Serbie).
1902. PETROVITCH (S.), général major, professeur ordinaire à l'Académie d'artillerie Michel, Sergevskaïa, 42, log. 10, à Saint-Petersbourg.
1887. PEZZO (DEL), professeur à l'Université, piazza San Marcellino, 2, à Naples (Italie).
1905. PFEIFFER, maître de conférences à l'Université, Szaoudl Wladimirskaïa 45, bg II, à Kiew (Russie).
1906. PHILIPPE (Léon), inspecteur général des ponts et chaussées, rue de Turin, 3 bis, à Paris (8°).
1879. PICARD (Émile), membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences et à l'École Centrale des Arts et Manufactures, rue Joseph-Bara, 4, à Paris (6°).
1872. PICQUET, chef de bataillon du génie, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, rue Monsieur-le-Prince, 4, à Paris (6°).
1899. PIERPONT (James), professeur à l'Université Yale, Mansfield street, 42, à New Haven (Connecticut, États-Unis).
1882. POINCARÉ, membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes, professeur à la Faculté des Sciences, rue Claude-Bernard, 63, à Paris (5°). S. P.
1872. POLIGNAC (prince C. DE), à Radmannsdorf (Carniole, Autriche). S. P.
1906. POPOVICI, professeur à la Faculté des Sciences de Jassy (Roumanie).
1899. PRINGSHEIM, professeur à l'Université, Arcisstrasse, 12, à Munich (Bavière).
1896. PRUYOST, inspecteur général honoraire de l'Instruction publique, 11, rue de la Tour, à Paris (16°).
1902. PUX (Victor), ancien élève de l'École Polytechnique, professeur de mathématiques, rue Madame, 54, à Paris (6°).
1896. QUIQUET, actuaire de la Compagnie *la Nationale*, boulevard Saint-Germain, 9, à Paris (5°).
1893. RABUT, ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue Joseph-Bara, 4, à Paris (6°).
1903. RÉMOINDOS, professeur d'analyse supérieure à la Faculté des Sciences, rue Spyridon Tricoupis, 54, à Athènes (Grèce).
1906. REMY, docteur ès sciences, ingénieur des Mines, rue Jeanne-d'Arc, 25, à Arras (Pas-de-Calais).

1903. RICHARD, docteur ès sciences mathématiques, professeur au lycée, rue de Fonds, 100, à Châteauroux.
1908. RICHARD D'ABONCOURT (DE), anc. élève de l'École Polytechnique, rue Nationale, 74, à Lille.
1908. RISSER, actuaire au Ministère du Travail, rue Sédillot, 5, à Paris (7°).
1903. ROCHE, agrégé de mathématiques, rue d'Assas, 76, à Paris (6°).
1909. ROSENBLATT, docteur en philosophie, rue Basztowa, 19, à Cracovie (Autriche).
1908. ROTHROCK, Professeur à l'Université, à Bloomington (Indiana, États-Unis).
1872. ROUART, ingénieur civil, rue de Lisbonne, 34, à Paris (8°).
1896. ROUGIER, professeur au lycée et à l'École des ingénieurs, rue Sylvabelle, 84, à Marseille.
1906. ROUSIERS, professeur au collège Stanislas, boulevard du Montparnasse, 62, à Paris (14°).
1911. RUDNICKI, licencié ès sciences, avenue du Parc-de-Montsouris, 21, à Paris (14°).
1900. SALTYKOW, professeur à l'Université, à Kharkow (Russie). S. P.
1907. SANIELEVICI, docteur ès sciences, Calca Victorici, 193, à Bucarest (Roumanie).
1872. SARTIAUX, ingénieur en chef des ponts et chaussées, chef de l'exploitation à la Compagnie du chemin de fer du Nord, à Paris.
1885. SAUVAGE, professeur à la Faculté des Sciences de Marseille.
1907. SCHENFLIES, professeur à l'Université, IX, Schumannstrasse, 62, à Francfort (Allemagne).
1897. SCHOU (Erik), ingénieur, Hollaendervez, 12, à Copenhague (Danemark).
1881. SCHOUTE, professeur à l'Université, à Groningue (Hollande).
1901. SEE (Thomas-J.-J.), Observatory Mare Island (Californie).
1896. SÉGUIER (J.-A. DE), docteur ès sciences, rue des Saints-Pères, 56, à Paris (7°).
1882. SÉLIVANOFF (Démétrius), professeur à l'Université, Fontanka, 116, log. 16, à Saint-Petersbourg. S. P.
1900. SERVANT, chargé de conférences à la Sorbonne, à Bourg-la-Reine (Seine).
1908. SHAW (J.-B.), professeur à l'Université, West California, 901, Ave Urbana (Illinois, États-Unis).
1912. SIRE, docteur ès sciences, rue Royer-Collard, 4, à Paris (5°).
1900. SPARRE (comte DE), doyen de la Faculté catholique des Sciences, avenue de la Bibliothèque, 7, à Lyon. S. P.
1909. SPEISER (Andreas), privat-docent à l'Université, Stephansplan, 7, à Strasbourg (Allemagne).
1912. STECKER (H.-F.), professeur de Mathématiques, à Pensylvania State College, Miles St. 306 (Pensylvanie, États-Unis).
1879. STEPHANOS, professeur à l'Université, rue Solon, 20, à Athènes (Grèce).
1898. STÖRMER, professeur à l'Université, Cort Adelers gade, 12, à Christiania (Norvège).
1904. SUDRIA, directeur de l'École préparatoire à l'École supérieure d'électricité, rue de Staël, 26, à Paris (14°).
1904. SUNDMAN, maître de conférences à l'Université, Fredriksgatan, 19, à Helsingfors (Finlande).
1872. SYLOW, professeur à l'Université, Majorstuveien, 16 III, à Christiania (Norvège). S. P.
1909. TARNARIDER (M^{lle}), licenciée ès sciences, Amdtstrasse 18 II, à Göttingen (Allemagne).
1882. TARRY (G.), membre de la Société Philomathique de Paris, boulevard de Strasbourg, 182, au Havre. S. P.
1899. THYBAUT, professeur au lycée Henri IV, boulevard St-Germain, 50, à Paris (5°).
1910. TIMOCHENKO, professeur à l'Institut Empereur Alexandre II, à Kiew (Russie).
1896. TORRES, membre de l'Académie des Sciences, Valgame Dios, 3, à Madrid (Espagne).
1893. TOUCHE, ancien lieutenant-colonel d'artillerie, rue Truffault, 23, à Paris (17°).

Date
de
admission.

1910. TRAYNARD, professeur à la Faculté des Sciences de Besançon.
1872. TRESCA, ingénieur en chef des ponts et chaussées en retraite, rue du Général Henrion-Berthier, 7, à Neuilly-sur-Seine (Seine).
1896. TRESSE, professeur au collège Rollin, rue Mizon, 6, à Paris (15°).
1907. TRIPIER (H.), licencié ès sciences, rue Alphonse-de-Neuville, 17, à Paris (17°).
1911. TURRIÈRE, docteur ès sciences, professeur au lycée de Poitiers.
1893. VALLÉE-POUSSIN (Ch.-J. DE LA), membre de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, professeur à l'Université, rue de la Station, 149, à Louvain (Belgique).
1904. VANDEUREN, professeur à l'École militaire, avenue Macan, 16, à Bruxelles.
1905. VAN VLECK, professeur de Mathématiques, University of Wisconsin, à Madison (Wisconsin, États-Unis).
1897. VASSILAS-VITALIS (J.), professeur à l'École militaire supérieure, rue Socrate, 11A, à Athènes (Grèce).
1898. VASSILIEF, membre du Conseil d'État, Vassili Ostrow ligne 12, m. 19, à Saint-Petersbourg (Russie).
1909. VEIL (M^{lle} S.), licenciée ès sciences, boulevard de Strasbourg, 55, à Paris (10°).
1901. VESSIOT, professeur à la Faculté des Sciences, boulevard Raspail, 234, à Paris (14°).
1911. VILLAT, maître de conférences à l'Université de Montpellier.
1888. VOLTERRA (Vito), professeur à l'Université, via in Lucina, 17, à Rome.
1900. VUIBERT, éditeur, boulevard Saint-Germain, 63, à Paris (5°).
1880. WALCKENAER, ingénieur en chef des mines, boulevard St-Germain, 218, à Paris (7°).
1907. WEBER (Émile), rue du Mambour, 10, à Liège (Belgique).
1879. WEILL, directeur du collège Chaptal, boulevard des Batignolles, 45, à Paris (8°).
1906. WILSON (E.-B.), professeur à l'Institut de technologie, à Boston (Massachusetts, États-Unis).
1911. WINTER, avenue Kléber, 29, à Paris (16°).
1909. WOODS (F.-S.), professeur à l'Institut de Technologie, à Boston (Massachusetts, États-Unis).
1878. WORMS DE ROMILLY, inspecteur général des mines, en retraite, quai de Passy, 14, à Paris (16°).
1882. ZABOUDSKI, membre du Comité d'artillerie et professeur à l'Académie d'Artillerie Znamenskaïa, 22, à Saint-Petersbourg (Russie).
1890. ZAREMBA, professeur à la Faculté de Philosophie de l'Université, rue Sw. Anny, 12, à Cracovie (Autriche).
1903. ZERVOS, professeur agrégé à l'Université, rue Acharnon, 41, à Athènes (Grèce).
1881. ZEUTHEN, professeur à l'Université, Forchhammers Vej. 12, à Copenhague (Danemark).
1898. ZIWET, professeur de Mathématiques à l'Université de Michigan, South Ingalls street, 644, à Ann Arbor (Michigan, États Unis).
1911. ZOARD DE GÉOCZE, professeur à Ungvár (Hongrie).
1909. ZORETTI, professeur de Mécanique à la Faculté des Sciences de Caen.

Membre décédé en 1911 : M. ROUQUET.

SOCIÉTAIRES PERPÉTUELS DÉCÉDÉS.

BENOIST. — BIENAYMÉ. — BISCHOFFSHEIM. — BORCHARDT. — CANET. — CHASLES.
CLAUDE-LAFONTAINE. — GAUTHIER-VILLARS. — HALPHEN. — HERMITE. — HIRST.
LAFFON DE LADÉBAT. — MANNHEIM. — PERRIN (R.). — RAFFY. — TANNERY (PAUL).
TCHEBICHEF. — VIELLARD.

LISTE

DES

PRÉSIDENTS DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

DEPUIS SA FONDATION.

MM.	
1873	CHASLES.
1874	LAFFON DE LADÉBAT.
1875	BIENAYMÉ.
1876	DE LA GOURNERIE.
1877	MANNHEIM.
1878	DARBOUX.
1879	O. BONNET.
1880	JORDAN.
1881	LAGUERRE.
1882	HALPHEN.
1883	ROUCHÉ.
1884	PICARD.
1885	APPELL.
1886	POINCARÉ.
1887	FOURET.
1888	LAISANT.
1889	ANDRÉ (D.).
1890	HATON DE LA GOUPILLIÈRE.
1891	COLLIGNON.
1892	VICAIRE.

MM.	
1893	HUMBERT.
1894	PICQUET.
1895	COURSAT.
1896	KÉNIGS.
1897	PICARD.
1898	LECORNU.
1899	GUYOU.
1900	POINCARÉ.
1901	D'OCAGNE.
1902	RAFFY.
1903	PAINLEVÉ.
1904	CARVALLO.
1905	BOREL.
1906	HADAMARD.
1907	BLUTEL.
1908	PERRIN (R.).
1909	BIOCHE.
1910	BRICARD.
1911	LÉVY (L.).
1912	ANDOYER.

Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels
la Société mathématique de France échange son Bulletin.

Amsterdam.....	Académie Royale des Sciences d'Amsterdam.	Pays-Bas.
Amsterdam.....	Société mathématique d'Amsterdam.	Pays-Bas.
Amsterdam.....	<i>Revue semestrielle des publications mathématiques.</i>	Pays-Bas.
Bâle.....	Naturforschende Gesellschaft.	Suisse.
Baltimore.....	<i>American Journal of Mathematics.</i>	États-Unis.
Berlin.....	Académie des Sciences de Berlin.	Allemagne.
Berlin.....	<i>Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.</i>	Allemagne.
Berlin.....	<i>Journal für die reine und angewandte Mathematik.</i>	Allemagne.
Bologne.....	Académie des Sciences de Bologne.	Italie.
Bordeaux.....	Société des Sciences physiques et naturelles.	France.
Bruxelles.....	Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.	Belgique.
Bruxelles.....	Société scientifique de Bruxelles.	Belgique.
Calcutta.....	Calcutta mathematical Society.	Inde anglaise.
Cambridge.....	Cambridge philosophical Society.	Grande-Bretagne.
Christiania.....	<i>Archiv for Mathematik og Naturvidenskab.</i>	Norvège.
Coïmbre.....	<i>Annaes scientificos da Academia Polytechnica do Porto.</i>	Portugal.
Copenhague.....	<i>Nyt Tidsskrift for Mathematik.</i>	Danemark.
Copenhague.....	<i>Det Kongelige danske videnskabernes selskabs Skrifter.</i>	Danemark
Cracovie.....	Académie des Sciences de Cracovie.	Autriche.
Delft.....	Académie technique.	Pays-Bas.
Édimbourg.....	Société Royale d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Édimbourg.....	Société mathématique d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Gand.....	<i>Mathesis.</i>	Belgique.
Göttingen.....	Société Royale des Sciences de Göttingen.	Allemagne.
Halifax.....	Nova Scotian Institute of Science.	N ^{lle} -Écosse(Canada)
Hambourg.....	Société mathématique de Hambourg.	Allemagne.
Harlem.....	Société hollandaise des Sciences.	Hollande.
Helsingfors.....	Société des Sciences de Finlande.	Finlande.
Kansas.....	Université de Kansas.	États-Unis.
Kasan.....	Société physico-mathématique.	Russie.
Kharkow.....	Annales de l'Université.	Russie.
Kharkow.....	Société mathématique de Kharkow.	Russie.
Leipzig.....	Société Royale des Sciences de Saxe.	Allemagne.
Leipzig.....	<i>Mathematische Annalen.</i>	Allemagne.
Leipzig.....	<i>Archiv der Mathematik und Physik.</i>	Allemagne.
Liège.....	Société Royale des Sciences.	Belgique.
Livourne.....	<i>Periodico di Matematica.</i>	Italie.
Londres.....	Société astronomique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres.....	Société mathématique de Londres.	Grande-Bretagne.

Londres.....	Société Royale de Londres.	Grande-Bretagne.
Luxembourg.....	Institut grand ducal de Luxembourg.	Luxembourg.
Marseille.....	<i>Annales de la Faculté des Sciences.</i>	France.
Mexico.....	Sociedad científica <i>Antonio Alzate.</i>	Mexique.
Milan.....	Institut Royal lombard des Sciences et Lettres.	Italie.
Moscou.....	Société mathématique de Moscou.	Russie.
Munich.....	Académie des Sciences de Munich.	Bavière.
Naples.....	Académie Royale des Sciences physiques et mathématiques de Naples.	Italie.
New-Haven.....	Académie des Sciences et Arts du Connecticut.	États-Unis.
New-York.....	American mathematical Society.	États-Unis.
Odessa.....	Société des naturalistes de la Nouvelle-Russie.	Russie.
Palerme.....	<i>Rendiconti del Circolo matematico.</i>	Italie.
Paris.....	Académie des Sciences de Paris.	France.
Paris.....	Association française pour l'avancement de Sciences.	France.
Paris.....	Société philomathique de Paris.	France.
Paris.....	<i>Bulletin des Sciences mathématiques.</i>	France.
Paris.....	<i>Journal de l'École Polytechnique.</i>	France.
Paris.....	Institut des Actuaire français.	France.
Paris.....	<i>Intermédiaire des Mathématiciens.</i>	France.
Pise.....	École Royale Normale supérieure de Pise.	Italie.
Pise.....	Université Royale de Pise.	Italie.
Pise.....	<i>Il Nuovo Cimento.</i>	Italie.
Prague.....	Académie des Sciences de Bohême.	Autriche.
Prague.....	<i>Casopis pro pěstování matematiky a fysiky.</i>	Autriche.
Prague.....	Société mathématique de Bohême.	Autriche.
Princeton.....	<i>Annals of Mathematics.</i>	New-Jersey, États-Unis
Rennes.....	<i>Travaux de l'Université.</i>	France.
Rome.....	Académie Royale des <i>Lincei.</i>	Italie.
Rome.....	Società italiana delle Scienze.	Italie.
Rome.....	Società per il progresso delle Scienze.	Italie.
Saint-Petersbourg.	Académie Impériale des Sciences.	Russie.
Sophia.....	<i>Annuaire de l'Université de Sophia.</i>	Bulgarie.
Stockholm.....	<i>Acta mathematica.</i>	Suède.
Stockholm.....	<i>Bibliotheca mathematica.</i>	Suède.
Tokyo.....	Mathematico-physical Society.	Japon.
Toulouse.....	<i>Annales de la Faculté des Sciences.</i>	France.
Turin.....	Académie des Sciences.	Italie.
Upsal.....	Société Royale des Sciences d'Upsal.	Suède.
Varsovie.....	Prace Matematyczne Fizyczne.	Russie.
Venise.....	Institut Royal des Sciences, Lettres et Arts.	Italie.
Vienne.....	Académie Impériale des Sciences de Vienne.	Autriche.
Vienne.....	<i>Monatshefte für Mathematik und Physik.</i>	Autriche.
Zagreb (Agram) ..	Académie Sud-Slave des Sciences et Beaux-Arts	Autriche-Hongrie.
Zurich.....	Naturforschende Gesellschaft.	Suisse.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 8 NOVEMBRE 1911.

PRÉSIDENCE DE M. BRICARD.

Communication :

M. Bricard : *Sur les arcs d'ellipse à différence rectifiable.*

L'auteur donne une démonstration très simple des théorèmes de Chasles et d'autres propositions relatives à ces arcs.

SÉANCE DU 22 NOVEMBRE 1911.

PRÉSIDENCE DE M. FONTENÉ.

Élection :

Est élu, à l'unanimité, membre de la Société : M. Bratu, présenté par MM. E. Picard et T. Lalesco.

Communications :

M. E. Cahen : *Sur l'irrationalité des sommes des séries dont le terme général est une fonction rationnelle de l'indice.*

La somme d'une telle série $\sum \frac{f(n)}{g(n)}$ s'exprime au moyen de nombres rationnels, des coefficients de $f(n)$ et de $g(n)$, des racines de $g(n)$, de fonctions rationnelles, de la fonction $h(x)$ dérivée

logarithmique de la fonction eulérienne Γ , enfin des dérivées de $h(x)$ jusqu'à un certain ordre.

Il résulte de là que l'étude des irrationalités que présentent les séries en question est ramenée à celle des irrationalités que présentent la fonction h et ses dérivées. Cette étude n'est pas faite. L'auteur la commence par le théorème suivant : *Pour des valeurs rationnelles de x , la fonction $h(x)$ s'exprime au moyen de nombres algébriques, de la constante d'Euler et de fonctions logarithmiques.*

Ceci donne la somme de la série lorsque les racines du dénominateur sont rationnelles et d'ordre 1.

L'auteur examine encore plusieurs cas où la somme de la série se ramène à des transcendentes connues.

Lorsque $g(n)$ a ses racines commensurables, mais multiples, la somme se ramène à des transcendentes, entre lesquelles l'auteur établit quelques relations.

D'ailleurs ces résultats ne présentent pas qu'un intérêt purement théorique. Le calcul de l'expression que l'on trouve dans certains cas pour la somme d'une série est souvent plus simple que le calcul direct.

M. Lebesgue : *Sur le théorème de la moyenne de Gauss.*

Ce théorème s'exprime dans le cas de deux variables x et y par la relation

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi r^2} \int \int_G f(x_1, y_1) dx_1 dy_1,$$

G étant un cercle de centre (x, y) et de rayon r . La fonction f étant supposée continue ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres, la relation de Gauss est la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction f soit harmonique. M. Lebesgue complète un peu ce résultat en remarquant qu'il suffit de supposer que f est sommable (ce qui est nécessaire pour que la relation ait un sens) pour que le théorème subsiste. Même, dans des conditions assez larges, il suffit que cette relation de Gauss soit vérifiée en chaque point (x, y) pour une seule valeur $r(x, y)$ de r . Ceci conduit à essayer de calculer par le procédé suivant la fonction harmonique prenant sur la frontière d'un domaine D les mêmes valeurs qu'une fonction continue donnée f : à chaque point (x, y) intérieur à D , attachons une circonférence C n'ayant aucun point extérieur à D , de centre (x, y) et de rayon $r(x, y)$; $r(x, y)$ est supposée continue. De f nous déduisons une

fonction f_1 par l'égalité

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \frac{1}{\pi r^2(x, y)} \int \int_{C(x, y)} f(x_1, y_1) dx_1 dy_1 \\ &= \int \int_D K_1(x, y; x_1, y_1) dx_1 dy_1, f(x_1, y_1), \end{aligned}$$

$K_1(x, y; x_1, y_1)$ étant égal à $\frac{1}{\pi r^2(x, y)}$ quand (x_1, y_1) est intérieur à D et à zéro dans le cas contraire. De même, de f_1 on déduira f_2 , de f_2 on déduira f_3 , ... On a

$$f_i(x, y) = \int \int_D K_i(x, y; x_1, y_1) f(x_1, y_1) dx_1 dy_1$$

en posant

$$K_i(x, y; x_1, y_1) = \int \int_D K_1(x, y; \alpha, \beta) K_{i-1}(\alpha, \beta; x_1, y_1) d\alpha d\beta.$$

Les fonctions f_i tendent vers la fonction cherchée pour les domaines D tels que le problème posé soit possible pour toute fonction continue $f(x, y)$.

M. Montel : *Sur des généralisations des théorèmes de MM. Picard et Landau.*

Des travaux récents dus principalement à MM. Landau, Carathéodory, Schottky, Hurwitz ont remarquablement complété les théorèmes de M. Picard sur les points singuliers essentiels. Ces travaux sont relatifs à des fonctions qui ne prennent jamais ni la valeur zéro, ni la valeur un à l'intérieur d'un cercle où elles sont holomorphes. M. Montel montre comment ces propositions peuvent être étendues au cas où les fonctions prennent un nombre limité de fois les valeurs zéro et un dans tel cercle. Par exemple, les fonctions $f(x)$, holomorphes dans un cercle de rayon R , prenant au centre la valeur α_0 et ne prenant pas plus de p fois les valeurs zéro et un dans ce cercle sont, dans un cercle concentrique de rayon θR ($0 < \theta < 1$), inférieures en module à un nombre $M(\alpha_0, p, \theta, \theta')$, en désignant par $\theta'R$ la plus courte distance au centre des points pour lesquels $f(x)$ est égale à zéro ou à un. Sous certaines conditions, ces résultats peuvent encore s'étendre au cas où $f(x)$ prend une infinité de fois les valeurs zéro et un dans le cercle.

SÉANCE DU 13 DÉCEMBRE 1911.

PRÉSIDENCE DE M. FOUCHÉ.

SÉANCE DU 20 DÉCEMBRE 1911.

PRÉSIDENCE DE M. L. LÉVY.

Communications ;

M. Cartan : *Sur les caractéristiques de certains systèmes d'équations aux dérivées partielles.*

Lorsqu'un système d'équations aux dérivées partielles *en involution* à un nombre quelconque de fonctions inconnues de n variables indépendantes jouit de la propriété que son intégrale générale ne dépend que de fonctions arbitraires d'un argument, il existe r familles de caractéristiques à $n - 1$ dimensions, r désignant le nombre des fonctions arbitraires qui entrent dans l'intégrale générale. Chaque intégrale peut être regardée de r manières différentes comme engendrée par des caractéristiques dépendant d'une constante arbitraire.

Dans certains cas, le nombre de ces familles de caractéristiques peut être réduit, certaines familles devenant doubles, triples, etc. Ces cas de réduction sont analogues à ceux qui se présentent dans la réduction d'une substitution linéaire à sa forme normale et la recherche des caractéristiques dépend d'ailleurs d'une telle réduction.

M. Montel : *Sur une nouvelle démonstration d'un théorème de M. Picard.*

Il s'agit du théorème relatif aux valeurs que prend une fonction uniforme dans le voisinage d'un point essentiel isolé. M. Montel montre d'abord que les fonctions $f(x)$, holomorphes dans un anneau de centre origine et limitées par des cercles de rayons $\frac{R}{2}$ et $2R$, qui prennent en un point situé à la distance R de l'origine une valeur de module inférieur à α et ne prennent jamais dans l'anneau ni la

valeur zéro ni la valeur un, sont, sur le cercle concentrique à l'anneau et de rayon R , inférieures en module à un nombre $M(\alpha)$, indépendant de R . D'après le théorème de Weierstrass, il existe une infinité de points P ayant pour unique point limite l'origine en chacun desquels le module d'une fonction $f(x)$, holomorphe autour de l'origine qui est un point essentiel, est inférieur à α . Si la fonction ne prend jamais ni la valeur zéro ni la valeur un autour de l'origine, on en déduit qu'elle est bornée sur toutes les circonférences de centre origine et passant par les points P et, par conséquent, bornée autour de l'origine qui ne peut donc être un point singulier.

SÉANCE DU 10 JANVIER 1912.

PRÉSIDENCE DE M. ANDOYER.

La Société, réunie en Assemblée générale, procède au renouvellement du Bureau et d'une partie du Conseil : elle entend le Rapport de la Commission des comptes et en approuve les conclusions à l'unanimité.

Élection :

Est élu, à l'unanimité, membre de la Société, M. J. Sire, présenté par MM. Vessiot et Montel.

Communication :

M. Halphen : *Sur un système différentiel relatif au problème des potentiels des accélérations d'ordre supérieur.*

Il s'agit de trouver les intégrales communes à deux équations aux dérivées partielles du second ordre que l'auteur a précédemment rencontrées; on peut le faire en ramenant le problème à la recherche de deux développables, intégrales d'une même équation du premier ordre, liées entre elles par une relation géométrique simple. Une des solutions que donne cette méthode est le mouvement d'un point sur

une hyperbole équilatère qui a déjà été signalé. Une marche analogue peut s'appliquer à des équations d'un type plus général.

L'auteur se propose de revenir prochainement sur ce sujet, particulièrement sur les remarques que M. Cartan a bien voulu lui faire.

SÉANCE DU 24 JANVIER 1912.

PRÉSIDENCE DE M. ANDOYER.

Communications :

M. Hadamard : I. *Sur les variations unilatérales et les principes du calcul des variations.*

Il est aujourd'hui bien connu que la considération des variations successives ne suffit pas *a priori*, comme les successeurs de Lagrange avaient été tentés de le croire, à décider du maximum ou du minimum d'une intégrale.

Un des exemples les plus simples et les plus généraux de ce fait est fourni, comme M. Hadamard a déjà eu l'occasion de le remarquer ⁽¹⁾, par les problèmes de *variation unilatérale*.

L'auteur expose comment, en outre, sur cet exemple, la manière dont le raisonnement en question est mis en défaut apparaît avec clarté. On voit dans certaines déformations continues du contour, l'intégrale commencer par décroître par exemple, puis augmenter jusqu'à une valeur supérieure à celle qu'elle avait initialement.

II. *Sur les extrémales du problème isopérimétrique dans le cas des intégrales doubles.*

On sait ⁽²⁾ que le problème isopérimétrique plan, relatif à deux intégrales dont l'une a la forme générale

$$(1) \quad I_0 = \int f(x, y, dx, dy)$$

⁽¹⁾ Voir *Leçons sur le calcul des variations*, nos 367, 388 (p. 447-448 et 470-471).

⁽²⁾ Voir *Ann. Sc. Éc. Norm. sup.*, 3^e série, t. XXIV, 1907, p. 203 et suiv.

(f vérifiant les conditions classiques pour que le problème soit régulier), tandis que l'autre est une intégrale curviligne du type élémentaire

$$(2) \quad I_1 = \int P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

conduit à des conclusions d'une remarquable simplicité lorsqu'on considère des extrémales correspondant à de grandes valeurs du paramètre auxiliaire l par lequel on ramène l'extrémum (lié) de I_0 pour $I_1 = \text{const.}$, ou inversement, à l'extrémum libre de $I_0 + lI_1$. Les extrémales se ferment approximativement aux environs d'un de leurs points : à des infiniment petits d'ordre supérieur près, elles sont semblables à une courbe qu'on peut construire, *a priori*, par de simples différentiations et éliminations, la *figuratrice* du problème, c'est-à-dire la polaire réciproque de la courbe

$$f(x, y, \xi, \eta) = 1$$

(où x, y sont regardés comme des constantes et ξ, η comme des coordonnées cartésiennes) par rapport au cercle de rayon 1 ayant l'origine pour centre.

Comment les choses se passeront-elles si, au lieu d'intégrales simples, on envisage des intégrales doubles, l'une de la forme générale

$$(3) \quad \begin{cases} I_0 = \int f(x, y, z, dy dz, dz dx, dx dy) \\ = \int f\left[(x, y, z, \frac{D(y, z)}{D(u, v)}, \frac{D(z, x)}{D(u, v)}, \frac{D(x, y)}{D(u, v)}]\right] du dv \end{cases}$$

(f étant une fonction positivement homogène et de premier degré); l'autre de la forme particulière

$$(4) \quad I_1 = \int P(x, y, z) dy dz + Q dz dx + R dx dy?$$

En opérant comme dans le cas des intégrales simples, on arrive au résultat suivant :

Soit encore la *figuratrice* du problème, polaire réciproque de la surface,

$$(5) \quad f(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = 1$$

par rapport à la sphère de rayon 1 de l'espace, lieu du point de coordonnées cartésiennes ξ, η, ζ .

Soit (X, Y, Z) un point quelconque de cette figuratrice.

Les surfaces cherchées (lorsque le paramètre l est très grand), une fois agrandies dans le rapport l , peuvent être considérées comme liées à la surface (5) par les relations

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} k \frac{D(y, z)}{D(u, v)} = \frac{D(y, Z)}{D(u, v)} - \frac{D(z, Y)}{D(u, v)}, \\ k \frac{D(z, x)}{D(u, v)} = \frac{D(z, X)}{D(u, v)} - \frac{D(x, Z)}{D(u, v)}, \\ k \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \frac{D(x, Y)}{D(u, v)} - \frac{D(y, X)}{D(u, v)}. \end{array} \right.$$

Ces relations peuvent s'interpréter d'une manière très simple; elles expriment :

1° Que les surfaces (x, y, z) et (X, Y, Z) se correspondent par plans tangents parallèles;

2° Que si, à partir d'un point de l'une d'elles, on se déplace de manière que les déplacements correspondants sur les deux surfaces soient parallèles, ce qui peut se faire de deux manières différentes, et qu'on désigne par S_1 le rapport du déplacement sur la première surface à son correspondant sur la seconde, S_2 désignant le rapport analogue relatif à la seconde direction qui jouit de la même propriété, on a

$$\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} = k.$$

Le problème de Géométrie ainsi posé est tout à fait analogue à la recherche des *surfaces à courbure moyenne constante*, recherche à laquelle il se réduit lorsque la première surface (X, Y, Z) est une sphère, S_1 et S_2 n'étant alors autres que les rayons de courbure principaux de la seconde surface. Cette analogie conduit immédiatement à une simplification notable de la question.

On sait, en effet, que la détermination des surfaces à courbure moyenne constante se ramène aisément à celle des surfaces à courbure totale constante, moyennant la considération d'une surface parallèle à la surface cherchée.

Cet artifice s'applique de lui-même à la question actuelle. Par le point (x, y, z) menons un segment de composantes $-\lambda X, -\lambda Y, -\lambda Z$; autrement dit, posons

$$x = \lambda X + x_1, \quad y = \lambda Y + y_1, \quad z = \lambda Z + z_1.$$

Le lieu du point (x, y, z) est une troisième surface qui correspondra encore aux deux premières par plans tangents parallèles, mais qui,

cette fois, sera telle que les aires homologues décrites par le point (X, Y, Z) et par le point (x_1, y_1, z_1) soient dans un rapport constant.

On peut encore dire qu'on *connaîtra la courbure totale de cette troisième surface en fonction des cosinus directeurs du plan tangent.*

La détermination d'une surface ainsi définie dépend, comme on sait, d'une équation de Monge-Ampère, dont les caractéristiques sont les lignes asymptotiques. Minkowski a démontré que le problème ne peut admettre plus d'une solution telle que la surface soit fermée. Il en est donc de même du problème actuel, l'unique solution fermée étant (à une homothétie près) la figuratrice elle-même.

M. Cartan : *Sur les groupes de transformation de contact et la Cinématique nouvelle.*

Dans toute cinématique, il existe des systèmes de référence (espace, temps) par rapport auxquels chaque *événement* est défini par quatre coordonnées x, y, z, t , les trois premières localisant l'événement dans l'espace et la quatrième dans la durée. On arrive à la cinématique nouvelle de Lorentz en postulant l'existence d'une infinité de systèmes de référence, *non tous invariablement liés les uns aux autres*, et jouissant de la propriété suivante : *par rapport à chacun de ces systèmes, tout rayon lumineux se propage (dans le vide) d'un mouvement rectiligne et uniforme (dont la vitesse peut être supposée égale à l'unité).*

Par rapport à un système de référence donné on peut représenter chaque événement par une sphère *orientée* (c'est-à-dire dont le rayon a un signe) de centre (x, y, z) et de rayon t . Le passage d'un système de référence à un autre revient alors à une transformation portant sur l'ensemble des sphères orientées, *et cette transformation change deux sphères orientées tangentes en deux sphères orientées tangentes*; elle change évidemment aussi les sphères de rayon infini en sphères de rayon infini. On obtiendra donc le *groupe* de la cinématique de Lorentz en cherchant le plus grand groupe de transformation de contact changeant les sphères orientées en sphères orientées. Or ce groupe est bien connu : c'est la généralisation, dans l'espace, du *groupe de Laguerre* qui est engendré dans le plan par la composition d'un nombre quelconque de transformations par semi-droites réciproques.

Les phénomènes de contraction apparente d'un système en mouvement sont mis en évidence par la représentation géométrique précédente.

SÉANCE DU 14 FÉVRIER 1911.

PRÉSIDENTE DE M. ANDOYER.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société, M. E.-O. Lovett, présenté par MM. Darboux et Hadamard; M. Browne, présenté par MM. Hadamard et Montel.

Communications :

M. Volterra : *Sur le théorème de Stokes.*

M. Volterra considère d'abord le théorème de Stokes dans le cas de trois et de n variables et en fait l'extension au cas d'un nombre infini de variables.

Soit

$$X| [x(t), \eta]|$$

une quantité qui dépend de toutes les valeurs de la fonction $x(t)$ dans l'intervalle (a, b) et qui dépend en outre d'un paramètre η qui varie entre les mêmes limites.

Représentons par

$$X'| [x(t), \eta, \xi]|$$

la dérivée de X considérée comme une quantité qui dépend de $x(t)$, en changeant cette fonction dans le domaine du point $t = \xi$; c'est-à-dire que le second paramètre qui paraît dans l'expression précédente représente l'indice du point de l'intervalle (a, b) où l'on a calculé la dérivée.

Considérons une aire plane simplement connexe σ dont les points sont individualisés par les variables u, v . Les points du contour sont individualisés par la variable s . Cela posé, supposons qu'à chaque point de l'aire σ et du contour corresponde une fonction $x(t)$ finie qui varie avec continuité. On aura alors $x(t, u, v)$ qui sera une fonction finie et continue des trois variables et au contour nous aurons $u(t, s)$.

Le théorème donné par M. Volterra est le suivant

$$\begin{aligned} & \int_s ds \int_a^b X[x(t, s), \eta] \left| \frac{\partial x(\eta, s)}{\partial s} \right| d\eta \\ &= \frac{1}{2} \int_{\omega} du dv \int_a^b \int_a^b \left\{ X'[x(t, u, v), \eta, \xi] - X'[x(t, u, v), \xi, \eta] \right\} \\ & \quad \frac{d(x(\eta, u, v), x(\xi, u, v))}{d(u, v)} d\xi d\eta. \end{aligned}$$

On tire de là que la condition nécessaire et suffisante pour que

$$\int_a^b X[x_a^b(t), \eta] |\delta x(\eta)| d\eta = \delta Y[x_a^b(t)],$$

c'est-à-dire pour que le premier membre soit la différentielle d'une fonction de ligne est que

$$X'[x_a^b(t), \eta, \xi] = X'[x_a^b(t), \xi, \eta].$$

On peut aussi déduire de la formule précédente la manière de calculer une fonction de ligne lorsque sa dérivée est donnée.

L'auteur ajoute qu'on peut par là chercher à étendre la théorie de Mayer.

Il en prend l'occasion pour parler de l'extension des parenthèses de Poisson au cas des fonctions de lignes et énonce l'extension du théorème de Jacobi sur les systèmes en involution.

M. E. Picard : *Sur les systèmes de deux fonctions uniformes d'une variable liées par une relation algébrique.*

M. E. Picard a démontré en 1883 qu'il ne peut exister de relation algébrique de genre supérieur à un entre deux fonctions uniformes d'une variable ayant un point singulier essentiel isolé. Il a utilisé récemment (*Comptes rendus*, 15 janvier 1912) la méthode suivie, pour démontrer la proposition suivante, analogue à celle par laquelle M. Landau a généralisé, en 1904, le premier théorème de M. Picard sur les fonctions entières : Soient $f(x, y) = 0$ une courbe de genre au moins égal à deux ; (a, b) un point de cette courbe ; on remplace dans l'équation, x par une fonction méromorphe de z autour de l'origine

$$x = a + \alpha_1 z + \dots,$$

et l'on tire la valeur y de z prenant pour $z = 0$ la valeur b . Le rayon d'un cercle de centre origine dans lequel les deux fonctions x et y de z sont simultanément méromorphes a une limite supérieure $R(a, a_1)$ qui dépend seulement de a et a_1 .

L'auteur énonce maintenant la proposition plus complète : si les fonctions méromorphes x et y de z sont telles que le point (x, y) ne coïncide jamais avec aucun de q points fixés sur la surface de Riemann correspondant à la courbe, lorsque z est dans un cercle de centre origine, le rayon R de ce cercle a une limite supérieure ne dépendant que de a et a_1 .

En appliquant le même genre de considérations à une suite infinie

$$(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n), \dots$$

de couples de fonctions méromorphes de z dans un cercle C de centre origine et vérifiant l'équation de la courbe, M. Picard obtient la proposition suivante : si le couple (x_n, y_n) a une limite pour une infinité de points C possédant au moins un point de condensation à l'intérieur de C , le couple (x_n, y_n) aura une limite pour tous les points de l'intérieur de C et les coordonnées de ce couple sont des fonctions méromorphes de z .

M. Carvallo ⁽¹⁾ : *Sur la masculinité dans les naissances humaines.*

Le nombre des naissances masculines G l'emporte sur celui des naissances féminines F . Le rapport $\frac{G}{F}$ est la *masculinité*. Est-ce une constante naturelle? La chose est vraisemblable. Pourtant la masculinité donnée par la statistique varie avec le temps, le lieu, les conditions d'existence : celle des enfants illégitimes est moindre que celle des enfants légitimes!

La statistique serait-elle défectueuse? — Oui. C'est d'abord la réponse du calcul des probabilités. Si l'on considère en effet divers groupes comparables entre eux, les écarts des chiffres partiels avec la moyenne générale sont trop grands, relativement à la loi des écarts de Bernoulli.

Mais d'où vient l'erreur? — Des embryons. Voici pourquoi : Dans la première enfance, les garçons sont plus fragiles que les filles, c'est

(¹) A propos de son Livre : *Le calcul des probabilités et ses applications*, dont il fait hommage à la Société.

un fait connu. Il en est de même pendant la gestation, car la masculinité des enfants nés morts l'emporte sur celle des enfants nés vivants : tandis que les naissances masculines observées à Paris l'emportent de 6 pour 100 seulement sur les naissances féminines, le nombre des garçons atteint le triple de celui des filles chez les embryons nés dans les quatre premiers mois de la gestation.

Dès lors, les inégalités de la statistique s'expliquent aisément : tandis que tous les enfants vivants sont déclarés, la plupart des morts échappent à la statistique. De là un déchet dans la masculinité. Le déchet est plus grand chez les enfants illégitimes que chez les enfants légitimes pour deux raisons qu'on devine : la mortalité est plus forte et les déclarations plus défectueuses. La situation mauvaise des parents en est la cause. De là l'infériorité apparente des illégitimes sur les légitimes au point de vue de la masculinité.

Bien d'autres faits viennent confirmer notre théorie, notamment celui-ci.

La masculinité statistique diminue en même temps que la natalité. C'est qu'en diminuant à dessein la charge des enfants, on atteint surtout les garçons parce qu'ils sont plus fragiles que les filles.

Pour conclure, *la masculinité des enfants nés vivants* est fortement atteinte par les mauvaises conditions sociales, mais tout porte à croire que *la masculinité des conceptions* humaines est sensiblement constante. Pour établir cette loi naturelle d'une façon rigoureuse, il faudrait assurer un contrôle certain des naissances embryonnaires.

M. Borel : *Sur la mesure des ensembles bien définis.*

M. Borel résume ses recherches récentes sur la théorie des fonctions de variables réelles et la définition nouvelle de l'intégrale qu'il en a déduite. Un domaine simple est, par définition, la réunion d'un nombre fini d'ensembles élémentaires (rectangles dans le cas de deux dimensions). Tout ensemble borné définissable est un domaine simple, à ε près. Toute fonction bornée diffère de moins de ε d'un polynôme dans un domaine simple différant de moins de ε de l'ensemble (borné) où elle est définie; on peut dire quelle se réduit à un polynôme, à deux ε près. L'intégration d'une fonction bornée se ramène ainsi à l'intégration d'un polynôme dans un domaine simple, c'est-à-dire à une intégrale qui s'exprime au moyen de l'intégrale indéfinie du polynôme.

SÉANCE DU 28 FÉVRIER 1912.

PRÉSIDENCE DE M. ANDOYER.

Élection :

Est élu, à l'unanimité, membre de la Société, M. de Pange, présenté par MM. Carvallo et Humbert.

Communications :

M. Borel : *Sur l'ordre des ensembles réguliers de mesure nulle et les propriétés des fonctions monogènes définies dans certains ensembles.*

M. Borel expose de nouvelles recherches sur l'extension de la définition de la fonction monogène. La définition de Cauchy (monogénéité) conduit aux mêmes conséquences essentielles que l'analyticité de Weierstrass, même si elle n'est vérifiée que dans certains ensembles qui peuvent n'être denses nulle part. Pour définir d'une façon précise ces ensembles, il faut indiquer une classification des ensembles de mesure nulle, classification qui paraît devoir être aussi importante que la notion même de mesure. Cette classification est basée sur la nature asymptotique de la convergence des séries d'ensembles élémentaires réguliers, au moyen desquelles l'ensemble de mesure nulle peut être défini.

M. Hadamard : *Sur la généralisation de la notion de fonction analytique.*

Indépendamment des extensions qu'on peut apporter à cette notion dans les voies indiquées par M. Borel, il en est d'autres auxquelles on est conduit par les analogies qui suggère l'étude des équations aux dérivées partielles.

Si, en effet, on considère d'abord l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

et si l'on se pose, pour cette équation, le *problème de Cauchy*, c'est- dire si l'on cherche à déterminer une solution de l'équation par les

conditions

$$V = f(y), \quad \frac{\partial V}{\partial x} = g(y) \quad \text{pour } x = 0,$$

on constate que le problème n'est pas toujours possible et que, si l'on donne la fonction $f(y)$, la seconde fonction $g(y)$ est déterminée à une fonction analytique près.

Or M. Holmgren s'est posé un problème tout semblable pour l'équation de la chaleur. Se donnant la fonction f , il constate encore que la fonction g est de la forme

$$g = g_1 + g_2,$$

où le terme g_1 est déterminé du moment qu'on se donne f , tandis que g_2 reste arbitraire dans une certaine mesure.

Les conditions auxquelles on doit satisfaire sont :

- 1° Que toutes les dérivées $g_2^{(n)}(y)$ de g_2 existent;
- 2° Que leurs valeurs absolues soient inférieures à une certaine fonction de l'ordre n de dérivation.

Mais la limitation ainsi apportée à la grandeur de $|g_2^{(n)}(y)|$ est moins restrictive que celle qu'entraînerait l'analyticité. On peut dès lors se demander si elle partage avec elle la propriété de déterminer le prolongement d'une fonction, c'est-à-dire si une fonction dont on sait qu'elle doit satisfaire aux conditions de M. Holmgren et qui est donnée dans un certain intervalle est, par cela même, connue dans un intervalle adjacent au premier.

La réponse est négative : on peut, sans troubler les conditions en question, prolonger une fonction de toutes sortes de manières.

Il y aurait lieu, on le voit, de rechercher quelles conditions de grandeur, imposées aux dérivées successives d'une fonction de variable réelle, entraîneraient la détermination du prolongement de cette fonction et si même les conditions requises pour l'analyticité ne seraient pas nécessaires pour qu'il en soit ainsi.

D'autres types d'équations aux dérivées partielles seraient, d'autre part, intéressants à examiner au même point de vue.

M. Hadamard : *Sur la loi d'inertie des formes quadratiques.*

On peut rattacher cette loi à des propriétés inhérentes à la forme elle-même (au lieu de donner la démonstration par l'absurde qui est fournie d'ordinaire) en considérant les multiplicités linéaires que l'on

peut tracer sur l'hyperquadrique obtenue en égalant la forme donnée à zéro. Le nombre de dimensions que l'on peut donner à une telle multiplicité linéaire est moins élevé d'une unité que le plus petit nombre de carrés d'un même signe contenus dans cette forme.

M. Lebesgue : *Sur les fonctions permutables de M. Volterra.*

A toute fonction de variable complexe

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots,$$

M. Volterra fait correspondre deux autres fonctions de la forme

$$F(z) = a_1 \tilde{f} z + a_2 \tilde{f}^2 z^2 + \dots;$$

les symboles $\tilde{f}^1, \tilde{f}^2, \dots$ désignant les puissances itérées d'une fonction $\tilde{f}$ de deux variables, considérée soit entre des limites variables, soit entre des limites fixes.

L'intégrale de Parseval, qui sert dans la démonstration du théorème de M. Hadamard sur la multiplication des singularités, permet d'exprimer $F(z)$ en fonction de $f(z)$. Et le théorème de M. Hadamard, complété par M. Borel, permet alors de déterminer les points singuliers de $F(z)$ et la nature de ces points.

SÉANCE DU 13 MARS 1912.

PRÉSIDENTE DE M. ANDOYER.

Élection :

Est élu à l'unanimité membre de la Société : M. Stecker, présenté par MM. Van Vleck et Harris Hancock.

Communications :

M. Kœnigs : *Sur l'enseignement de la cinématique.*

M. Kœnigs donne l'exposé le plus simple et le plus logique, en n'employant que des considérations purement cinématiques, des théorèmes fondamentaux de la cinématique du corps solide. (Distribution des vitesses à un instant donné.)

M. Fouché : *Sur deux théorèmes de Ribaucour.*

M. Halphen : *Sur un ellipsographe.*

SÉANCE DU 27 MARS 1912.

PRÉSIDENCE DE M. ANDOYER.

Communications :

M. Ch. N. Moore : *Sur les facteurs de convergence dans les séries doubles et la série double de Fourier.*

L'objet du Mémoire, dont l'auteur communique ici les résultats est : (a) d'étendre aux séries doubles l'idée de la sommabilité d'une série; (b) d'établir un théorème général sur les facteurs de convergence dans les séries doubles; (c) d'établir la sommabilité de la série double de Fourier; (d) de montrer de quelle façon ces résultats peuvent être appliqués à l'étude de certains problèmes de la Physique mathématique.

Étant donnée une série double

$$(1) \quad \sum_{i=1, j=1}^{\infty, \infty} a_{i,j},$$

nous posons

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} s_{m,n} &= \sum_{i=1, j=1}^{m,n} a_{i,j}, \\ S_{m,n}^{(k)} &= \sum_{i=1, j=1}^{m,n} \binom{k+m-i-1}{k-1} \binom{k+n-j-1}{k-1} s_{i,j}, \\ A_{m,n}^{(k)} &= \binom{m+k}{k} \binom{n+k}{k}. \end{aligned} \right.$$

Alors, si la limite

$$(3) \quad \lim_{m,n=\infty} \frac{S_{m,n}^{(k)}}{A_{m,n}^{(k)}}$$

existe, nous disons que la série (1) est sommable (Ck) et que sa valeur est la valeur de la limite (3).

Pour les facteurs de convergence dans les séries doubles, nous avons le théorème suivant, qui est une généralisation d'un théorème de M. T. J. Bromwich pour les facteurs de convergence dans les séries simples.

THÉORÈME. — *Si la série (1) est sommable (Ck) à la valeur S et si, de plus,*

$$(4) \quad \left| \frac{S_{m,n}^{(k)}}{A_{m,n}^{(k)}} \right| < K \quad (m, n = 1, 2, 3, \dots),$$

K étant une constante positive, la série

$$5) \quad \sum_{m=1, n=1}^{\infty, \infty} a_{m,n} f_{m,n}(\alpha, \beta)$$

convergera pour toute valeur de $\alpha, \beta > 0$, et sa valeur $F(\alpha, \beta)$ sera continue pour ces mêmes valeurs et tendra vers S quand α et β tendent vers $+0$, pourvu que les facteurs de convergence

$$(6) \quad f_{m,n}(\alpha, \beta) \quad (m, n = 1, 2, 3, \dots)$$

satisfassent aux conditions suivantes :

$$(a) \quad f_{m,n}(\alpha, \beta) \text{ est continue pour } \alpha, \beta > 0 \text{ et } \lim_{\alpha, \beta \rightarrow +0} f(\alpha, \beta) = 1,$$

$$(b) \quad \sum_{i=\mu_1, j=\nu_1}^{\mu_2, \nu_2} i^k j^k |\Delta_{k+1}^{k+1} f_{i,j}(\alpha, \beta)| < C \quad (\alpha, \beta > 0),$$

$$(c) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} m^k \sum_{\substack{j=\nu_m \\ j=\mu_m \\ i=\nu_n}} j^k |f_{m,j}(\alpha, \beta)| = 0 \quad (\alpha, \beta > 0),$$

$$(d) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^k \sum_{i=\mu_n} i^k |f_{i,n}(\alpha, \beta)| = 0 \quad (\alpha, \beta > 0),$$

$$(e) \quad \lim_{m, n \rightarrow \infty} [m^k n^k f_{m,n}(\alpha, \beta)] = 0 \quad (\alpha, \beta > 0),$$

où C est une constante positive, $\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2$ sont quatre entiers positifs quelconques, et finalement $\mu_m, \nu_m, \mu_n, \nu_n$ sont quatre entiers positifs qui varient, les deux premiers avec m , les deux derniers avec n , d'une façon quelconque.

Le symbole $\Delta_{k+1}^{k+1} f_{i,j}(\alpha, \beta)$ sert pour représenter l'expression suivante :

$$\sum_{r=0, s=0}^{k+1, k+1} (-1)^r (-1)^s \binom{k+1}{r} \binom{k+1}{s} f_{i+r, j+s}(\alpha, \beta).$$

Pour la sommabilité (C_1) de la série double de Fourier nous avons les résultats suivants, qui sont des généralisations des résultats trouvés par M. S. Fejér pour la série simple de Fourier.

Si la fonction $f(x, y)$ est bornée et intégrable dans la région $(-x \leq x \leq \pi, -\pi \leq y \leq \pi)$, le développement de la fonction dans une série double de Fourier sera sommable (C_1) à $f(x, y)$ en chaque point de continuité de $f(x, y)$, et sera uniformément sommable à $f(x, y)$ dans chaque région intérieure à une région de continuité de $f(x, y)$. En un point de discontinuité (x_0, y_0) qui se trouve sur une ligne de

discontinuité telle que la fonction tende vers une valeur définie, quand nous nous approchons du point d'un côté ou de l'autre de la ligne de discontinuité, la série sera sommable en ce point (x_0, y_0) à une valeur qui est la demi-somme des deux valeurs limites, pourvu que la ligne de discontinuité soit une droite. Si la ligne est une courbe ayant une tangente au point (x_0, y_0) , la série sera *restrictivement sommable* à la même valeur, c'est-à-dire que la limite (3) existera et aura cette valeur, pourvu que m et n s'agrandissent en satisfaisant toujours à la relation

$$k < \frac{m}{n} < K,$$

où k et K sont deux constantes positives.

Pour donner une application de ces résultats, on considère le problème suivant : Étant donnée une plaque rectangulaire dont le périmètre est tenu à la température zéro, et dont les températures initiales de tous les points sont connues, nous cherchons la température d'un point quelconque à un instant quelconque.

En s'appuyant sur les résultats que nous venons d'énoncer, on démontre assez facilement que la fonction

$$u(x, y, t) = \frac{4}{bc} \sum_{m=1, n=1}^{\infty, \infty} e^{-a^2 \pi^2 \left(\frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2} \right)} \sin \frac{m \pi x}{b} \sin \frac{n \pi y}{c} \\ \times \int_0^b \int_0^c f(x', y') \sin \frac{m \pi x'}{b} \sin \frac{n \pi y'}{c} dx' dy'$$

est la solution de notre problème.

M. Bricard : I. *Sur une courbe gauche fermée qui traverse tous ses plans rectifiants.*

M. Hadamard avait posé la question de savoir si, sur toute courbe gauche fermée, il existe au moins un point tel que le plan rectifiant en ce point laisse la courbe tout entière du même côté par rapport au plan. M. Bricard définit une courbe gauche pour laquelle cette propriété n'est pas vérifiée.

II. *Sur les courbes sphériques que rencontrent tous les grands cercles de la sphère.*

M. Bricard montre que la longueur minimum d'une telle courbe est égale à la longueur d'un grand cercle. Il donne des indications sur le problème de trouver la longueur minimum des courbes sphériques qui rencontrent tous les cercles de la sphère dont le rayon est supérieur à une longueur fixe.

SÉANCE DU 17 AVRIL 1912.

PRÉSIDENCE DE M. ANDOYER.

Communications :

M. A. Speiser : *Sur le déterminant d'un groupe.*

Il s'agit d'une nouvelle manière d'introduire la notion de *déterminant d'un groupe* et d'en déterminer les facteurs linéaires. Étant donné un groupe quelconque avec les éléments $e_1, e_2, \dots, e_n$ qui satisfont aux relations $e_i e_k = e_l$, on construit la forme linéaire

$$e_1 x_1 + \dots + e_n x_n.$$

Le produit de deux formes est de nouveau une forme linéaire dans les éléments du groupe

$$(1) \quad (e_1 x_1 + \dots + e_n x_n)(e_1 y_1 + \dots + e_n y_n) = (e_1 z_1 + \dots + e_n z_n),$$

$z_1, \dots, z_n$ sont ici des formes bilinéaires des variables (x) et (y)

$$(2) \quad z_1 = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{i\ k\ l} x_k y_l$$

et l'on peut énoncer ce résultat de la manière suivante :

La forme linéaire $(e_1 z_1 + \dots + e_n z_n)$ devient, par la substitution (2), le produit de deux formes semblables.

La question fondamentale est maintenant de savoir *s'il existe des formes entières rationnelles qui possèdent la même propriété, de sorte que la relation*

$$(3) \quad f(x_1, \dots, x_n) f(y_1, \dots, y_n) = f(z_1, \dots, z_n)$$

devient une identité quand on y effectue la substitution (2).

Il y a, pour trouver de telles formes, deux manières qui se complètent d'ailleurs :

1. Il existe des systèmes de n nombres réels ou complexes ordinaires qui satisfont aux relations $e_i e_k = e_l$ du groupe et qui s'appellent les *caractères du groupe*. $e_i = 1$ ($i = 1, \dots, n$) est toujours un caractère. Si le groupe est commutatif, le nombre des systèmes différents est exactement n . Quand on remplace dans la relation (1)

les éléments e_i par les nombres correspondants d'un de ces systèmes, on obtient une forme linéaire qui possède la propriété cherchée et on les obtient même toutes.

2. La seconde manière consiste à résoudre les équations (2) par rapport aux variables y

$$y_i = \frac{Y_i}{X}, \quad X = \left| \sum_{k=1}^n a_{ikl} x_k \right|_{il}$$

Les Y_i sont des formes entières en (x) et (z) . X s'appelle le *déterminant du groupe*.

On en conclut facilement que la relation (3) deviendra une identité par la substitution (4). Soit m le degré de f , on obtient en multipliant par X^m

$$f(x_1, \dots, x_n) f(Y_1, \dots, Y_n) = f(z_1, \dots, z_n) X^m.$$

De cette identité il résulte que f est diviseur de X^m et si f ne contient pas de facteur quadratique, f est nécessairement diviseur de X qui est une forme de degré n .

Pour les groupes commutatifs le problème est ainsi résolu. Le produit des n formes linéaires qui correspondent aux n caractères du groupe donne une forme de degré n qui doit être diviseur de X . Ces deux formes, étant du même degré, ne peuvent différer que par un facteur numérique qui est d'ailleurs égal à 1. C'est un résultat bien connu de cette théorie.

M. Bioche : *Sur les coniques circonscrites à un triangle.*

SÉANCE DU 24 AVRIL 1912.

PRÉSIDENCE DE M. ANDOYER.

Communications :

M. Andoyer : *Sur le calcul numérique.* — M. Andoyer donne quelques indications sur les procédés modernes de calcul à l'aide des Tables logarithmiques.

SÉANCE DU 8 MAI 1912.

PRÉSIDENCE DE M. CARTAN.

Élection :

Est élu à l'unanimité membre de la Société : M. Eisenhardt, présenté par MM. Cartan et Hadamard.

Communication :

M. Galbrun : *Sur certaines équations linéaires aux différences finies.*

La fonction $F(x)$, solution de l'équation aux différences finies

$$f(x+1) - x f(x) = 0$$

est représentée asymptotiquement pour les grandes valeurs de la variable par une série divergente de la forme

$$F(x) = \sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} \left[1 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + \frac{\varepsilon}{x^n} \right].$$

Ce n'est là qu'un cas particulier d'une propriété générale des solutions de l'équation linéaire aux différences finies :

$$(1) \quad A_0 f(x+z) + A_1 f(x+z-1) + \dots + A_r f(x) = 0,$$

dans laquelle $A_0, A_1, \dots, A_r$ sont des polynomes de degré q . Par la transformation de Laplace

$$(2) \quad f(x) = \int_{\alpha}^{\beta} y^{x-1} \varphi(y) dy,$$

la résolution de cette équation se ramène à celle d'une équation différentielle

$$(3) \quad y^q B_0 \frac{d^q \varphi}{dy^q} + y^{q-1} B_1 \frac{d^{q-1} \varphi}{dy^{q-1}} + \dots + B_q \varphi = 0,$$

dans laquelle $B_0, B_1, \dots, B_q$ sont des polynomes en y de degré r ; les

solutions de l'équation (3) admettent pour points singuliers : l'origine, le point à l'infini et les racines du polynome B_0 . On peut faire correspondre à chaque racine α de B_0 , au voisinage de laquelle les solutions de (3) sont régulières, une solution de l'équation (1), en étendant l'intégrale définie (2) à un contour entourant l'origine et le point α et laissant à son extérieur les autres points singuliers des solutions de (3). Les fonctions ainsi formées sont méromorphes et admettent toutes les mêmes pôles ; ce sont des points situés sur plusieurs parallèles à l'axe des abscisses ; ceux qui sont situés sur une même droite ont des abscisses différant d'un entier ; ils s'étendent à l'infini dans les deux sens, si les solutions de (3) sont irrégulières à l'origine, et dans le sens des abscisses négatives seulement, si ces mêmes solutions sont régulières à l'origine.

L'intégrale définissant la solution de (1) correspondant au point α , se divise en deux parties, I_1 et I_2 ; quand le point x s'éloigne à l'infini en restant à droite de l'axe des ordonnées, la première, I_1 , correspondant à la portion du contour voisine de α est telle que le rapport $\frac{I_1}{\alpha^x}$ peut être représenté asymptotiquement par une série divergente ordonnée par rapport aux puissances décroissantes de x . La seconde, I_2 , est telle que le rapport $\frac{I_2}{\alpha^x}$ tend vers 0 comme $e^{-h|x|^k}$, où h et k sont deux nombres positifs ; il en résulte qu'on a

$$(4) \quad f(x) = \alpha^x \left[\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{x} + \dots + \frac{\varepsilon}{x^n} \right],$$

ε tendant vers 0, quand x augmente indéfiniment.

Supposons que les solutions de (3) soient régulières au voisinage de toutes les racines de B_0 dont le module est au plus égal à celui de α ; on peut alors diviser la portion du plan située à gauche de l'axe des ordonnées par des droites issues de l'origine, en plusieurs angles ; dans chacun d'eux, la fonction $f(x)$ est représentée asymptotiquement par la série analogue à (4), provenant de la portion du contour d'intégration voisine d'un des points racines de B_0 , dont le module est inférieur à α , quand le point α s'éloigne à l'infini en restant dans cet angle.

SÉANCE DU 22 MAI 1912

PRÉSIDENCE DE M. FONTENÉ.

Élections :

Sont élus à l'unanimité membres de la Société : M. Gerhard Kowaleski, présenté par MM. Cartan et Montel; M. Steinhaus, présenté par MM. Fatou et Montel.

Communications :

M. Borel : *Sur les fonctions monogènes :*

L'auteur se propose de définir les fonctions monogènes dans des domaines plus généraux que ceux considérés jusqu'à présent dans la théorie des fonctions analytiques : ces nouveaux domaines seront appelés domaines de Cauchy ou domaines C , les autres étant dits des domaines de Weierstrass ou domaines W .

Voici un exemple de domaine C . Soit un ensemble dénombrable de points d'affixes a_n , partout dense à l'intérieur d'un cercle S ; par exemple, l'ensemble des points du cercle dont les coordonnées sont rationnelles. A chaque point a_n , attachons un nombre positif r_n , les r_n tendant très rapidement vers zéro. Excluons du cercle S les points intérieurs aux cercles $S'_{p,n}$ de centre a_n et de rayon $\frac{r'_n}{2^p}$, nous obtenons un domaine C'_p . On peut remplacer ces cercles $S'_{p,n}$ par de nouveaux cercles $S_{p,n}$ n'ayant deux à deux aucun point commun et définissant, par l'exclusion de leurs points intérieurs, un domaine C_p contenant tous les points de C'_p et dont tous les points appartiennent à C'_{p+1} : ces domaines C_p pourront remplacer les domaines C'_p ; la frontière de C_p est constituée par les circonférences $S_{p,n}$, les points de C_p qui n'appartiennent pas à la frontière sont dits intérieurs. Le domaine C est formé par l'ensemble de tous les points intérieurs à l'un des C_p ; l'ensemble des points de C n'est pas parfait et son complémentaire, dont la mesure est nulle, a la puissance du continu. Si l'on substitue aux nombres r_n des nombres ρ_n tendant moins rapidement vers zéro, on définira de la même manière des domaines Γ_p et un domaine Γ ; tous les points de Γ appartiendront à C qui possédera, en outre, d'autres points.

Soit une fonction des deux variables x et y , coordonnées d'un

point M , définie en tout point de C et continue sur tout C_p : la connaissance des valeurs de cette fonction sur Γ , entraîne la connaissance de ses valeurs sur C .

Une fonction $f(z)$ sera monogène dans C , si : 1° elle est continue sur tout C_p ; 2° elle admet en tout point de C une dérivée unique et continue sur tout C_p . On peut étendre les propriétés des fonctions monogènes définies dans les domaines W aux fonctions monogènes définies dans les domaines C .

M. Châtelet : *Sur une représentation des idéaux.*

L'arithmétique d'un corps de nombres algébriques étant identique à celle des corps conjugués, il est naturel de chercher à représenter les nombres correspondants de ces corps par des êtres ne contenant plus d'irrationalités. On peut y arriver en employant des tableaux — ou substitutions — à termes rationnels vérifiant les lois des opérations élémentaires sur les nombres rationnels (formant un domaine *orthoïde*).

La définition de ces tableaux dépend d'une certaine substitution S formée de n nombres du corps et de leurs conjugués. On peut toujours disposer de S , de façon qu'aux entiers complexes du corps correspondent des tableaux à termes entiers, et réciproquement.

Alors, à tous les entiers multiples d'un entier α correspondent tous les tableaux X tels que XA^{-1} soit à termes entiers. A peut être pris égal au tableau correspondant à α ou à son produit à gauche par une substitution modulaire quelconque. En outre, à tous les entiers d'un idéal, c'est-à-dire de la forme $x\alpha + y\beta + \dots$, $\alpha, \beta \dots$ fixes, x, y , quelconques, correspondent encore tous les tableaux X tels que XA^{-1} soit à termes entiers, A étant convenablement choisi. Mais cette fois A ne peut plus être pris égal à un tableau de l'ensemble. Ce tableau joue donc en quelque sorte le rôle du *facteur idéal* de Kummer. On peut se servir de cette représentation pour faire des calculs sur les idéaux ou établir les diverses propriétés de cette théorie.

M. Cahen : *Sur la décomposition des substitutions linéaires à coefficients entiers en produit de substitutions premières.*

Le calcul des substitutions linéaires, identique à celui des tableaux, a beaucoup d'importance, comprenant beaucoup d'autres calculs comme cas particuliers. Lorsque les coefficients sont entiers, il peut être considéré comme une généralisation de celui des nombres

entiers. On peut y chercher l'analogue de la décomposition en facteurs premiers.

L'auteur démontre que toute substitution linéaire à coefficients entiers sur n variables $x_1, x_2, \dots, x_n$, est décomposable en un produit de substitutions unités (à déterminant égal à 1), et de substitutions de la forme $x_1 | p.x_1$, p étant un nombre premier positif. Ces dernières sont analogues aux facteurs premiers, les autres aux unités. Une substitution étant donnée, ses facteurs premiers sont déterminés.

Quant aux substitutions unités, l'auteur remarque d'abord qu'on peut se borner à considérer celles de déterminant égal à $+1$ (modulaires); toute substitution de déterminant égal à -1 étant le produit d'une substitution modulaire par la substitution $x_1 | -x_1$. L'auteur démontre alors qu'on peut représenter toute substitution modulaire par un produit composé des n facteurs suivants :

$$V = \begin{vmatrix} x_1 & -x_1 + x_2 \\ x_2 & -x_1 \end{vmatrix}, \quad T_h = \begin{vmatrix} x_1 & x_h \\ x_h & -x_1 \end{vmatrix} \quad (h = 2, 3, \dots, n),$$

V n'ayant que l'exposant 1 ou 2 ($V^3 = 1$);

T_h n'ayant que l'exposant 1, 2, ou 3 ($T_h^4 = 1$).

Mais cette décomposition est encore possible d'une infinité de manières.

A partir de là l'auteur se borne au cas de $n = 2$. Il y a, dans ce cas, deux substitutions modulaires fondamentales :

$$V = \begin{vmatrix} x & -x + y \\ y & -x \end{vmatrix}, \quad T = \begin{vmatrix} x & y \\ y & -x \end{vmatrix}.$$

L'auteur remarque qu'on peut supposer l'exposant de T égal à 1, en renvoyant s'il le faut un facteur T^2 à la fin du produit. On peut d'ailleurs négliger ce facteur, à condition de considérer, au lieu des substitutions homogènes sur x et y , les substitutions non homogènes sur $z = \frac{x}{y}$. Alors

$$V = z \left| \frac{z-1}{z} \right|, \quad T = z \left| -\frac{1}{z} \right|.$$

Dans ces conditions, la décomposition d'une substitution modulaire en facteurs V et T , les exposants de V étant 1 ou 2, ceux de T étant 1, n'est possible que d'une seule manière.

La démonstration met une fois de plus en évidence le rapport qu'il y a entre la théorie des substitutions linéaires et celle des fractions continues. Elle amène à partager les substitutions modulaires sur une variable, en 24 familles, suivant le signe et l'ordre de grandeur des coefficients.

Suivent quelques applications. L'auteur montre que les substitutions de la première famille forment un ensemble analogue à celui des nombres entiers, c'est-à-dire se reproduisent entre eux par multiplication, mais non par division ; d'où des théories analogues à celle de la divisibilité, du plus grand commun diviseur, etc. De même pour la seconde, la troisième, la quatrième famille.

Resterait pour épuiser le sujet : 1° A trouver aussi une décomposition *unique* en facteurs fondamentaux pour les substitutions unités à plus de deux variables ;

2° Revenant aux substitutions linéaires quelconques, à voir comment se placent dans la décomposition indiquée plus haut les facteurs unités. Car la multiplication n'étant pas commutative, on ne peut pas réunir tous ces facteurs en un seul.

RAPPORT DE LA COMMISSION DES COMPTES.

(MM. G. FOURET, G. HUMBERT ; CH. BIOCHE, rapporteur.)

MESSIEURS ET CHERS COLLÈGUES,

Conformément à l'Article 16 de nos Statuts et aux Articles 33 et 34 de notre Règlement administratif, j'ai l'honneur de vous présenter le résultat de l'examen auquel a procédé la Commission chargée, par votre Conseil d'administration, de vous faire un rapport sur la gestion de notre trésorier et sur la situation morale et financière de notre Société.

Les comptes de l'exercice clos, s'étendant du 1^{er} novembre 1910 au 31 octobre 1911, s'établissent comme il suit :

ÉTATS DES RECETTES ET DES DÉPENSES COURANTES.

En caisse au 1^{er} novembre 1910..... fr 7382,50

Recettes.

Cotisations.....	3918,50
Abonnements au <i>Bulletin</i> , vente de Volumes et Tables.....	1201,20
Souscription du Ministère.....	400,00
Intérêts et revenus.....	1471,90
Total de l'actif.....	<u>14374,10</u>

Dépenses.

Bulletin (t. XXXIX) : composition, impression, brochage, expédition	fr 6062,41
Tirages à part.....	576,15
Traitement de l'agent, gratifications.....	470,00
Frais de bureau, frais de poste, divers.....	354,55
Achat de 180 ^{fr} de rente 3 pour 100, au porteur....	5859,80
	<u>13322,91</u>
Excédent de l'actif au 31 octobre 1911.....	1051,19
Total comme ci-dessus.....	<u>14374,10</u>

PORTEFEUILLE DISPONIBLE.

Il y avait au 31 octobre 1910, à titre de réserve disponible, 318 ^{fr} de rente 3 pour 100 sur l'État, ayant coûté.....	fr 10453,29
Il a été acheté 180 ^{fr} de rente, ayant coûté	5859,80
Donc, en tout, 498 ^{fr} de rente, ayant coûté	16313,09
Excédent d'actif disponible en espèces.....	1051,19
	<u>17364,28</u>

Réserve inaliénable (Art. 13 des Statuts).

La réserve inaliénable se composait au 1^{er} novembre 1910 de :

1^o En portefeuille : 886^{fr} de rente à 3 pour 100 sur l'État et 2 obligations à 3 pour 100 des chemins de fer de l'Ouest ayant coûté ensemble 24515^{fr},46 ;

2° En espèces : 652^{fr}, 33.

Dans le cours de l'exercice 1910-1911 il a été encaissé pour droits d'admission de 13 nouveaux membres	fr 130,00
qui, avec le reliquat existant au 1 ^{er} novembre 1910....	652,33
forment un total en espèces de.....	782,33
Il a été acheté une obligation, 3 pour 100, du chemin de fer de l'Ouest, ayant coûté.....	432,00
reste donc en espèces.....	<u>350,33</u>

Par suite, au 31 octobre 1911, le montant de la réserve inaliénable comprenait :

1° En portefeuille, 886 ^{fr} de rente 3 pour 100 sur l'État et 3 pour 100 des chemins de fer de l'Ouest, ayant coûté.....	fr 24515,46
les titres antérieurs à l'exercice 1910-1911;	
les titres achetés au cours de cet exercice.....	432,00
soit en tout.....	24947,46
2° En espèces.....	350,33
Total de la réserve inaliénable....	<u>25297,79</u>

Le recouvrement des cotisations s'est effectué de façon assez satisfaisante ; mais, par suite de décès et de quelques démissions, le montant des cotisations est légèrement inférieure à celui de l'an dernier, qui était de 4005^{fr}.

D'autre part, à cause de l'augmentation considérable de notre *Bulletin*, dont le tome XXXIX contient 29 feuilles d'impression, tandis que le tome XXXVIII n'en contenait que 18, les dépenses ont augmenté ; aussi il a fallu, pour régler les dépenses de l'exercice 1910-1911, faire appel à la réserve disponible. En effet, comme on peut le voir en se reportant aux Tableaux donnés plus haut, le total des recettes courantes de l'exercice 1910-1911 est de 6991^{fr}, 60, et le total des dépenses relatives au fonctionnement de la Société, c'est-à-dire les dépenses autres que des achats de titres, est de 7463^{fr}, 11. Autrement dit, l'excédent de ces dépenses sur les recettes est de 471^{fr}, 51.

Il y aurait inconvénient évident à laisser les dépenses courantes de la Société dépasser les recettes de l'exercice correspondant. Il faudrait donc, si l'on ne veut pas réduire le contenu du *Bulletin*, soit

chercher à réaliser des économies sur les frais courants, soit chercher à augmenter les recettes en amenant de nouveaux membres à la Société; les deux procédés peuvent d'ailleurs être employés simultanément.

Nous prions donc nos collègues de faire de la propagande, et nous appellerons l'attention du Conseil sur la question des économies à réaliser.

En terminant, nous vous prions de voter des remerciements à notre trésorier, M. Servant, et à nos secrétaires MM. Cartan et Montel, qui donnent leurs soins à l'administration de la Société et à la publication du *Bulletin*; et nous vous demandons de vouloir bien approuver, avec les comptes qui vous sont présentés, les conclusions du présent rapport.

CH. BIOCHE.

SÉANCE DU 12 JUIN 1912.

PRÉSIDENCE DE M. ANDOYER.

Communication :

M. Halphen : *Sur l'application des équations de la Thermodynamique aux machines frigorifiques.*

L'auteur résume quelques conclusions d'un travail sur l'étude théorique des Cycles des machines à froid. (Travail en cours de publication dans l'*Industrie frigorifique*.)

SÉANCE DU 26 JUIN 1912.

PRÉSIDENCE DE M. ANDOYER.

Élection :

Est élu à l'unanimité, membre de la Société : M. de Gramont, présenté par MM. Humbert et d'Ocagne.

Communications :

M. Steinhaus : *Sur quelques séries trigonométriques particulières.*

1. Dans le travail important de M. Fatou : *Les séries trigonométriques et séries de Taylor* ⁽¹⁾, l'auteur demandait s'il était possible de trouver une série trigonométrique partout divergente, dont les coefficients tendraient vers zéro. M. Lusin a presque résolu cette question en donnant un exemple d'une telle série, dont il démontre la divergence pour tous les points, sauf pour un ensemble de mesure nulle ⁽²⁾. Pour avoir l'exemple demandé par M. Fatou, considérons l'expression

$$(A) \quad \sum_{a=1}^{\infty} \left\{ \frac{\cos G(a)(x - w_a)}{G(a+1) - G(a)} + \frac{\cos [G(a) + 1](x - w_a)}{G(a+1) - G(a)} + \dots \right. \\ \left. + \frac{\cos [G(a+1) - 1](x - w_a)}{G(a+1) - G(a)} \right\}.$$

On pose

$$G(a) = 1 + E(a \log a) \quad (a = \text{nombre naturel}).$$

Les nombres w_a seront déterminés plus tard. On voit bien qu'en supprimant les parenthèses dans la série précédente et en appliquant le théorème d'addition à la fonction

$$\cos [G(a) + k](x - w_a) = \cos \{ [G(a) + k]x - [G(a) + k]w_a \},$$

on obtient une série trigonométrique ordinaire, les nombres

$$G(a) + k$$

étant des entiers croissants, d'après la façon même dont a a été construite notre série primitive. On remarque tout de suite que les coefficients de notre série tendent vers zéro. On voit aussi très aisément que pour $x = w_a$ la valeur de la $a^{\text{ième}}$ parenthèse est l'unité. Pour démontrer la divergence de la série (A), comparons les valeurs de son terme d'indice a pour x et $x + h$. La différence ne surpasse pas en valeur absolue le nombre

$$|h| \cdot [G(a+1) - 1].$$

Si $|h| \leq \frac{1}{2G(a+1)}$, cette différence sera plus petite en module que $\frac{1}{2}$. Soit alors I_a un intervalle dont le milieu est w_a et dont la longueur est $\frac{1}{G(a+1)}$. Pour tout x situé dans cet intervalle, la valeur du terme $a^{\text{ième}}$ de (A) est positive et plus grande que $\frac{1}{2}$.

⁽¹⁾ *Acta mathematica*, 1906.

⁽²⁾ *Rend. del Circ. math. di Pal.*, 1911.

Représentons la variable x sur le cercle de rayon unité et disposons les intervalles I_α l'un à côté de l'autre, parce que nous sommes libres

de déterminer les w_α comme nous le voulons. Mais la série $\sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{1}{G(\alpha+1)}$ est divergente et le cercle se trouve couvert une infinité de fois par les I_α . Chaque x appartient par conséquent à une infinité d'intervalles et il y aura pour un x une infinité des termes dans (A), dont la valeur est positive et plus grande que $\frac{1}{2}$. Par conséquent, (A) et la série trigonométrique déduite de (A) sont divergents pour tout x .

2. On peut, par la même méthode, arriver à construire une série trigonométrique ayant les mêmes propriétés, mais composée seulement de termes en cosinus. Cette série donne lieu à la formation d'une série de Taylor à coefficients réels tendant vers zéro, qui est divergente lorsque le module de la variable est l'unité.

3. M. Fatou a démontré ⁽¹⁾ que les conditions

$$\lim_{n=\infty} na_n = 0, \quad \lim_{n=\infty} nb_n = 0$$

entraînent la convergence de la série trigonométrique

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

pour tous les x , sauf pour un ensemble de mesure nulle. Il demande si cet ensemble des points exceptionnels pourrait être non dénombrable. Considérons la série des constantes :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n} = \frac{1}{2 \log 2} + \frac{1}{3 \log 3} + \dots;$$

séparons les termes de cette série par des parenthèses de manière que la valeur de chaque parenthèse soit plus grande que l'unité

$$(B) \quad \left[\frac{1}{2 \log 2} + \frac{1}{3 \log 3} + \dots \right] + \left[\frac{1}{m \log m} + \dots \right] + \left[\frac{1}{p \log p} + \dots \right] + \dots \\ + \left[\frac{1}{q \log q} + \dots \right] + \dots,$$

⁽¹⁾ *Loc. cit.*

et formons la série trigonométrique suivante :

$$(C) \quad \frac{\cos 2(x-1)}{2 \log 2} + \frac{\cos 3(x-1)}{3 \log 3} + \dots + \frac{\cos q(x-1)}{q \log q} + \dots,$$

i est l'entier désignant l'indice de la parenthèse dans (B), à laquelle appartient le terme $\frac{1}{q \log q}$. Si l'on sépare les termes de (C) par des parenthèses aux mêmes endroits que (B), on pourra dire que, pour $x = i$, la $i^{\text{ème}}$ parenthèse a une valeur plus grande que l'unité. La continuité en x permet de dire que, dans un certain intervalle entourant i , cela aura encore lieu. Mais les i forment un ensemble partout dense sur le cercle représentant les valeurs de x . Par conséquent il y aura un ensemble de points ayant la puissance du continu qui appartiennent à la fois à une infinité de ces intervalles. Pour tous ces points, la série (C), qui remplit bien les conditions désirées, sera divergente.

M. Montel : *Sur les fonctions monogènes.*

L'auteur a donné précédemment des conditions sous lesquelles l'expression $p dx + q dy$ est une différentielle totale, dans certains cas où l'on ne suppose pas la continuité des dérivées partielles $\frac{\partial q}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$ (1). Il se place maintenant dans l'hypothèse où ces dérivées existent et sont partout finies dans un domaine D et énonce le résultat suivant : *la condition nécessaire et suffisante pour que $p dx + q dy$ soit une différentielle totale est que $\frac{\partial q}{\partial x}$ et $\frac{\partial p}{\partial y}$ soient égaux, sauf peut-être pour un ensemble de points de mesure superficielle nulle.* On en déduit qu'une fonction de la variable complexe z définie dans un domaine D est monogène dans ce domaine si l'on suppose l'existence de dérivées partielles par rapport à x et à y finies en tout point du domaine et si les conditions de Cauchy sont satisfaites en tout point de D, sauf peut-être pour un ensemble de points de mesure nulle.

Les résultats précédents s'étendent aux fonctions et aux expressions différentielles de plusieurs variables. En particulier, on peut affirmer qu'une fonction de plusieurs variables complexes, analytique par rapport à chacune de ces variables, est analytique par rapport à l'ensemble des variables.

(1) *Annales de l'École Normale*, t. XXIV (3^e série), 1907, p. 283.

M. Vessiot : *Sur l'emploi des représentations paramétriques dans le calcul des variations.*

1. Soient n fonctions $x_1, \dots, x_n$ d'une variable indépendante u , liées par des équations différentielles données :

$$(1) \quad F_h(x'_1, \dots, x'_n | x_1, \dots, x_n | u) = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, \overline{n-\alpha}) \quad \left(x'_i = \frac{dx_i}{du}\right).$$

Nous appelons *variations* des fonctions

$$(2) \quad x_i = \varphi_i(u) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

qui constituent une solution quelconque de (1), tout système de quantités

$$(3) \quad \delta x_i = \xi_i(u) \delta t \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

qui sont les différentielles, prises pour $t = 0$, par rapport à t , de fonctions

$$(4) \quad x_i = \Phi_i(u | t) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

remplissant la double condition de satisfaire à (1), quel que soit t , et de se réduire à (2) pour $t = 0$.

2. Nous remplaçons le système (1) par un système résolu équivalent

$$(5) \quad x'_i = j_i(x_1, \dots, x_n | t_1, \dots, t_\alpha | u) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

en introduisant les α fonctions de $u, t, \dots, t_\alpha$, qui jouent le rôle de paramètres quand on considère les systèmes (1) et (5) comme représentant une même multiplicité, dans l'espace $(x'_1, \dots, x'_n)$.

Les systèmes (2), (3), (4) sont complétés respectivement par des formules :

$$(2') \quad t_j = \psi_j(u) \quad (j = 1, 2, \dots, \alpha),$$

$$(3') \quad \delta t_j = \theta_j(u) \delta t \quad (j = 1, 2, \dots, \alpha),$$

$$(4') \quad t_j = \Psi_j(u | t) \quad (j = 1, 2, \dots, \alpha).$$

3. Nous désignerons par le symbole f le résultat de la substitution aux x_i et t_j des fonctions (2) et (2') dans toute fonction f de ces indéterminées. Tout système de variations (3) (3') satisfait alors aux équations différentielles linéaires

$$(6) \quad \frac{d \delta x_i}{du} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \delta x_k + \sum_{h=1}^{\alpha} \frac{\partial f_i}{\partial t_h} \delta t_h \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

La réciproque est vraie. Si l'on prend, en effet, pour les fonctions (4') les expressions

$$(7) \quad t_j = \psi_j(u) + t \, \theta_j(u) \quad (j = 1, 2, \dots, \alpha),$$

on peut intégrer le système

$$(8) \quad \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial u} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial t} + \sum_{h=1}^{\alpha} \frac{\partial f_i}{\partial t_h} \frac{\partial t_h}{\partial t} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

où l'on considère les t_j comme étant ces fonctions (7), et les x_i comme étant des fonctions inconnues. Il suffit d'employer la méthode d'approximation de M. Picard avec les conditions initiales

$$(9) \quad \begin{cases} x_i = \varphi_i(u) & \text{pour } t = 0 \\ x_i = \varphi_i(0) + t \, \xi_i(0) & \text{pour } u = 0 \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Les intégrales qu'on obtient ainsi sont des fonctions (4), qui donnent précisément naissance aux variations (3) des fonctions (2).

4. Si l'on impose aux δx_i la condition de s'annuler pour $u = a$, ils sont donnés, pour une autre valeur b quelconque, par les formules

$$(10) \quad (\delta x_i)_{u=b} = \int_a^b \sum_{h=1}^{\alpha} \sum_{j=1}^n z_{ij}(u) \frac{\overline{\partial f_j}}{\partial t_h} \delta t_h \, du \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

où les δt_h ont les valeurs (3'), arbitrairement choisies, et où les z_{ij} constituent le système fondamental

$$(11) \quad z_i = z_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n)$$

de solutions du système linéaire adjoint à (6)

$$(12) \quad \frac{dz_i}{du} + \sum_{k=1}^n \frac{\overline{\partial f_k}}{\partial x_i} z_k = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

dont le déterminant se réduit à un déterminant unité pour $u = b$.

5. Dans le *problème de Mayer*, relatif aux équations (1), on doit exprimer que $(\delta x_n)_{u=b}$ est nul, dès que $(\delta x_1)_{u=b}, \dots, (\delta x_{n-1})_{u=b}$ le sont. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est qu'il existe des identités à coefficients constants :

$$(13) \quad \sum_{i=1}^n c_i \sum_{j=1}^n z_{ij}(u) \frac{\overline{\partial f_j}}{\partial t_h} = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, \alpha) \quad (c_n \neq 0).$$

Cela équivaut à dire qu'il existe une solution de (12) telle que l'on ait

$$(14) \quad \sum_{j=1}^n z_j \frac{\partial f_j}{\partial t_h} = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, \alpha),$$

avec la condition

$$(15) \quad z_n(b) \neq 0.$$

Les fonctions (z) , (z') qui satisfont à cette *condition de la variation nulle* sont donc définies par le système

$$(16) \quad \frac{dx_i}{du} = f_i(x_1, \dots, x_n | t_1, \dots, t_\alpha | u) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$(17) \quad \frac{dz_i}{du} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_i} z_k = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$(18) \quad \sum_{j=1}^n z_j \frac{\partial f_j}{\partial t_h} = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, \alpha),$$

avec l'inégalité de condition (15).

6. Il est facile de déduire de là les conditions classiques. Les conditions (18) montrent que les inconnues auxiliaires $z_1, \dots, z_n$ définissent, dans l'espace $(x'_1, \dots, x'_n)$, la direction d'un élément de contact de la multiplicité (1), associé au point (5) de cette multiplicité. On peut donc remplacer ces inconnues par des inconnues $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-\alpha}$, au moyen des formules

$$(19) \quad z_i = \sum_{h=1}^{n-\alpha} \lambda_h \frac{\partial F_h}{\partial x'_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Les identités évidentes

$$(20) \quad \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_h}{\partial x'_i} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} + \frac{\partial F_h}{\partial x_i} = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, n - \alpha), \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

donnent

$$(21) \quad \sum_{j=1}^n z_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = - \sum_{h=1}^{n-\alpha} \lambda_h \frac{\partial F_h}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

et le système (15), (16), (17), (18) devient:

$$(22) \quad x'_i = \frac{dx_i}{du} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$(23) \quad F_h(x'_1, \dots, x'_n | x_1, \dots, x_n | u) = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, \overline{n-2}),$$

$$(24) \quad \frac{d}{du} \sum_{h=1}^{n-2} \lambda_h \frac{\partial F_h}{\partial x'_i} = \sum_{h=1}^{n-2} \lambda_h \frac{\partial F_h}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$(25) \quad \left(\sum_{h=1}^{n-2} \lambda_h \frac{\partial F_h}{\partial x'_n} \right)_{u=b} \neq 0.$$

7. On a donc une mise en équations simple et rigoureuse, qui échappe à l'objection de Du Bois Reymond, qui ne nécessite aucune discussion sur les champs singuliers, et met en évidence le caractère géométrique des multiplicateurs de Lagrange.

SÉANCE DU 10 JUILLET 1942

PRÉSIDENCE DE M. FOUCHÉ.

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
État de la Société au début de 1912.....	1
Liste des périodiques reçus.....	12
Rapport de la Commission des comptes.....	41
Communications : MM. <i>Andoyer</i> : Sur le calcul numérique.....	35
<i>Bioche</i> : Sur les coniques circonscrites à un triangle.....	35
<i>Borel</i> : Sur la mesure des ensembles bien définis.....	27
— Sur l'ordre des ensembles réguliers de mesure nulle et les propriétés des fonctions monogènes définies dans certains ensembles.	28
— Sur les fonctions monogènes.....	38
<i>Bricard</i> : Sur les arcs d'ellipse à différence rectifiable.....	15
— Sur une courbe gauche fermée qui traverse tous ses plans rectifiants.	33
— Sur les courbes sphériques qui rencontrent tous les grands cercles de la sphère.....	33
<i>Cahen</i> : Sur l'irrationalité des sommes des séries dont le terme général est une fonction rationnelle de l'indice.....	15
— Sur la décomposition des substitutions linéaires à coefficients entiers en produit de substitutions premières.....	39
<i>Cartan</i> : Sur les caractéristiques de certaines équations aux dérivées partielles.....	68
— Sur les groupes de transformation de contact et la cinématique nouvelle.....	23
<i>Carvallo</i> : Sur la masculinité dans les naissances humaines.....	26
<i>Chatelet</i> : Sur une représentation des idéaux.....	39
<i>Fouché</i> : Sur deux théorèmes de Ribaucour.....	30
<i>Galbrun</i> : Sur certaines équations linéaires aux différences finies.....	36
<i>Hadamard</i> : Sur les variations unilatérales et les principes du calcul des variations.....	20
— Sur les extrémales du problème isopérimétrique dans le cas des intégrales doubles.....	20
— Sur la généralisation de notion de fonction analytique.....	28
— Sur la loi d'inertie des formes quadratiques.....	29
<i>Halphen</i> : Sur un système différentiel relatif au problème des potentiels des accélérations d'ordre supérieur.....	19
— Sur un ellipsographe.....	30
— Sur l'application des équations de la thermodynamique aux machines frigorifiques.....	44
<i>Kœnigs</i> : Sur l'enseignement de la cinématique.....	30

	Pages
<i>Lebesgue</i> : Sur le théorème de la moyenne de Gauss	16
— Sur les fonctions permutables de M. Volterra	30
<i>Montel</i> : Sur des généralisations des théorèmes de MM. Picard et Landau..	17
— Sur une nouvelle démonstration d'un théorème de M. Picard.....	18
— Sur les fonctions monogènes.....	47
<i>Moore</i> (Ch.-N.) : Sur les facteurs de convergence dans les séries doubles et la série double de Fourier.....	31
<i>Picard</i> : Sur les systèmes de deux fonctions uniformes d'une variable liées par une relation algébrique.....	25
<i>Speiser</i> : Sur le déterminant d'un groupe.....	34
<i>Steinhaus</i> : Sur quelques séries trigonométriques particulières.....	44
<i>Vessiot</i> : Sur l'emploi des représentations paramétriques dans le calcul des variations.....	48
<i>Volterra</i> : Sur le théorème de Stokes	24

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE.

111

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE,

PUBLIÉ

PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME QUARANTE-ET-UNIÈME. — ANNÉE 1913.

PARIS,

AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ

A LA SORBONNE.

—
1913

*Manuscrits
C. R. 1913
n° 10
Sec. Générale T. 1*

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

LES ENSEMBLES DE MESURE NULLE ⁽¹⁾;

PAR M. ÉMILE BOREL.

Un ensemble linéaire E est dit de mesure nulle ⁽²⁾ lorsque, étant donné un nombre arbitrairement petit ε , on peut enfermer tous les points de E dans des intervalles dont la somme est inférieure à ε . Pour un ensemble à deux dimensions, la définition est la même : il suffit d'y remplacer le mot intervalles par le mot rectangles; on peut observer qu'il est équivalent de parler de carrés au lieu de rectangles; car, étant donné un rectangle, on peut trouver un nombre fini de carrés dont l'aire totale diffère aussi peu que l'on veut de l'aire du rectangle et tels que tout point intérieur au rectangle soit aussi intérieur à l'un de ces carrés. Il est préférable, dans certaines questions, de considérer des carrés au lieu de rectangles; on pourrait aussi remplacer les carrés par des cercles sans altérer la généralité de la définition.

Les ensembles de mesure nulle jouent un rôle très important dans la théorie des fonctions de variables réelles et de variables complexes; il est utile de pouvoir comparer entre eux les divers ensembles de mesure nulle; cette comparaison est facilitée par la notion d'ensemble régulier. Nous allons définir d'abord les ensembles réguliers et les points fondamentaux de ces ensembles;

⁽¹⁾ Cette Note est la reproduction d'une des conférences inaugurales de l'Institut Rice, à Houston (Texas) (10-12 octobre 1912).

⁽²⁾ Dans mes *Leçons sur la théorie des fonctions*, où j'ai donné pour la première fois cette définition, j'emploie l'expression *mesure zéro*; depuis, l'expression *mesure nulle*, employée, je crois, pour la première fois par M. Lebesgue, a prévalu.

nous montrerons ensuite que tout ensemble régulier est équivalent à un autre ensemble régulier dont les points fondamentaux sont choisis d'une manière particulière, sont par exemple les points à coordonnées rationnelles; nous traiterons enfin de la classification des ensembles de mesure nulle ayant des points fondamentaux donnés, cette classification étant basée sur la décroissance asymptotique des intervalles (ou carrés) d'exclusion.

I.

Un ensemble de mesure nulle est dit *régulier* lorsqu'il peut être défini de la manière suivante :

Soient $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ une infinité énumérable de points, dits points fondamentaux; à chaque nombre entier h faisons correspondre une infinité de carrés $C_1^{(h)}, C_2^{(h)}, \dots, C_n^{(h)}, \dots$ dont les aires forment une série convergente et tels que le carré $C_n^{(h)}$ renferme à son intérieur $C_n^{(h+1)}$ et tende vers A_n lorsque h augmente indéfiniment. Soit E_h l'ensemble des points intérieurs à l'un des carrés $C_n^{(h)}$ ($n = 1, 2, \dots$); l'ensemble des points intérieurs à tous les E_h ($h = 1, 2, \dots$) est un ensemble régulier (qui est évidemment de mesure nulle).

Tout ensemble de mesure nulle fait partie d'un ensemble régulier. En d'autres termes, A étant un ensemble quelconque de mesure nulle, on peut définir un ensemble régulier E de mesure nulle tel que tout point de A appartienne à E . Pour démontrer cette proposition, donnons-nous une suite de nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \dots$ décroissants et tendant vers zéro, la série $\Sigma \varepsilon_n$ étant supposée convergente. L'ensemble A étant de mesure nulle, nous pouvons définir un ensemble $A^{(h)}$ de carrés (à côtés parallèles aux axes) dont la somme des aires est inférieure à ε_h et tels que tout point de A soit intérieur à l'un des carrés $A^{(h)}$. Nous définirons d'abord les carrés $A^{(1)}$, puis les carrés $A^{(2)}$; s'il y a des portions de ces carrés $A^{(2)}$ qui sont extérieures à tous les carrés $A^{(1)}$, nous pouvons les supprimer comme inutiles; ceci revient à dire que nous ne conservons que les portions des carrés $A^{(2)}$ qui sont intérieures à l'un des carrés $A^{(1)}$; pour procéder d'une manière méthodique et définie d'une manière précise, nous considérons le premier des

carrés $A^{(1)}$, soit $A_1^{(1)}$, et nous opérerons successivement sur les portions des carrés successifs $A^{(2)}$ qui sont intérieures à $A_1^{(1)}$; nous continuerons de la même manière avec $A_2^{(1)}$, en ayant soin toutefois de laisser de côté les portions déjà considérées, etc. Chacune de ces opérations nous conduit à considérer des rectangles dont chacun peut être remplacé par une infinité énumérable de carrés (un nombre fini dans des cas particuliers); il suffit, pour former ces carrés suivant une loi déterminée, de construire de proche en proche le plus grand carré possible intérieur au rectangle et dont le sommet le plus rapproché de l'origine des coordonnées O coïncide avec le sommet du rectangle le plus rapproché de O . Si parmi les carrés ainsi définis, il y en a qui ne renferment aucun point de l'ensemble A , nous les supprimerons. Nous pouvons supposer les carrés $A^{(1)}$ rangés par ordre de grandeur décroissante (s'il y en a d'égaux, nous les rangerons d'après les valeurs relatives des abscisses de leurs centres et, si ces abscisses sont égales, d'après les valeurs de leurs ordonnées). Nous rangerons de même les carrés $A^{(2)}$ (après les transformations indiquées), et ainsi de suite.

Nous allons définir un ensemble de carrés $B^{(1)}$, qui comprendra tous les carrés $A^{(1)}$ et en outre un certain nombre des carrés $A^{(2)}$, $A^{(3)}$, ... De même $B^{(2)}$ comprendra tous les carrés $A^{(2)}$ et en outre un certain nombre des carrés $A^{(3)}$, ... Il est clair que la somme des carrés $B^{(h)}$ est inférieure à

$$\varepsilon_h + \varepsilon_{h+1} + \dots$$

Elle est finie quel que soit h et tend vers zéro lorsque h augmente indéfiniment; tous les carrés $A^{(h)}$ faisant partie des $B^{(h)}$, tout point de A est intérieur à l'un des carrés $B^{(h)}$. Pour que l'ensemble E défini par les $B^{(h)}$ soit régulier, il suffit que l'on puisse numérotter les $B^{(h)}$, $B_1^{(h)}$, $B_2^{(h)}$, ..., $B_n^{(h)}$, ..., de telle manière que $B_n^{(h+1)}$ soit inférieur à $B_n^{(h)}$. On arrive à ce résultat de la manière suivante. Prenons d'abord ceux des carrés $A^{(1)}$, s'il en existe, dont l'aire est supérieure à ε_2 (il n'en existe pas dont l'aire est supérieure à ε_1 , puisque la somme de tous les $A^{(1)}$ est inférieure à ε_1); nous désignerons ces carrés par $B_1^{(1)}$, $B_2^{(1)}$, ..., $B_{n_1}^{(1)}$. Prenons ensuite ceux des carrés $A^{(1)}$ dont l'aire est supérieure à ε_3 ; et désignons-les par $B_{n_1+1}^{(1)}$, $B_{n_1+2}^{(1)}$, ..., $B_{p_1}^{(1)}$. Nous allons considérer maintenant les

carrés $\Lambda^{(2)}$ d'aire supérieure à ε_3 ; ils sont rangés dans un ordre déterminé, comme il a été dit; si le premier d'entre eux est intérieur à l'un des $\Lambda^{(1)}$ déjà numérotés, par exemple à $B_k^{(1)}$, nous le désignerons par $B_k^{(2)}$, sinon, nous le désignerons à la fois par $B_{p_2+1}^{(1)}$ et par $B_{p_2+1}^{(2)}$; de même, si le second des $\Lambda^{(2)}$ considérés est intérieur à l'un des $\Lambda^{(1)}$ déjà numérotés et distinct de $B_k^{(1)}$, soit $B_h^{(1)}$, nous le désignerons par $B_h^{(2)}$; s'il n'est intérieur à aucun des $\Lambda^{(1)}$ (il ne peut pas être intérieur à un $\Lambda^{(1)}$ non numéroté, puisque son aire est supérieure à ε_3 et que les $\Lambda^{(1)}$ non numérotés ont une aire inférieure à ε_3) ou s'il est intérieur précisément à $B_k^{(1)}$ qui a déjà été utilisé, nous le désignerons à la fois par $B_{p_2+2}^{(1)}$ et par $B_{p_2+2}^{(2)}$, nous arriverons ainsi à définir un certain nombre de nouveaux carrés $B^{(1)}$, soit $B_{p_2+1}^{(1)}, B_{p_2+2}^{(1)}, \dots, B_{n_3}^{(1)}$ et un certain nombre de carrés $B^{(2)}$, qui comprennent tous les Λ_2 d'aire supérieure à ε_3 .

Considérons maintenant les carrés $\Lambda^{(1)}$ d'aire supérieure à ε_4 ; nous les désignons par $B_{n_3+1}^{(1)}, B_{n_3+2}^{(1)}, \dots, B_{p_3}^{(1)}$, nous procéderons de la même manière que précédemment pour les $\Lambda^{(2)}$ dont l'aire est supérieure à ε_4 , et nous passerons ensuite aux $\Lambda^{(3)}$ dont l'aire est supérieure à ε_4 ; ceux d'entre eux qui seront intérieurs à des $B^{(2)}$ déjà numérotés prendront les mêmes numéros (chaque numéro n'étant donné, bien entendu, qu'une seule fois); les autres seront désignés à la fois par $B_s^{(1)}, B_s^{(2)}, B_s^{(3)}$. On continuera indéfiniment de la même manière; les ε_k tendant vers zéro lorsque k augmente indéfiniment, et chaque opération ne portant que sur un nombre fini de carrés, tout carré appartenant à $\Lambda^{(h)}$ figurera dans $B^{(h)}$ avec un rang déterminé. De plus, il est évident que $B_q^{(h)}$ tend vers zéro, quel que soit q lorsque h croît indéfiniment. Il ne pourra pas arriver que certaines suites $B_q^{(1)}, B_q^{(2)}, \dots, B_q^{(r)}$ s'arrêtent, car cela voudrait dire qu'aucun des carrés $\Lambda^{(r+1)}$ n'est intérieur à $B_q^{(r)}$, c'est-à-dire que $B_q^{(r)}$ ne renfermerait aucun point de l'ensemble A , contrairement à nos hypothèses. Les ensembles de carrés $B^{(h)}$ définissent donc bien un ensemble régulier E , qui comprend tous les points de A . Notre théorème est établi.

On peut observer que dans la définition de l'ensemble régulier E il y a certaines suites $B_q^{(1)}, B_q^{(2)}, \dots$, dont un certain nombre de premiers termes sont des carrés qui coïncident entre eux; ce n'est pas là une difficulté; on peut néanmoins, si l'on veut, éviter cette singularité en modifiant un peu les définitions des premiers B_q

d'une telle série; si $B_q^{(1)}$, $B_q^{(2)}$, $B_q^{(3)}$ par exemple coïncident, on remplacera $B_q^{(2)}$ par $(1 + \varepsilon_2)B_q^{(2)}$ et $B_q^{(1)}$ par $(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)B_q^{(1)}$ (nous désignons par αC un carré homothétique au carré C par rapport à son centre, avec le rapport d'homothétie α). Ces opérations ont pour résultat de multiplier l'étendue totale des carrés $B^{(h)}$ par un facteur inférieur au produit infini convergent $\prod(1 + \varepsilon_k)$.

On peut observer que l'ensemble régulier E que nous avons défini n'est pas nécessairement le plus simple possible des ensembles réguliers de mesure nulle qui renferment Λ , mais il importe peu que la démonstration donne *le plus simple*; l'essentiel est de prouver qu'il en existe *un*; il est alors possible de considérer, sans contradiction, l'ensemble de tous les ensembles réguliers de mesure nulle qui contiennent Λ et l'on peut choisir, dans cet ensemble, sinon le plus simple (qui peut ne pas exister, de même qu'il n'existe pas de *plus petit* nombre rationnel supérieur à $\sqrt{2}$), du moins un ensemble E dont la simplicité est aussi voisine que l'on veut de la simplicité la plus grande possible.

Nous nous occuperons spécialement désormais des ensembles réguliers; un tel ensemble est défini par des points fondamentaux A_n limites des $B_n^{(h)}$ lorsque h augmente indéfiniment et par les grandeurs des carrés d'exclusion $B_n^{(h)}$ attachés à A_n ⁽¹⁾. L'ensemble dérivé des points fondamentaux A_n est un ensemble fermé A' ; dans le cas général, cet ensemble A' se compose d'un ensemble parfait et d'un ensemble réductible; les intervalles d'exclusion qui correspondent aux points de l'ensemble réductible n'ont en commun que les points de cet ensemble réductible lui-même; leur étude ne donne donc rien de nouveau; la partie vraiment intéressante de l'ensemble régulier de mesure nulle est celle qui est attachée aux points de A' qui forment un ensemble parfait; plusieurs cas seraient à distinguer suivant la nature de cet ensemble parfait; nous nous bornerons à considérer le cas où l'ensemble A' comprend tous les points d'une certaine aire, de forme simple, les points A_n sont alors denses dans cette aire ⁽²⁾;

(1) Il semble qu'il y aurait lieu de considérer aussi les positions relatives de A_n dans ces carrés; mais on peut s'arranger, en modifiant légèrement les définitions, pour que tout $B_n^{(h)}$ ait pour centre le point A_n .

(2) Nous laissons ainsi de côté les ensembles de mesure nulle que l'on pourrait

tous les cas où l'aire est d'un seul tenant et à connexion simple se ramènent par la représentation conforme au cas de l'aire limitée par un cercle. Nous allons montrer que, si l'on a deux systèmes différents de points A_n et B_n denses à l'intérieur de cercles égaux, et denses aussi sur les circonférences de ces cercles (¹), on peut établir entre ces points une correspondance continue biunivoque et réciproque, les rapports entre la distance de deux points quelconques A_p, A_q et la distance des points correspondants B_p, B_q étant compris entre deux limites aussi rapprochées que l'on veut de l'unité. Il résultera de cette proposition que nous pouvons, sans diminuer la généralité, supposer que les points fondamentaux d'un ensemble de mesure nulle, lorsque ces points sont denses dans un domaine, coïncident avec un ensemble déterminé dense dans ce domaine, par exemple avec les points de coordonnées rationnelles.

II.

La proposition que nous avons en vue peut s'énoncer sous la forme suivante :

Soient deux cercles égaux C et C', et deux ensembles énumérables A et B dont le premier est dense dans C et sur la circonférence C, le second étant dense dans C' et sur la circonférence C'; on peut, étant donné un nombre arbitrairement petit ε , numérotier les points de A et les points de B, de telle manière qu'à un point du contour corresponde un point du

obtenir en supposant que A' est un ensemble parfait linéaire, ou bien un ensemble parfait qui, sans être linéaire, ne contient aucune aire. Par exemple on peut exclure certaines aires fixes autour des points à coordonnées rationnelles et prendre pour A_n les points à coordonnées algébriques qui ne font pas partie des aires exclues; on peut aussi échafauder en quelque sorte plusieurs constructions analogues, ou même une infinité énumérable quelconque de constructions superposées; on obtient ainsi des domaines fort compliqués au point de vue de l'*Analysis situs*.

(¹) Le cas où ni l'un ni l'autre ensemble n'aurait de points sur les circonférences se traiterait de la même manière.

contour et que l'on ait, quels que soient p et q ,

$$1 - \varepsilon < \frac{A_p A_q}{B_p B_q} < 1 + \varepsilon.$$

On dira que les deux ensembles sont *semblables à ε près*.

Pour démontrer ce théorème, nous supposons que les points des ensembles sont provisoirement rangés dans un ordre déterminé et nous opérerons successivement sur le premier point de A, puis sur le premier point de B, puis sur le second point de A, puis sur le second point de B, etc.; de cette manière nous ne laisserons échapper aucun des points appartenant à l'un des deux ensembles; à chaque point nouveau que nous considérerons dans l'un des ensembles nous ferons correspondre un point déterminé de l'autre ensemble; lorsque le tour de ce nouveau point viendrait, il sera omis.

Nous admettrons que les centres des cercles C et C' ne font pas partie des ensembles A et B (rien ne serait changé s'ils en faisaient partie *tous deux*; on les ferait se correspondre; si l'un d'eux en faisait partie et non pas l'autre, on ferait une représentation conforme très voisine de la transformation identique et transformant l'un des cercles en un cercle égal dont le centre correspond au centre de l'autre cercle). Nous pouvons alors raisonner sur les deux cercles en les considérant comme superposés, mais cependant distincts. Il est possible de choisir deux axes rectangulaires O*x* et O*y* tels que les diamètres parallèles aux axes ne renferment pas de points A ni B et que toute parallèle aux axes renferme au plus un point A et au plus un point B (car l'ensemble des directions des droites qui joignent le centre aux points A et aux points B, ou qui joignent les points A entre eux, ou les points B entre eux, ou qui sont perpendiculaires aux directions précédentes, est un ensemble énumérable). Nous nous donnerons une suite illimitée de nombres positifs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n \dots$ tels que l'on ait

$$1 - \varepsilon < \prod (1 - \varepsilon_n), \quad \prod (1 + \varepsilon_n) < 1 + \varepsilon.$$

Le cercle C se trouve partagé par les diamètres parallèles aux axes en quatre régions égales que nous appellerons provisoirement régions 1, 2, 3, 4; le cercle C' est partagé en régions homologues que nous désignons de la même manière.

Soit A_1 le premier point considéré de A ; il est situé, par exemple, dans la région 3; il est *intérieur* à cette région, à moins qu'il ne soit sur la circonférence, cas que nous réservons pour un instant (puisqu'il ne peut pas être sur les diamètres); nous désignerons par A'_1 le point de la région 3 de C' qui coïncide avec A_1 lorsque l'on transporte C' sur C par une translation; si A'_1 appartient à B nous le désignerons par B_1 , mais il n'en sera pas ainsi en général. Nous définirons alors un carré de centre A'_1 et tel que le rapport de la plus grande à la plus petite des plus courtes distances d'un point du carré au contour de la région 3 soit inférieur à $1 + \varepsilon_1$. Cette plus courte distance est parallèle à l'un des axes pour les portions rectilignes du contour et coïncide avec le rayon pour la portion curviligne; elle n'est pas nulle pour A'_1 d'après nos hypothèses; la construction du carré est donc toujours possible; nous choisirons B_1 arbitrairement à l'intérieur de ce carré (si l'on veut éviter d'avoir à faire un choix arbitraire entre une infinité énumérable de points, on prendra celui dont le rang est le moins élevé dans le classement provisoire); ce point B_1 étant choisi, nous mènerons par A_1 et B_1 des parallèles aux axes; ces parallèles jointes aux diamètres déjà tracés diviseront chacun des cercles en régions (au nombre de 9) qui se correspondront deux à deux; certaines de ces régions (en fait *une*, en ce cas) sont des rectangles; les autres sont des quadrilatères ou des triangles dont certains côtés sont des parallèles aux axes, l'un des côtés étant un arc de cercle. Si nous convenons d'appeler en tous cas dimensions d'une région les dimensions de ses côtés rectilignes, il résulte de la construction faite que les rapports entre les dimensions homologues de deux régions correspondantes sont compris entre $1 + \varepsilon_1$ et $1 - \varepsilon_1$ ⁽¹⁾. Dans le cas, que nous avons réservé, où A_1 est sur la circonférence, on choisira aussi B_1 sur la circonférence, de telle manière que la même condition soit vérifiée relativement aux régions; cela est toujours possible.

Passons maintenant au second point B_2 (que nous prenons dans le second ensemble); nous lui ferons correspondre un point A_2

(1) On a, en effet, $\frac{1}{1 + \varepsilon_1} > 1 - \varepsilon_1$ et, d'après notre construction, les rapports des dimensions homologues sont compris entre $1 + \varepsilon_1$ et $\frac{1}{1 + \varepsilon_1}$.

situé dans la région homologue et choisi de telle manière que les nouvelles régions obtenues en menant les parallèles aux axes par A_2 et B_2 soient telles que le rapport des dimensions de leurs côtés homologues soit compris entre $(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)$ et $(1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2)$; cette condition conduit à assigner au point A_2 une certaine aire intérieure à la région; on choisit A_2 dans cette aire, soit arbitrairement, soit suivant une loi déterminée comme il a été expliqué pour B_1 en ayant soin de prendre A_2 sur la circonférence C si B_2 est sur la circonférence C' ; on continuera de la même manière, en prenant alternativement un point dans A et dans B et lui faisant correspondre un point de l'autre ensemble; après n opérations, on aura des régions, en nombre au plus égal à $(n + 2)^2$ et telles que le rapport de deux dimensions homologues de deux régions qui se correspondent soit toujours compris entre

$$(1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2) \dots (1 - \varepsilon_n)$$

et

$$(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2) \dots (1 + \varepsilon_n),$$

c'est-à-dire *a fortiori* entre $1 - \varepsilon$ et $1 + \varepsilon$. Si l'on continue ainsi indéfiniment, tout point de A et tout point de B sera numéroté, après un nombre fini d'opérations, et aura même un rang au plus égal au double du rang dans le classement provisoire; le classement satisfait bien aux conditions requises, car, si l'on considère deux points quelconques A_p, A_q et les points correspondants B_p, B_q , lorsque la division par région aura été poussée assez loin (c'est-à-dire après un nombre d'opérations égal au plus grand des nombres p et q , la différence des abscisses x_p et x_q de A_p et A_q est égale à la somme des côtés rectilignes de certaines régions, et la différence des abscisses x'_p, x'_q de B_p et de B_q est égale à la somme des côtés rectilignes de régions correspondantes; on a donc

$$(1) \quad 1 - \varepsilon < \frac{x'_p - x'_q}{x_p - x_q} < 1 + \varepsilon$$

et de même

$$(2) \quad 1 - \varepsilon < \frac{y'_p - y'_q}{y_p - y_q} < 1 + \varepsilon,$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$1 - \varepsilon < \frac{\sqrt{(x'_p - x'_q)^2 + (y'_p - y'_q)^2}}{\sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}} < 1 + \varepsilon,$$

ce qui est l'énoncé de notre théorème. On démontrerait de même la proposition analogue relative aux angles α et β que font avec l'axe Ox les droites $A_p A_q$ et $B_p B_q$; on a

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{y_p - y_q}{x_p - x_q},$$

$$\operatorname{tang} \beta = \frac{y'_p - y'_q}{x'_p - x'_q}$$

et les équations (1) et (2) donnent immédiatement

$$\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} < \frac{\operatorname{tang} \alpha}{\operatorname{tang} \beta} < \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}.$$

Supposons les angles α et β positifs; ils sont très voisins l'un de l'autre et, par suite, $\cot \beta + \operatorname{tang} \alpha$ est supérieur ou égal à 2; on en conclut, en négligeant ε^2 ,

$$|\alpha - \beta| < |\operatorname{tang}(\alpha - \beta)| = \left| \frac{\frac{\operatorname{tang} \alpha}{\operatorname{tang} \beta} - 1}{\frac{1}{\operatorname{tang} \beta} + \operatorname{tang} \alpha} \right| < \frac{1}{2} \left| \frac{\operatorname{tang} \alpha}{\operatorname{tang} \beta} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Les propriétés de la correspondance que nous avons établie entre les deux ensembles dénombrables A et B , denses dans les cercles égaux C et C' , mériteraient d'être étudiées d'une manière approfondie; voici quelques remarques qui pourront être utiles dans cette étude. On doit observer d'abord qu'à toute suite partielle $A_{n_1}, A_{n_2}, \dots$ tendant vers un point limite P correspond une suite partielle $B_{n_1}, B_{n_2}, \dots$ tendant vers un point limite P' ; la correspondance entre P et P' est bien définie, c'est-à-dire indépendante de la suite partielle choisie; nous avons donc une correspondance biunivoque entre les points de C et les points de C' .

Convenons d'appeler *droites de discontinuité* les parallèles aux axes menées par les points de l'ensemble; à tout point M non situé sur une droite de discontinuité correspond un point homologue M' et la transformation de la région voisine de M en la région voisine de M' peut s'écrire sous la forme

$$x' = (h + \eta)x,$$

$$y' = (k + \eta')y,$$

x, y étant les coordonnées relatives à M , x', y' les coordonnées

relatives à M' , h, k des constantes comprises entre $1 - \varepsilon$ et $1 + \varepsilon$, η et η' des fonctions de x et de y qui tendent vers zéro lorsque $x^2 + y^2$ tend vers zéro. Les constantes h et k sont les deux rapports de similitude (parallèlement aux deux axes) des voisinages de M' et de M . Si les points M' et M sont situés sur une ligne de discontinuité, le rapport de similitude dans la direction perpendiculaire à cette ligne n'a pas la même valeur des deux côtés de la ligne; en un point M intersection de deux lignes de discontinuité il y a quatre valeurs pour chaque rapport de similitude, correspondant respectivement aux variations positives et négatives des deux coordonnées. Le rapport de similitude h est ainsi défini dans tout C ; c'est une fonction discontinue sur les lignes de discontinuité, mais continue en tout point non situé sur ces lignes.

Si l'on ne sait rien sur le numérotage provisoire des ensembles A et B , on peut dire seulement ceci sur la relation entre ce numérotage provisoire et le numérotage définitif. Le numéro définitif n est au plus égal au double du numéro provisoire p ; car tout point numéroté provisoirement A_p ou B_p est choisi après au plus $2p$ opérations; mais on ne peut donner aucune limite supérieure de p en fonction de n .

Il est possible de donner une telle limite, si l'on a eu soin de choisir le numérotage provisoire parmi ceux qui sont *sensiblement homogènes*; voici ce que nous entendrons par là. Par définition, placer un nombre très grand p de points d'une manière *homogène* dans un cercle C , c'est construire un quadrillage formé de carrés et dont p sommets sont intérieurs à C ; si α_p est le côté du quadrillage, dans tout carré de côté α_p il y aura un point, et dans tout carré de côté $l\alpha_p$ il y en aura exactement l^2 , si l est un nombre entier, et approximativement l^2 si l n'est pas entier. Posons $l\alpha_p = \lambda$ et considérons λ comme fixe et p comme variable; pour chaque valeur de p nous pouvons ainsi calculer le nombre approximatif de points qui sont intérieurs au carré de côté λ ; ce nombre est évidemment asymptotiquement égal à $\frac{p\lambda^2}{\pi r^2}$, r étant le rayon du cercle C .

On dira que la répartition des points de l'ensemble dénombrable $A_1, A_2, \dots, A_p, \dots$ est asymptotiquement homogène, si, quel que soit le carré de côté λ , le nombre λ_p des points d'indice inférieur à p compris à l'intérieur de ce carré à cette même valeur asymptotique-

tique $\frac{\rho\lambda^2}{\pi r^2}$ lorsque p augmente indéfiniment, c'est-à-dire si le rapport $\frac{\pi r^2 \lambda_p}{\rho\lambda^2}$ entre le nombre λ_p et la valeur asymptotique $\frac{\rho\lambda^2}{\pi r^2}$ tend vers l'unité lorsque p augmente indéfiniment, et nous dirons que la répartition est *sensiblement* homogène si ce rapport reste compris entre des nombres fixes α et β ($\alpha < 1 < \beta$), indépendants de p et de la position du carré de côté λ .

Dans la définition précédente de la répartition homogène nous n'avons tenu aucun compte des points situés sur le contour; si le contour est un carré de côté a , le nombre maximum de points situés sur le contour pour un quadrillage de côté $\frac{a}{n}$, est $4n$, le nombre total des points étant n^2 . D'une manière générale, le nombre des points du contour sera dit *normal* s'il est de l'ordre de grandeur de la racine carrée du nombre total des points. Il faut observer que cette appellation de normal se réfère à l'hypothèse qu'il y a des points sur le contour; si les points étaient placés *au hasard*, on devrait admettre que, *dans le cas général*, il n'y a *aucun point* sur le contour; cette hypothèse est d'ailleurs la plus simple. Mais, *s'il y a* des points sur le contour, c'est qu'il existe une certaine relation entre la manière dont est donné le contour et la manière dont sont choisis les points; il est alors naturel de supposer que la probabilité pour qu'un point tombe sur un arc de longueur égale à l'unité est dans un rapport fini avec la probabilité pour que ce point tombe dans une aire égale à l'unité; cette hypothèse est vérifiée, par exemple, si le contour est un cercle et si les points de l'ensemble sont les points à coordonnées rationnelles; on pourrait imaginer d'autres hypothèses, en relation avec des problèmes de la théorie des nombres.

Nous devons donc, dans le cas où il y a des points sur le contour, ajouter à l'hypothèse que la répartition est sensiblement homogène à l'intérieur, l'hypothèse que la répartition est sensiblement homogène sur le contour.

Dans bien des questions, la définition précédente de la répartition sensiblement homogène est insuffisante; il faut ajouter une condition, que l'on peut appeler condition d'homogénéité *intrinsèque*, parce qu'elle fait intervenir les positions relatives des points de l'ensemble. Si l'on considère les sommets d'un quadrillage, que

nous prenons comme type de l'homogénéité (il en serait de même pour un réseau de triangles équilatéraux), la plus petite distance de deux sommets est proportionnelle à l'inverse de la racine carrée du nombre total des points ; nous dirons *qu'un ensemble à deux dimensions est intrinsèquement homogène si la plus petite distance entre deux points dont les rangs sont inférieurs à p est de l'ordre de grandeur ⁽¹⁾ de $\frac{1}{\sqrt{p}}$* . L'homogénéité de répartition et l'homogénéité intrinsèque sont deux notions indépendantes ; aucune des deux n'est une conséquence nécessaire de l'autre ; cependant, l'homogénéité de répartition est une condition *nécessaire* (non suffisante) de l'homogénéité intrinsèque.

Étant donné un ensemble énumérable dense dans un cercle (ou dans un carré), il est toujours possible de le numéroté de manière à vérifier les conditions d'homogénéité ; un des moyens les plus simples d'y parvenir consiste, après avoir numéroté un certain nombre de points, à tracer un quadrillage assez fin pour comprendre à l'intérieur du cercle un peu plus de carrés qu'il n'y a de points numérotés, et pour que chaque carré renferme au plus un point numéroté ; il y a alors certains carrés qui ne renferment pas de points numérotés ; on numéroté dans chacun de ces carrés *un* point de l'ensemble, en le choisissant à l'intérieur d'un carré concentrique de dimensions deux fois plus petites et prenant le point d'indice le moins élevé dans le numérotage provisoire (ceci afin d'être sûr de n'oublier aucun point). Tout numérotage qui satisfait aux deux conditions d'homogénéité sera dit *normal*. Il est aisé de se rendre compte que les procédés de numérotage habituellement indiqués pour les ensembles dénombrables usuels (nombres rationnels, quadratiques, algébriques) conduisent à des numérotages normaux.

Lorsque les deux ensembles denses dans C et C' sont numérotés normalement, il est possible de s'arranger de manière que la correspondance biunivoque établie entre leurs éléments soit elle-même normale, c'est-à-dire qu'il existe entre le rang provisoire p et le rang définitif n des inégalités de la forme

$$p^\alpha < n < p^\beta,$$

(¹) Une condition analogue doit être vérifiée pour la plus courte distance à la frontière des points très voisins de cette frontière et non situés sur elle.

les exposants α et β étant des nombres finis qui ne dépendent que du nombre de dimensions de l'ensemble considéré et du choix de la série convergente $\Sigma \varepsilon_n$ dont on a fait usage. (Pour que l'on puisse être assuré que α et β soient finis, il faut qu'il existe un nombre fini h tel que $\lim n^h \varepsilon_n = 0$.)

On peut supposer que l'ensemble A se subdivise en deux ensembles, tous deux partout denses A' et A'' , et que B se subdivise de même en deux ensembles partout denses B' et B'' . Il est alors aisé de prouver que la correspondance peut être établie de manière que les points de A' correspondent aux points de B' et les points de A'' aux points de B'' ; il ne suffirait pas, bien entendu, pour cela, d'appliquer le théorème général, d'abord à A' et B' , puis à A'' et B'' , car la correspondance entre les points P et P' intérieurs à C et C' , ainsi établie, ne serait généralement pas la même pour les deux correspondances. On étendrait aisément ceci au cas où A renferme une infinité énumérable de parties aliquotes partout denses, et où il en est de même de B . On peut établir, par exemple, une correspondance biunivoque et continue entre les nombres rationnels intérieurs à un intervalle et les nombres algébriques intérieurs à un intervalle égal, de telle manière qu'aux nombres rationnels dont le dénominateur renferme h facteurs premiers distincts et h seulement correspondent les nombres algébriques qui vérifient une équation irréductible de degré h (pour $h = 1$ ce sont les nombres rationnels; si l'on voulait considérer seulement les nombres algébriques non rationnels, on dirait équation irréductible de degré $h + 1$).

III.

Considérons maintenant deux ensembles réguliers de mesure nulle, dont les points fondamentaux sont précisément les points des ensembles énumérables A et B intérieurs aux cercles C et C' . Si nous supposons que les carrés d'exclusion attachés aux points fondamentaux correspondants ont pour côtés des droites qui se correspondent, il est évident que les deux ensembles se correspondront point par point dans la correspondance biunivoque que nous avons établie entre les points P intérieurs à C et les points P' intérieurs à C' . En d'autres termes, *étant donné un ensemble régulier de mesure nulle dont les points fondamentaux B sont denses dans*

C', on peut définir un ensemble régulier de mesure nulle dont les points fondamentaux sont les points d'un ensemble déterminé Λ dense dans C , de telle manière que les deux ensembles se correspondent d'une manière biunivoque et continue (le rapport de similitude étant compris entre $1 - \varepsilon$ et $1 + \varepsilon$).

Donc, pour étudier les ensembles réguliers de mesure nulle dont les points fondamentaux sont denses dans un domaine, on peut, sans restreindre la généralité, supposer que ces points fondamentaux sont, par exemple, les points à coordonnées rationnelles ; l'étude en est alors facilitée par l'emploi des propriétés des fractions continues. En particulier, il est très facile de démontrer cette proposition importante : *Tout ensemble régulier de mesure nulle dont les points fondamentaux sont denses dans un domaine a la puissance du continu.* En d'autres termes, si l'on dispose arbitrairement de la décroissance des carrés d'exclusion autour des points fondamentaux, il n'est pas possible de rendre cette décroissance assez rapide pour que les points fondamentaux soient les seuls points de l'ensemble. Plaçons-nous, pour simplifier, dans le cas d'une seule dimension ; la démonstration est au fond la même quel que soit le nombre de dimensions. Soient $\Lambda_n^{(h)}$ les intervalles d'exclusion attachés aux points Λ_n . Pour chaque valeur de h on peut définir une fonction positive croissante $\varphi_h(n)$ telle que l'on ait

$$\text{mesure}(\Lambda_n^{(h)}) > \frac{1}{\varphi_h(n)}.$$

D'autre part, étant donnée une suite énumérable de fonctions croissantes $\varphi_h(n)$, il est possible, d'après un théorème bien connu de Paul du Bois-Reymond, de construire une fonction $\varphi(n)$ croissant plus rapidement que chacune de ces fonctions $\varphi_h(n)$. Cette fonction $\varphi(n)$ étant connue, la théorie des fractions continues permet de définir une infinité de nombres irrationnels x (infinité ayant la puissance du continu) tels qu'il existe pour chacun d'eux une infinité énumérable de relations de la forme

$$\left| x - \frac{m}{n} \right| < \frac{1}{\varphi(n)},$$

m et n étant des entiers. Un tel nombre x appartient, quel que soit h , à au moins l'un des intervalles $\Lambda_n^{(h)}$; il fait donc partie de

l'ensemble défini par les points Λ_n et ces intervalles d'exclusion. Pour définir les nombres x et prouver que leur ensemble a la puissance du continu, il suffit de considérer une fraction continue dans laquelle les quotients incomplets ont une croissance très rapide; si l'on pose

$$P_{n+1} = \alpha_n P_n + P_{n-1},$$

$$Q_{n+1} = \alpha_n Q_n + Q_{n-1},$$

on admettra que l'on a

$$\alpha_n > \varphi(Q_n),$$

la fonction $\varphi(n)$ étant la fonction que nous venons de définir, on a bien, d'après les propriétés des réduites,

$$\left| x - \frac{P_n}{Q_n} \right| < \left| \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} \right| = \frac{1}{Q_n Q_{n+1}} < \frac{1}{\varphi(Q_n)}.$$

Or, l'ensemble des systèmes de nombres entiers α_n , qui vérifient les relations $\alpha_n > \varphi(Q_n)$, a évidemment la puissance du continu ⁽¹⁾.

Si l'on voulait avoir des intervalles d'exclusion assez rapidement décroissants pour que l'ensemble défini par ces intervalles se compose des seuls points fondamentaux, il faudrait que l'ensemble des fonctions $\varphi_h(n)$ renferme des fonctions à croissance plus rapide que celle de toute fonction donnée d'avance $\varphi(n)$. Cela n'est pas possible, d'après le théorème de Paul du Bois-Reymond, si les indices h sont énumérables; il faudrait donc attacher à chaque point fondamental une infinité transfinie d'intervalles d'exclusion, les fonctions $\varphi_\alpha(n)$ correspondantes (α désignant un nombre transfini) étant telles que toute fonction croissante $\varphi(n)$ soit dépassée par l'une d'elles. On sort ainsi du domaine des définitions exprimables au moyen d'un nombre fini de mots.

Pour classer les ensembles réguliers de mesure nulle, il vaut mieux considérer, au lieu des fonctions $\varphi_h(n)$ que nous avons définies, d'autres fonctions $\psi_h(n)$ définies par les relations

$$\sum_{p=n}^{\infty} \text{mesure } \Lambda_p^{(h)} = \frac{1}{\psi_h(n)}.$$

(1) Chacun des α_n peut être pair ou impair; l'ensemble des x comprend donc un ensemble de même puissance que l'ensemble des nombres tels que 0,1010110... écrits dans le système de numération binaire.

La convergence des séries formées par les intervalles d'exclusion de rang h entraîne le fait que les fonctions $\psi_h(n)$ croissent indéfiniment avec n . D'après le théorème de Paul du Bois-Reymond, il existe une fonction $\psi(n)$ croissant moins vite que chacune d'elles et tendant cependant vers $+\infty$ en même temps que n . On a, quel que soit h , pour n assez grand,

$$\sum_{p=n}^{\infty} \text{mesure } A_p^{(h)} < \frac{1}{\psi(n)},$$

c'est-à-dire que les diverses séries formées par les intervalles d'exclusion convergent toutes plus rapidement que la série

$$\sum \left[\frac{1}{\psi(n)} - \frac{1}{\psi(n+1)} \right].$$

Plus la croissance de $\psi(n)$ est rapide, moins l'ensemble de mesure nulle renferme de points, car les intervalles d'exclusion décroissent alors plus rapidement. Il est naturel de prendre la fonction $\psi(n)$ comme définissant ce que l'on peut appeler l'ordre asymptotique de l'ensemble régulier de mesure nulle. On pourra noter ces ordres au moyen des notations employées pour les ordres d'infinitude; $\psi(n) = n^p$ sera dit d'ordre p , $\psi(n) = e^n$ sera d'ordre ω ; e^{e^n} d'ordre ω^2 , etc. Ce sont les ensembles d'ordre ω^2 qui interviennent dans la définition des fonctions monogènes non analytiques.

IV.

Il n'est peut-être pas inutile d'insister un peu sur les conclusions générales qui se dégagent de cette étude rapide des ensembles de mesure nulle.

Les ensembles de mesure nulle jouent un rôle fondamental dans la théorie des fonctions; il est, en effet, toujours possible d'enfermer les singularités des fonctions bornées dans des ensembles qui sont, soit de mesure nulle, soit de mesure aussi petite que l'on veut. D'autre part, les ensembles qui ne sont pas de mesure nulle sont formés d'une manière simple, avec des ensembles continus positifs ou négatifs; ils sont hétérogènes au continu; les ensembles de mesure nulle peuvent être, au contraire, sensiblement homo-

gènes au continu, c'est-à-dire identiques à eux-mêmes dans des intervalles aussi petits que l'on veut. Pour ces diverses raisons, la notion d'ensemble de mesure nulle est primordiale ; mais c'est en même temps une notion si générale que l'on ne peut espérer approfondir réellement l'étude des propriétés des fonctions qu'en étudiant de plus près cette notion générale, c'est-à-dire en ne confondant pas entre eux tous les ensembles de mesure nulle. La classification basée sur la décroissance asymptotique des intervalles d'exclusion me paraît être un premier pas dans cette étude qui s'impose aux analystes. Il en est d'ailleurs évidemment dans cette question comme dans toutes celles où intervient la notion générale de croissance (comme, par exemple, dans la théorie de la convergence des séries à termes positifs) ; il se présente des difficultés transfinies que l'on ne peut espérer surmonter entièrement ; mais, d'autre part, les problèmes qui se présentent réellement sont généralement, sinon toujours, indépendants de ces difficultés (c'est ainsi que les critères usuels de convergence des séries à termes positifs, quoique théoriquement très particuliers, sont pratiquement suffisants pour traiter les séries qui se présentent dans toutes les recherches analytiques). On peut légitimement espérer qu'il en sera de même dans la classification des ensembles de mesure nulle ; théoriquement, la complexité de cette classification dépasse celle de l'étude des séries à termes positifs, étude qui ne sera jamais achevée ; pratiquement, un nombre relativement restreint de classes simples suffira pour les besoins effectifs de l'analyse.

En terminant, j'attire l'attention sur une conséquence remarquable du théorème sur la correspondance entre deux ensembles dénombrables partout denses. Il peut sembler naturel, si l'on passe du fini à l'infini dénombrable, de supposer que les positions d'équilibre des centres de gravité des molécules d'un corps solide forment un ensemble dénombrable dense ; mais, *a priori*, il aurait pu sembler que c'était une hypothèse absolument arbitraire que de les supposer coïncider avec les points à coordonnées rationnelles ; cette définition arithmétique simple semblait n'avoir rien à faire avec la conception physique. En fait, elle n'est évidemment pas nécessaire, mais elle est aussi générale que toute autre : le point important est qu'elle vérifie, comme nous l'avons constaté, les conditions d'homogénéité de répartition et d'homogénéité intrinsèque.

Les considérations arithmétiques sur l'approximation des nombres par les nombres rationnels sont ainsi l'image de propriétés générales des ensembles denses.

GÉNÉRALISATION D'UN THÉORÈME DE M. LANDAU;

PAR M. GEORGES RÉMOUNDOS.

1. En 1904, M. Landau ⁽¹⁾ a démontré le théorème suivant :

Soit une fonction analytique

$$H(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \dots + \alpha_m z^m + \dots,$$

régulière en $z = 0$, pour laquelle

$$\alpha_1 \neq 0,$$

il existe un cercle

$$|z| < R = R(\alpha_0, \alpha_1)$$

dont le rayon dépend seulement de α_0 et α_1 (et non des autres coefficients $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_m, \dots$), à l'intérieur duquel la fonction $H(z)$ possède un point singulier ou prend au moins une fois l'une des valeurs zéro et un.

C'est une généralisation très importante d'un célèbre théorème de M. Picard.

Dans un travail qui paraîtra prochainement dans les *Annales de l'École normale supérieure de Paris*, nous établissons une extension du théorème ci-dessus indiqué de M. Landau à une classe très étendue de fonctions qui ne sont pas régulières en $z = 0$.

Je me propose de donner maintenant une nouvelle extension du

(¹) *Ueber eine Verallgemeinerung des Picardschen Satzes* (Sitzungsberichte der Königlich. Preussischen Akademie der Wissenschaften, Berlin, 1904, p. 1118-1133).

théorème de M. Landau, moins générale, mais présentant un intérêt particulier. Cette nouvelle généralisation est, pour ainsi dire, plus fidèle, et le théorème, que nous allons établir ici, a un énoncé plus simple et presque identique à celui de M. Landau. Elle ne concerne que les fonctions algébroides et finies en $z = 0$, ce point étant un point critique algébrique pour certaines de leurs branches; au contraire, la première généralisation (qui va paraître dans les *Annales de l'École normale supérieure*) concerne aussi des fonctions qui sont infinies en $z = 0$, ou pour lesquelles le point $z = 0$ peut être critique transcendant.

Dans la nouvelle généralisation, il s'agit des points singuliers de la fonction elle-même, qui prend ou non une fois au moins l'une des valeurs *zéro* et *un*, tandis que dans la première il s'agit des points singuliers d'une autre fonction qui se rattache à la fonction donnée. Les deux généralisations ne sont pas de même nature.

2. Soit $u = \varphi(z)$ une fonction multiforme dans le voisinage du point $z = 0$, qui est pour elle un point critique algébrique. Soient

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{lllll} u_{11}, & u_{12}, & u_{13}, & \dots, & u_{1n_1} & \text{du système } S_1, \\ u_{21}, & u_{22}, & u_{23}, & \dots, & u_{2n_2} & \text{» } S_2, \\ \dots & \dots, & \dots, & \dots, & \dots & \text{» } \dots, \\ u_{m1}, & u_{m2}, & u_{m3}, & \dots, & u_{mn_m} & \text{» } S_m, \end{array} \right.$$

les divers systèmes circulaires $S_1, S_2, \dots, S_m$ des branches de la fonction donnée $u = \varphi(z)$. Soient

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \varphi_1(z) = \alpha_{10} + \alpha_{11} \frac{1}{z^{n_1}} + \alpha_{12} \frac{2}{z^{n_1}} + \dots & \text{pour le système } S_1, \\ \varphi_2(z) = \alpha_{20} + \alpha_{21} \frac{1}{z^{n_2}} + \alpha_{22} \frac{2}{z^{n_2}} + \dots & \text{» } S_2, \\ \dots & \text{» } \dots, \\ \varphi_m(z) = \alpha_{m0} + \alpha_{m1} \frac{1}{z^{n_m}} + \alpha_{m2} \frac{2}{z^{n_m}} + \dots & \text{» } S_m, \end{array} \right.$$

les séries qui représentent dans le voisinage de $z = 0$ les branches de chacun des systèmes circulaires. Nous supposons, bien entendu, que la fonction donnée soit finie en $z = 0$. En posant

$$\frac{1}{z^{n_1}} = \omega_1, \quad \frac{1}{z^{n_2}} = \omega_2, \quad \dots, \quad \frac{1}{z^{n_m}} = \omega_m,$$

critique), ou bien prend une fois au moins l'une des valeurs zéro et un.

Il n'est pas sans intérêt de remarquer que, dans le cas où la fonction donnée $u = \varphi(z)$ possède une infinité de branches formant des systèmes circulaires, il y aura une infinité de séries (4) et le point $z = 0$ sera un point critique algébrique des branches formant un système circulaire et un point régulier pour les branches isolées qui ne rentrent pas dans des systèmes circulaires. Dans ce cas, le théorème ci-dessus énoncé est aussi vrai.

Nous remarquons aussi que, dans le tableau (4), il peut y avoir des séries entières (c'est-à-dire des séries ne contenant que des puissances entières de z) appartenant aux branches isolées, c'est-à-dire aux branches qui sont holomorphes en $z = 0$. Notre énoncé se rapporte à l'ensemble des branches de la fonction donnée $u = \varphi(z)$.

4. Le rayon R du cercle indiqué dans l'énoncé de notre théorème peut, évidemment, être pris égal au plus petit des nombres

$$(5) \quad [L(\alpha_{10}, \alpha_{11})]^{n_1}, \quad [L(\alpha_{20}, \alpha_{21})]^{n_2}, \quad \dots, \quad [L(\alpha_{m0}, \alpha_{m1})]^{n_m}.$$

Si nous considérons le cercle, dont le rayon est égal au plus grand de ces nombres, à l'intérieur de ce cercle le théorème sera valable pour les branches de chacun des systèmes circulaires.

Nous pouvons, bien entendu, limiter avec plus de précision le rayon R , en utilisant les fonctions $\varphi(\alpha_{10}, \alpha_{11})$, $\varphi(\alpha_{20}, \alpha_{21})$, ..., $\varphi(\alpha_{m0}, \alpha_{m1})$ indiquées par M. Landau ⁽¹⁾ et déterminées par M. Carathéodory ⁽²⁾. On pourrait aussi donner à $L(\alpha_{10}, \alpha_{11})$, $L(\alpha_{20}, \alpha_{21})$, ... les valeurs élémentaires données par MM. Hurwitz ⁽³⁾ et Schottky ⁽⁴⁾.

(¹) LANDAU, *Ueber den Picardschen Satz* (Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, Jahrgang 51, 1906).

(²) CARATHÉODORY, *Sur quelques généralisations du théorème de M. Picard* (Comptes rendus de l'Acad. des Sciences de Paris, t. 141, 1905, p. 1213-1215).

(³) HURWITZ, *Ueber die Anwendung der elliptischen Modulfunctionen auf einen Satz der allgemeinen Functionentheorie* (Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, Bd. 49, 1904, p. 212-253).

(⁴) SCHOTTKY, *Ueber den Picardschen Satz und die Borelschen Unglei-*

Nous remarquons enfin que, si nous voulons utiliser les résultats récents établis par M. Montel ⁽¹⁾, notre procédé permettrait d'obtenir pour les fonctions multiformes dans le voisinage de $z=0$ des résultats plus généraux que ceux qui sont jusqu'ici énoncés.

SUR UN DÉVELOPPEMENT D'UNE FONCTION A VARIABLE RÉELLE
EN SÉRIES DE POLYNOMES;

PAR M. H. GALBRUN.

Les dérivées successives par rapport à x de la fonction e^{-x^2} se présentent comme un produit de deux facteurs dont l'un est la fonction primitive et l'autre un polynome; la dérivée $n^{\text{ième}}$ est ainsi de la forme

$$\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} = e^{-x^2} P_n(x),$$

$P_n(x)$ étant un polynome de degré n , ne contenant que des termes de même parité que n ; ces polynomes satisfont à la relation de récurrence

$$(1) \quad P_n(x) + 2x P_{n-1}(x) + 2(n-1)P_{n-2}(x) = 0$$

qui permet d'établir facilement leur expression générale; pour n pair on a

$$(2) \quad P_{2p}(x) = (2x)^{2p} - \frac{2p(2p-1)}{1}(2x)^{2p-2} + \dots \\ + (-1)^q \frac{2p(2p-1)\dots(2p-2q+1)}{q!}(2x)^{2p-2q} + \dots + (-1)^p \frac{(2p)!}{p!}$$

chungen (Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, Berlin, 1904, p. 1244-1262).

⁽¹⁾ P. MONTEL, *Sur quelques généralisations du théorème de M. Picard* (*Comptes rendus*, 18 novembre 1912, p. 1000-1003).

et pour n impair

$$(2') \quad P_{2p+1}(x) = - \left[(2x)^{2p+1} - \frac{(2p+1)2p}{1} (2x)^{2p-1} + \dots \right. \\ \left. + (-1)^q \frac{(2p+1)2p \dots (2p-2q+2)}{q!} (2x)^{2p-2q+1} + \dots \right. \\ \left. + (-1) \frac{(2p+1)!}{p!} 2x \right].$$

On sait d'autre part que l'on a

$$(3) \quad \sqrt{\pi} e^{-x^2} = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{4}} \cos \alpha x \, d\alpha.$$

En dérivant les deux membres de cette égalité par rapport à x , on trouve

$$(4) \quad \sqrt{\pi} e^{-x^2} P_{2p}(x) = (-1)^p \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{4}} \alpha^{2p} \cos \alpha x \, d\alpha,$$

$$(4') \quad \sqrt{\pi} e^{-x^2} P_{2p+1}(x) = (-1)^{p+1} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{4}} \alpha^{2p+1} \sin \alpha x \, d\alpha.$$

Ces deux égalités permettent d'obtenir une limite supérieure du module des polynômes $P_n(x)$ quand x est réel; dans ce cas, il est clair qu'on a

$$|\sqrt{\pi} e^{-x^2} P_n(x)| < \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{4}} \alpha^n \, d\alpha.$$

Or, si dans l'intégrale

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x \, dt,$$

définissant la fonction eulérienne de seconde espèce, on fait le changement de variable

$$t = \frac{\alpha^2}{4},$$

on obtient

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{4}} \alpha^n \, d\alpha = 2^n \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\frac{n-1}{2}} \, dt = 2^n \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right).$$

On a donc finalement

$$(5) \quad |P_n(x)| < 2^n \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}.$$

Pour faciliter les écritures nous serons amenés à poser

$$(6) \quad \begin{cases} P_{2p}(x) = (-1)^p 2^{2p} \Gamma\left(\frac{2p+1}{2}\right) U_{2p}(x), \\ P_{2p+1}(x) = (-1)^{p+1} 2^{2p+1} \Gamma\left(\frac{2p+2}{2}\right) U_{2p+1}(x). \end{cases}$$

L'inégalité (5) devient alors

$$(5') \quad |U_n(x)| < \frac{e^{x^2}}{\sqrt{\pi}}.$$

En nous appuyant sur la formule de récurrence (1) et sur l'inégalité (5), nous nous proposons d'établir que toute fonction $f(x)$ de la variable réelle x , continue dans un intervalle (a, b) , et n'admettant dans cet intervalle qu'un nombre fini de maxima et de minima peut y être représentée par une série de la forme

$$a_0 + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x) + \dots + a_n P_n(x) + \dots$$

dans laquelle $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont des coefficients constants. La démonstration est semblable à celle qu'on emploie pour établir les propriétés des séries de Fourier et s'appuie sur une formule d'addition analogue à celle des sommes de cosinus et de sinus dont l'argument varie en progression arithmétique.

I.

Considérons la somme

$$(7) \quad S_{2q}(x, \alpha) = P_0(x)P_0(\alpha) + \frac{P_1(x)P_1(\alpha)}{2 \cdot 1!} + \frac{P_2(x)P_2(\alpha)}{2^2 \cdot 2!} + \dots + \frac{P_{2q}(x)P_{2q}(\alpha)}{2^{2q} \cdot 2q!},$$

où par définition

$$P_0(x) = 1.$$

Quand dans le second membre de (7) on remplace les polynomes P_n par leur valeur en fonction des polynomes U_n déduite des égalités (6), il vient

$$\begin{aligned} S_{2q}(x, \alpha) = & \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^2 U_0(x)U_0(\alpha) + \frac{2 \left[\Gamma\left(\frac{2}{2}\right) \right]^2}{1!} U_1(x)U_1(\alpha) + \dots \\ & + \frac{2^{2q} \left[\Gamma\left(\frac{2q+1}{2}\right) \right]^2}{2q!} U_{2q}(x)U_{2q}(\alpha). \end{aligned}$$

Ajoutons ces égalités membre à membre après les avoir multipliées respectivement par $U_0(\alpha)$, $U_2(\alpha)$, ..., $U_{2q}(\alpha)$; il vient

$$(10) \quad x A_{2q} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \{ U_1(x)[U_0(\alpha) - U_2(\alpha)] + U_3(x)[U_2(\alpha) - U_4(\alpha)] + \dots \\ + U_{2q-1}(x)[U_{2q-2}(\alpha) - U_{2q}(\alpha)] + U_{2q}(x) U_{2q+1}(x) \}.$$

D'autre part, la relation de récurrence (1) donne

$$\frac{\Gamma\left(\frac{2p+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2p+3}{2}\right)} x U_{2p+1}(x) = U_{2p}(x) - U_{2p+2}(x),$$

d'où l'on tire

$$(11) \quad \frac{2^{2p+1} \left[\Gamma\left(\frac{2p+2}{2}\right) \right]^2}{(2p+1)!} x U_{2p+1}(x) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) [U_{2p}(x) - U_{2p+2}(x)].$$

Dans le second membre de (10) remplaçons les différences $U_{2p}(\alpha) - U_{2p+2}(\alpha)$ par leur valeur tirée de (11); il vient

$$(12) \quad x A_{2q} = x B_{2q-1} + \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) U_{2q}(\alpha) U_{2q+1}(x).$$

Le même raisonnement peut être fait en partant cette fois des q premières égalités (11) qu'on ajoute membre à membre après les avoir multipliées respectivement par $U_1(\alpha)$, $U_3(\alpha)$, ..., $U_{2q-1}(\alpha)$; il vient ainsi

$$x B_{2q-1} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \{ U_0(x) U_1(\alpha) + U_2(x) [U_3(\alpha) - U_1(\alpha)] + \dots \\ + U_{2q-2}(x) [U_{2q-1}(\alpha) - U_{2q-3}(\alpha)] - U_{2q}(x) U_{2q-1}(\alpha) \}$$

ou

$$x B_{2q-1} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \left\{ x \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) U_0(x) U_0(\alpha) + U_2(x) [U_3(\alpha) - U_1(\alpha)] + \dots \\ + U_{2q-2}(x) [U_{2q-1}(\alpha) - U_{2q-3}(\alpha)] \\ + U_{2q}(x) [U_{2q+1}(\alpha) - U_{2q-1}(\alpha)] - U_{2q}(x) U_{2q+1}(x) \right\}.$$

En remplaçant dans le second membre les différences $U_{2p+1}(\alpha) - U_{2p-1}(\alpha)$ par leur valeur tirée de (8), il vient

$$(13) \quad x B_{2q-1} = x A_{2q} - \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) U_{2q}(\alpha) U_{2q+1}(x).$$

En ajoutant membre à membre les égalités (12) et (13), il vient

$$(x - \alpha) [A_{2q} + B_{2q-1}] = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) [U_{2q}(\alpha) U_{2q+1}(x) - U_{2q}(x) U_{2q+1}(\alpha)],$$

d'où

$$(14) \quad S_{2q}(x, \alpha) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \alpha} [U_{2q}(\alpha) U_{2q+1}(x) - U_{2q}(x) U_{2q+1}(\alpha)],$$

expression valable tant que x et α sont deux nombres différents ; elle s'écrit en fonction des polynomes $P_n(x)$

$$(14') \quad S_{2q}(x, \alpha) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2^{2q+1} \Gamma\left(\frac{2q+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2q-1}{2}\right)} \times \frac{P_{2q}(x) P_{2q+1}(\alpha) - P_{2q}(\alpha) P_{2q+1}(x)}{x - \alpha}.$$

II.

D'une façon générale, désignons par $I_{2q}^{a,b}(x)$ l'intégrale

$$(15) \quad I_{2q}^{a,b}(x) = \int_a^b S_{2q}(x, \alpha) e^{-\alpha^2} d\alpha,$$

et considérons tout d'abord le cas où la limite supérieure b est infinie, tandis que la limite inférieure a est égale à x ; la formule (15) devient ainsi

$$(16) \quad I_{2q}^{x,+\infty}(x) = \int_x^{+\infty} S_{2q}(x, \alpha) e^{-\alpha^2} d\alpha.$$

D'après la définition même de $S_{2q}(x, \alpha)$, on a

$$I_{2q}^{x,+\infty}(x) = \int_x^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha - \frac{P_1(x) e^{-x^2}}{2} - \frac{P_2(x) P_1(x) e^{-x^2}}{2^2 \cdot 2!} - \dots \\ - \frac{P_{2q}(x) P_{2q-1}(x) e^{-x^2}}{2^{2q} \cdot 2q!}.$$

Quand q augmente indéfiniment, le second membre de cette égalité devient une série dont le terme général est

$$(17) \quad u_n = \frac{P_n(x) P_{n-1}(x) e^{-x^2}}{2^n n!}.$$

Cette série est convergente.

En effet, groupons ses termes deux à deux et considérons la série ainsi formée par les groupes de deux termes consécutifs; son terme général s'écrit

$$(18) \quad \left[\frac{P_{2p}(x) P_{2p-1}(x)}{2^{2p} 2p!} + \frac{P_{2p+1}(x) P_{2p}(x)}{2^{2p+1} (2p+1)!} \right] e^{-x^2}$$

ou

$$\frac{P_{2p}(x) e^{-x^2}}{2^{2p+1} (2p+1)!} [2(2p+1) P_{2p-1}(x) + P_{2p+1}(x)],$$

ou, en vertu de la relation de récurrence (1),

$$(19) \quad \frac{P_{2p}(x) e^{-x^2}}{2^{2p} (2p+1)!} [P_{2p-1}(x) - x P_{2p}(x)].$$

Or, d'après la relation (6), on a

$$\frac{P_{2p}(x) P_{2p-1}(x)}{2^{2p} (2p+1)!} = \frac{2^{2p-1} \Gamma\left(\frac{2p+1}{2}\right) \Gamma(p) U_{2p}(x) U_{2p-1}(x)}{\Gamma(2p+2)}.$$

Si la variable x est astreinte à ne prendre que les valeurs d'un intervalle (a, b) fixe et d'ailleurs aussi étendu qu'on veut, on peut d'après l'inégalité (5') déterminer un nombre positif tel que le module des polynômes $U_n(x)$ reste inférieur à ce nombre si grand que soit l'indice n . D'autre part, on sait que y augmentant indéfiniment par valeurs positives le rapport

$$\frac{\Gamma(y)}{\sqrt{2\pi} y^{y-\frac{1}{2}} e^{-y}}$$

tend vers l'unité; il en résulte que la quantité

$$\frac{2^{2p-1} \Gamma\left(\frac{2p+1}{2}\right) \Gamma(p)}{\Gamma(2p+2)}$$

tend vers 0 comme $\frac{1}{p^2}$ quand p augmente indéfiniment; la série de terme général

$$\frac{P_{2p}(x) P_{2p-1}(x)}{2^{2p-1} (2p+1)!} e^{-x^2}$$

est donc absolument et uniformément convergente.

D'après la relation (6) on a

$$\frac{[P_{2p}(x)]^2}{2^{2p}(2p+1)!} = \frac{2^{2p} \left[\Gamma\left(\frac{2p+1}{2}\right) \right]^2 [U_{2p}(x)]^2}{\Gamma(2p+2)}.$$

Un raisonnement analogue au précédent montre que ce rapport tend en valeur absolue vers 0 comme $\frac{1}{p^2}$; la série dont le terme général est

$$\frac{[P_{2p}(x)]^2}{2^{2p}(2p+1)!} e^{-x^2}$$

est donc absolument et uniformément convergente.

La série dont le terme général est l'expression (18), somme de deux séries absolument et uniformément convergentes, est absolument et uniformément convergente.

Il en résulte que la série dont le terme général est l'expression (17) est elle-même uniformément convergente; considérons en effet la somme de ses premiers termes; si le premier terme, du reste, correspond à une valeur paire de n , la somme obtenue n'est autre que la somme S_k des premiers termes de la série dont le terme général est l'expression (18); si le premier terme, du reste, correspond à une valeur impaire de n , la somme obtenue est de la forme

$$S_k + u_n.$$

Mais le module de u_n tend vers 0 comme $\frac{1}{n}$; les deux quantités S_k et $S_k + u_n$ tendent donc vers une limite commune S ; la série considérée est convergente; on peut même affirmer qu'elle converge uniformément quand la variable x est astreinte à ne prendre que les valeurs d'un intervalle fixe (a, b) d'ailleurs aussi étendu qu'on veut.

En résumé, quand q augmente indéfiniment, la quantité $I_{2q}^{x,+\infty}(x)$ a pour limite une fonction continue que nous désignerons par $I^{x,+\infty}(x)$.

Considérons de même la quantité

$$\begin{aligned} (20) \quad I_{2q}^{x,+\infty}(x) &= \int_{-\infty}^x S_{2q}(x, x) e^{-x^2} dx \\ &= \int_{-\infty}^x e^{-x^2} dx + \frac{P_1(x) e^{-x^2}}{2} + \dots + \frac{P_{2q}(x) P_{2q-1}(x) e^{-x^2}}{2^{2q} \cdot 2q!}. \end{aligned}$$

Quand q augmente indéfiniment le second membre de cette égalité devient une série uniformément convergente dont la somme $I^{-\infty, x}(x)$ est une fonction continue.

On a manifestement

$$I^{x, +\infty}(x) + I^{-\infty, x}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = \sqrt{\pi}.$$

D'autre part, la différence

$$I^{-\infty, x}(x) - I^{x, +\infty}(x)$$

n'est autre que la somme de la série

$$(21) \quad S(x) = \int_{-\infty}^x e^{-\alpha^2} d\alpha - \int_x^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha \\ + 2 \left[\frac{P_1(x) e^{-x^2}}{2} + \frac{P_2(x) P_1(x) e^{-x^2}}{2^2 \cdot 2!} + \dots \right. \\ \left. + \frac{P_n(x) P_{n-1}(x) e^{-x^2}}{2^n \cdot n!} + \dots \right].$$

On a donc

$$\frac{S(x)}{2} = \int_0^x e^{-\alpha^2} d\alpha + \frac{P_1(x) e^{-x^2}}{2} + \frac{P_2(x) P_1(x) e^{-x^2}}{2^2 \cdot 2!} + \dots \\ + \frac{P_n(x) P_{n-1}(x) e^{-x^2}}{2^n \cdot n!} + \dots$$

En dérivant terme à terme, et en remarquant que

$$\frac{dP_n(x)}{dx} = -2n P_{n-1}(x),$$

il vient

$$(22) \quad \frac{S'(x)}{2} = e^{-x^2} + \frac{P_2(x) e^{-x^2}}{2} + \left\{ \frac{[P_2(x)]^2 e^{-x^2}}{2^2 \cdot 2!} - \frac{[P_1(x)]^2 e^{-x^2}}{2!} \right\} + \dots \\ + \left\{ \frac{[P_n(x)]^2 e^{-x^2}}{2^n \cdot n!} - \frac{[P_{n-1}(x)]^2 e^{-x^2}}{2^{n-1} \cdot (n-1)!} \right\} + \dots$$

Or, les polynomes $P_1(x)$ et $P_2(x)$ satisfont à la relation

$$\frac{P_2(x)}{2} - \frac{[P_1(x)]^2}{2} + 1 = 0;$$

d'autre part, les autres termes de la série du second membre se détruisent deux à deux; la somme des $n+1$ premiers termes de

cette série est donc

$$\frac{[P_n(x)]^2 e^{-x^2}}{2^n n!}.$$

Son module est au plus égal à la quantité

$$\frac{2^n K \left[\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \right]^2}{n!}$$

dans laquelle K est un nombre fixe indépendant de x , si l'on assujettit cette variable à ne prendre que les valeurs d'un intervalle fixe (a, b) d'ailleurs aussi grand qu'on veut; cette quantité tend vers 0 comme $\frac{1}{n^2}$ quand n augmente indéfiniment.

La série figurant dans le second membre (22) est donc uniformément convergente; elle représente bien la dérivée de la fonction $S(x)$; sa somme est constamment nulle; on a donc

$$S'(x) = 0$$

et la différence $S(x)$ est indépendante de x ; mais elle s'annule avec x ; on a donc finalement

$$I^{-\infty, x}(x) = I^{+\infty, x}(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

III.

Quand, dans l'intégrale définissant $I_{2q}^{a,b}(x)$ on remplace $S_{2q}(x, x)$ par sa valeur tirée de (14'), il vient

$$I_{2q}^{a,b}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2^{2q+1} \Gamma\left(\frac{2q+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2q+1}{2}\right)} \\ \times \int_a^b \frac{[P_{2q}(x) P_{2q+1}(x) - P_{2q+1}(x) P_{2q}(x)]}{x-x} e^{-x^2} dx.$$

Supposons que le point x n'appartienne pas à l'intervalle (a, b) ; quand x varie dans cet intervalle, la fonction $\frac{1}{x-x}$ varie toujours

dans le même sens et l'on peut écrire

$$(23) \quad I_{2q}^{a,b}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2^{4q+1} \Gamma\left(\frac{2q+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2q+1}{2}\right)} \\ \times \left[\frac{1}{x-a} \int_a^{\xi} [P_{2q}(x) P_{2q+1}(\alpha) - P_{2q+1}(x) P_{2q}(\alpha)] e^{-\alpha^2} d\alpha \right. \\ \left. + \frac{1}{x-b} \int_{\xi}^b [P_{2q}(x) P_{2q+1}(\alpha) - P_{2q+1}(x) P_{2q}(\alpha)] e^{-\alpha^2} d\alpha \right],$$

ξ étant un certain nombre appartenant à l'intervalle (a, b) .

Mais on a

$$(24) \quad \int_a^{\xi} [P_{2q}(x) P_{2q+1}(\alpha) - P_{2q+1}(x) P_{2q}(\alpha)] e^{-\alpha^2} d\alpha \\ = P_{2q}(x) [P_{2q}(\alpha) e^{-\alpha^2}]_a^{\xi} - P_{2q+1}(x) [P_{2q-1}(\alpha) e^{-\alpha^2}]_a^{\xi}.$$

L'inégalité (5) donne une limite supérieure du module du second membre; on a

$$|P_{2q}(x) [P_{2q}(\alpha) e^{-\alpha^2}]_a^{\xi}| < \frac{2^{4q+1}}{\pi} \left[\Gamma\left(\frac{2q+1}{2}\right) \right]^2 e^{x^2}$$

et

$$|P_{2q+1}(x) [P_{2q-1}(\alpha) e^{-\alpha^2}]_a^{\xi}| < \frac{2^{4q+1}}{\pi} \Gamma\left(\frac{2q}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2q+2}{2}\right) e^{x^2}.$$

Il en résulte que

$$(25) \quad \left| \int_a^{\xi} [P_{2q}(x) P_{2q+1}(\alpha) - P_{2q+1}(x) P_{2q}(\alpha)] e^{-\alpha^2} d\alpha \right| \\ < \frac{2^{4q+1}}{\pi} \left\{ \Gamma\left(\frac{2q+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2q}{2}\right) + \left[\Gamma\left(\frac{2q+1}{2}\right) \right]^2 \right\} e^{x^2}.$$

En raisonnant de même sur l'intégrale prise entre les limites ξ et b on voit qu'il vient finalement

$$(26) \quad |I_{2q}^{a,b}(x)| < \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\left| \frac{1}{x-a} \right| + \left| \frac{1}{x-b} \right| \right) \\ \times \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{2q+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2q}{2}\right) + \left[\Gamma\left(\frac{2q+1}{2}\right) \right]^2}{\Gamma\left(\frac{2q+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2q+1}{2}\right)} \right\} e^{x^2}.$$

Or, quand q augmente indéfiniment, le rapport $\frac{\Gamma\left(\frac{2q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2q+1}{2}\right)}$ tend asymptotiquement vers

$$\frac{\Gamma(q)}{\Gamma\left(\frac{2q+1}{2}\right)} \sim \frac{\left(\frac{2q}{2}\right)^{\frac{2q}{2}-\frac{1}{2}} e^{-q}}{\left(\frac{2q+1}{2}\right)^{\frac{2q}{2}} e^{-\frac{2q+1}{2}}}.$$

En désignant par A un nombre fini, on peut donc écrire

$$\frac{\Gamma(q)}{\Gamma\left(\frac{2q+1}{2}\right)} < \frac{A}{q^{\frac{1}{2}}}.$$

De même, le rapport $\frac{\Gamma\left(\frac{2q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2q+2}{2}\right)}$ tend asymptotiquement vers

$$\frac{\Gamma\left(\frac{2q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2q+2}{2}\right)} \sim \frac{\left(\frac{2q+1}{2}\right)^q e^{-\frac{2q+1}{2}}}{\left(\frac{2q+2}{2}\right)^{\frac{2q+1}{2}} e^{-\frac{2q+2}{2}}}$$

et, en désignant par B un nombre fini, on peut écrire

$$\frac{\Gamma\left(\frac{2q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2q+2}{2}\right)} < \frac{B}{q^{\frac{1}{2}}}.$$

On a donc finalement, en désignant par λ celui des deux nombres a, b qui donne à $\frac{1}{x-\alpha}$ sa plus grande valeur absolue,

$$(27) \quad |I_{2q}^{a,b}(x)| < \frac{K e^{x^2}}{|x-\lambda| q^2},$$

K étant un nombre fini indépendant de x, a et b .

Quand q augmente indéfiniment, la quantité $I_{2q}^{a,b}(x)$ tend donc vers zéro.

Supposons que x étant inférieur à a, b soit un nombre quel-

conque supérieur à a , choisi aussi grand qu'on veut. Dans l'inégalité (27), λ est alors égal à a , car des deux nombres $\frac{1}{x-a}$ et $\frac{1}{x-b}$ le premier est celui dont la valeur absolue est la plus grande; le second membre de (27) étant indépendant de b , on peut faire correspondre à tout nombre ε , un nombre η tel que sous la seule condition que

$$q > \eta$$

on ait

$$|I_{2q}^{a,b}(x)| < \varepsilon,$$

et cela si grand que soit b , autrement dit la quantité $I_{2q}^{a,+\infty}(x)$ tend vers 0 quand q augmente indéfiniment, si x est inférieur à a ; on démontrerait de même que la quantité $I_{2q}^{-\infty,a}(x)$ tend vers 0, si x est un nombre supérieur à a .

Or, on peut écrire, x étant inférieur à a ,

$$I_{2q}^{x,+\infty}(x) = I_{2q}^{x,a}(x) + I_{2q}^{a,+\infty}(x).$$

La limite de $I_{2q}^{a,+\infty}(x)$ est nulle, celle de $I_{2q}^{x,+\infty}(x)$ est égale à $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$; donc la quantité $I_{2q}^{x,a}(x)$ a pour limite $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ quand q augmente indéfiniment.

On démontrerait de même que la limite de $I_{2q}^{a,x}(x)$ est la même que celle de $I_{2q}^{-\infty,x}(x)$, autrement dit est égale à $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Si β est un nombre compris entre x et a , a étant supérieur à x , on peut écrire

$$I_{2q}^{x,a}(x) = I_{2q}^{x,\beta}(x) + I_{2q}^{\beta,a}(x).$$

Supposons que β tende vers x , de telle sorte que $x - \beta$ tende vers zéro comme $q^{-\mu}$, μ étant un nombre positif; l'inégalité (27) donne alors

$$|I_{2q}^{\beta,a}(x)| < \frac{K e^{x^2}}{q^{\frac{1}{2}-\mu}}.$$

Si μ est inférieur à $\frac{1}{2}$, la limite de $I_{2q}^{\beta,a}(x)$ pour q infini est nulle et la limite de $I_{2q}^{x,\beta}(x)$ est encore $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

On démontrerait de même que $I_{2q}^{\beta, x}(x)$ tend vers $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, β tendant vers x par valeurs inférieures à x , de telle sorte que la différence $x - \beta$ tende vers 0 comme $q^{-\mu}$, μ étant un nombre positif inférieur à $\frac{1}{2}$.

Nous examinerons encore le cas où la limite supérieure de l'intégrale $I_{2q}^{a, b}(x)$ est un nombre b tendant vers x par valeurs supérieures à x , quand q augmente indéfiniment, de telle sorte que la différence $b - x$ tende vers 0 comme $q^{-\mu}$, μ étant un nombre positif inférieur à $\frac{1}{2}$ tandis que la limite inférieure a est un nombre quelconque assujéti à rester compris entre x et b , mais pouvant d'ailleurs varier avec q . Dans ces conditions, l'intégrale $I_{2q}^{a, b}(x)$ reste finie quand q augmente indéfiniment.

En effet, à l'intervalle (x, b) appartient le point β dont la distance au point x est égale à $q^{-\frac{1}{2}}$; il est clair que si le point a est situé entre le point β et le point b ou coïncide avec le point β , on a, en vertu de l'inégalité (27),

$$|I_{2q}^{(a, b)}(x)| < \frac{K e^{x^2}}{q^{-\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}}} = K e^{x^2}.$$

Supposons donc que le point a soit situé entre le point x et le point β , et considérons $I_{2q}^{a, \beta}(x)$; en posant

$$a = x + \lambda,$$

il vient

$$(28) \quad I_{2q}^{a, \beta}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2^{2q+1} \Gamma\left(\frac{2q+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2q+1}{2}\right)} \times \int_{a-x}^{\beta-x} \frac{P_{2q+1}(x) P_{2q}(x+\lambda) - P_{2q}(x) P_{2q+1}(x+\lambda) e^{-(x+\lambda)^2} d\lambda}{\lambda}.$$

Or,

$$\begin{aligned} P_{2q+1}(x+\lambda) &= P_{2q+1}(x) + \lambda P'_{2q+1}(x + \theta\lambda) \\ &= P_{2q+1}(x) - 2(2q+1)\lambda P_{2q}(x + \theta\lambda), \end{aligned}$$

$$P_{2q}(x+\lambda) = P_{2q}(x) + \lambda P'_{2q}(x + \theta'\lambda) = P_{2q}(x) - 4q\lambda P_{2q-1}(x + \theta'\lambda),$$

et l'on a finalement

$$(29) \quad I_{2q}^{a,\beta}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2^{4q+1} \Gamma\left(\frac{2q+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2q+1}{2}\right)} \\ \times \int_{a+x}^{\beta-x} [2(2q+1) P_{2q}(x) P_{2q}(x+\theta\lambda) \\ - 4q P_{2q+1}(x) P_{2q-1}(x+\theta'\lambda)] e^{-(x+\lambda)^2} d\lambda.$$

Mais λ variant dans l'intervalle d'intégration, on a

$$(30) \quad \left| \frac{2(2q+1) P_{2q}(x) P_{2q}(x+\theta\lambda)}{2^{4q+1} \Gamma\left(\frac{2q+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2q+1}{2}\right)} \right| < A \frac{(2q+1) \Gamma\left(\frac{2q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2q+2}{2}\right)}$$

et

$$(31) \quad \left| \frac{4q P_{2q+1}(x) P_{2q-1}(x+\theta'\lambda)}{2^{4q+1} \Gamma\left(\frac{2q+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2q+1}{2}\right)} \right| < B \frac{2q \Gamma(q)}{\Gamma\left(\frac{2q+1}{2}\right)},$$

A et B étant deux nombres finis.

Des inégalités (30) et (31), dont les seconds membres augmentent avec q comme $q^{\frac{1}{2}}$, on conclut que la quantité sous le signe $\int$ est inférieure à $K q^{\frac{1}{2}}$, pour des valeurs suffisamment grandes de q , K étant un nombre fini convenablement choisi; mais comme, d'autre part, l'intervalle auquel est étendu l'intégration tend vers 0 comme $q^{-\frac{1}{2}}$, l'intégrale $I_{2q}^{a,\beta}(x)$ reste finie.

IV.

Soit $f(x)$ une fonction de la variable x , finie et continue dans l'intervalle (a, b) , et considérons la série

$$(32) \quad \int_a^b f(x) e^{-x^2} dx + \frac{P_1(x)}{2 \cdot 1!} \int_a^b f(x) P_1(x) e^{-x^2} dx \\ + \frac{P_2(x)}{2^2 \cdot 2!} \int_a^b f(x) P_2(x) e^{-x^2} dx + \dots \\ + \frac{P_n(x)}{2^n \cdot n!} \int_a^b f(x) P_n(x) e^{-x^2} dx + \dots$$

En désignant par $\varphi_{2q}^{a,b}(x)$ la somme des $2q$ premiers termes de cette série, on a

$$\varphi_{2q}^{a,b}(x) = \int_a^b f(x) S_{2q}(x, x) e^{-x^2} dx.$$

Supposons que dans l'intervalle (a, b) la fonction $f(x)$ ne soit jamais croissante, ou jamais décroissante; on peut écrire

$$\varphi_{2q}^{a,b}(x) = f(a) \int_a^{\xi} S_{2q}(x, x) e^{-x^2} dx + f(b) \int_{\xi}^b S_{2q}(x, x) e^{-x^2} dx$$

ou

$$(33) \quad \varphi_{2q}^{a,b}(x) = f(a) I_{2q}^{a,\xi}(x) + f(b) I_{2q}^{\xi,b}(x),$$

ξ désignant un certain nombre de l'intervalle (a, b) .

Si x est à l'extérieur de l'intervalle (a, b) les quantités $I_{2q}^{a,\xi}(x)$ et $I_{2q}^{\xi,b}(x)$ tendent vers 0 quand q augmente indéfiniment; il en est donc de même de la somme $\varphi_{2q}^{a,b}(x)$.

Supposons que la fonction $f(x)$, finie et continue dans l'intervalle (x, b) , n'y soit jamais croissante ou jamais décroissante, et choisissons un nombre a situé entre x et b ; on peut alors écrire

$$\begin{aligned} \varphi_{2q}^{x,b}(x) &= f(a) I_{2q}^{a,\xi}(x) + f(b) I_{2q}^{\xi,b}(x), \\ \varphi_{2q}^{x,a}(x) &= f(x) I_{2q}^{x,a}(x) + [f(a) - f(x)] I_{2q}^{\eta,a}(x), \end{aligned}$$

ξ étant un certain nombre compris entre a et b , et η un certain nombre compris entre x et a . En ajoutant ces deux égalités membre à membre, il vient

$$(34) \quad \begin{aligned} \varphi_{2q}^{a,b}(x) &= f(x) I_{2q}^{x,a}(x) + [f(a) - f(x)] I_{2q}^{\eta,a}(x) \\ &\quad + f(a) I_{2q}^{a,\xi}(x) + f(b) I_{2q}^{\xi,b}(x). \end{aligned}$$

Faisons tendre le point a vers le point x , de telle sorte que la différence $a - x$ tende vers 0 comme $q^{-\mu}$, quand q augmente indéfiniment, μ étant un nombre positif inférieur à $\frac{1}{2}$; dans ces

conditions $I_{2q}^{x,a}(x)$ tend vers $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $I_{2q}^{a,\xi}(x)$ et $I_{2q}^{\xi,b}(x)$ tendent vers 0, $I_{2q}^{\eta,a}(x)$ reste fini et $f(a) - f(x)$ tend vers 0; la limite de la somme $\varphi_{2q}^{a,b}(x)$ est donc égale à $\frac{\sqrt{\pi}}{2} f(x)$.

On démontrerait de même que la limite de la somme $\varphi_{2q}^{a,r}(x)$, a étant un nombre inférieur à x , est égale à $\frac{\sqrt{\pi}}{2}f(x)$.

La démonstration précédente serait encore applicable si la fonction $f(x)$ présentait au point x une discontinuité, pourvu que $f(x)$ tende vers une limite bien déterminée $f(x + \varepsilon)$ quand x tend vers x par valeurs supérieures à x ; la limite de la somme $\varphi_{2q}^{x,b}(x)$ serait alors $\frac{\sqrt{\pi}}{2}f(x + \varepsilon)$. De même si $f(x)$ tend vers une limite $f(x - \varepsilon)$ quand x tend vers x par valeurs inférieures à x la limite de la somme $\varphi_{2q}^{a,r}(x)$ est $\frac{\sqrt{\pi}}{2}f(x - \varepsilon)$.

En résumé, si la fonction $f(x)$ finie dans l'intervalle (a, b) y est en général continue, n'admet qu'un nombre fini de discontinuités du genre de celles qui viennent d'être définies et n'est jamais croissante ou jamais décroissante, la somme de la série (32) est égale à

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}[f(x + \varepsilon) + f(x - \varepsilon)] \text{ si } x \text{ est compris entre } a \text{ et } b, \text{ soit}$$

$$\sqrt{\pi}f(x) \text{ si la fonction est continue au point } x;$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}f(a) \text{ si } x \text{ est égal à } a;$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}f(b) \text{ si } x \text{ est égal à } b;$$

$$0 \text{ si } x \text{ est extérieur à l'intervalle } a, b.$$

Ces résultats s'étendent manifestement au cas d'une fonction en général continue dans l'intervalle (a, b) , qui n'y admet qu'un nombre fini de discontinuités de l'espèce indiquée et qui présente un nombre fini de maxima et de minima; car, on peut alors diviser l'intervalle (a, b) en un nombre fini d'intervalles partiels dans chacun desquels s'appliquent les démonstrations.

Dans un cas étendu, on peut même s'affranchir de la condition que la fonction $f(x)$ reste finie, comme nous allons le montrer.

Considérons une fonction $f(x)$ devenant infinie pour $x = x_0$; on suppose que de $x_0 - \varepsilon$ à x_0 et de x_0 à $x_0 + \varepsilon$ la fonction conserve un signe constant; de plus

$$\int^x f(x) dx$$

tend vers une limite quand x tend vers x_0 en lui étant inférieur ou supérieur. On a toujours

$$\left| \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) [U_{2q}(\alpha) U_{2q+1}(x) - U_{2q}(x) U_{2q+1}(\alpha)] e^{-\alpha^2} \right| < \frac{2e^{x^2}}{\sqrt{\pi}}.$$

Supposons, pour fixer les idées, que quand α varie dans l'intervalle $x_0 - \varepsilon, x_0$, la différence $x - \alpha$ soit positive; on a alors

$$\frac{-2e^{x^2}}{\sqrt{\pi}(x-\alpha)} < S_{2q}(x, \alpha) e^{-\alpha^2} < \frac{2e^{x^2}}{\sqrt{\pi}(x-\alpha)},$$

ou, en désignant par m une limite supérieure de $\frac{1}{x-\alpha}$ quand α varie dans l'intervalle $x_0 - \varepsilon, x_0$,

$$\frac{-2e^{x^2}m}{\sqrt{\pi}} < S_{2q}(x, \alpha) e^{-\alpha^2} < \frac{2e^{x^2}m}{\sqrt{\pi}}.$$

Si, dans ce même intervalle, la fonction $f(x)$ est positive, on a donc

$$-\frac{2e^{x^2}m}{\sqrt{\pi}} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0} f(x) dx < \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0} S_{2q}(x, \alpha) f(x) e^{-\alpha^2} dx < \frac{2e^{x^2}m}{\sqrt{\pi}} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0} f(x) dx.$$

Mais, d'après les hypothèses faites, on peut choisir ε assez petit pour que $\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0} f(x) dx$ soit inférieur à toute quantité donnée à l'avance; il en résulte qu'on peut choisir ε assez petit pour que l'intégrale

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0} S_{2q}(x, \alpha) f(x) e^{-\alpha^2} dx$$

soit en module inférieure à toute quantité donnée à l'avance, si grand d'ailleurs que soit le nombre q .

La même remarque s'applique évidemment à l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_0+\varepsilon} S_{2q}(x, \alpha) f(x) e^{-\alpha^2} dx.$$

Ainsi, si l'on écrit

$$\varphi_{2q}^{a,b}(x) = \varphi_{2q}^{a, x_0-\varepsilon}(x) + \varphi_{2q}^{x_0-\varepsilon, x_0}(x) + \varphi_{2q}^{x_0, x_0+\varepsilon}(x) + \varphi_{2q}^{x_0+\varepsilon, b}(x),$$

la seconde et la troisième intégrale tendent vers 0 quand ε tend

vers 0, q augmentant indéfiniment; les résultats énoncés précédemment pour la limite de $\varphi_{2q}^{a,b}(x)$ sont donc encore exacts.

Nous considérerons encore le cas où l'une des limites de l'intervalle (a, b) devient infinie; supposons par exemple que ce soit la limite supérieure b ; on peut alors écrire, en désignant par x_0 un nombre positif très grand,

$$\left| \int_{x_0}^{+\infty} S_{2q}(x, x) f(x) e^{-x^2} dx \right| < \frac{2e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{x_0}^{+\infty} \left| \frac{f(x)}{x-x} \right| dx.$$

Si l'intégrale du second membre converge, autrement dit, si elle tend vers 0 quand x_0 augmente indéfiniment, on pourra toujours choisir ce dernier nombre assez grand pour que l'intégrale du premier membre soit inférieure à toute quantité donnée à l'avance, si grand que soit q ; ainsi, sous la seule condition que

$$\int_a^{+\infty} \left| \frac{f(x)}{x} \right| dx$$

ait un sens, les résultats énoncés s'appliquent encore à la limite de la somme $\varphi_{2q}^{a,+\infty}(x)$; de même sous la seule condition que

$$\int_{-\infty}^b \left| \frac{f(x)}{x} \right| dx$$

ait un sens; ils s'appliquent à la limite de la somme $\varphi_{2q}^{-\infty,b}(x)$.

Il en est encore de même si, quand x augmente indéfiniment, la fonction $f(x)$ n'est jamais croissante ou jamais décroissante et si le rapport $\frac{f(x)}{x}$ reste fini.

Soit, en effet, un nombre a supérieur à x , à partir duquel la fonction $f(x)$ n'est jamais croissante ou jamais décroissante; quand x croît depuis a jusqu'à $+\infty$, le rapport $\frac{f(x)}{x-x}$ n'est alors jamais croissant ou jamais décroissant et l'on peut écrire

$$\begin{aligned} \varphi_{2q}^{a,b}(x) = & \frac{f(a)}{x-a} \int_a^x \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) [P_{2q}(x) P_{2q+1}(x) - P_{2q+1}(x) P_{2q}(x)] e^{-x^2} dx}{2^{2q+1} \Gamma\left(\frac{2q+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2q+1}{2}\right)} \\ & + \frac{f(b)}{x-b} \int_x^b \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) [P_{2q}(x) P_{2q+1}(x) - P_{2q+1}(x) P_{2q}(x)] e^{-x^2} dx}{2^{2q+1} \Gamma\left(\frac{2q+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2q+1}{2}\right)}, \end{aligned}$$

b étant un nombre quelconque supérieur à a et ξ un nombre compris entre a et b ; le module de chacune des intégrales du second membre est inférieur à une quantité de la forme $\frac{\Lambda}{q^{\frac{1}{2}}}$, où Λ est un nombre fini indépendant de a , b et q .

Comme les rapports $\frac{f(a)}{x-a}$ et $\frac{f(b)}{x-b}$ sont finis, on a donc finalement

$$|\varphi_{2q}^{a,b}(x)| < \frac{K}{q^{\frac{1}{2}}}$$

et cela si grand que soit b ; la quantité $\varphi_{2q}^{a,+\infty}(x)$ tend donc vers 0 quand q augmente indéfiniment, et dans la série (32) on peut rejeter à l'infini la limite supérieure des intégrales. On démontrerait évidemment un résultat analogue dans le cas où la limite inférieure a de ces intégrales serait $-\infty$.

V.

Quand la fonction $f(x)$, finie dans l'intervalle (a, b) , y admet des points de discontinuité de l'espèce définie précédemment, la série (32) ne peut être uniformément convergente dans cet intervalle. Il en est autrement si, dans l'intervalle (a, b) , la fonction $f(x)$ est continue.

Désignons, en effet, par $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ les maxima et minima en nombre fini présentés par la fonction $f(x)$ dans l'intervalle (a, b) et par ε un nombre fixe, choisi aussi petit qu'on veut; nous allons démontrer que la différence

$$\sqrt{x} f(x) - \varphi_{2q}^{a,b}(x)$$

tend uniformément vers 0 quand q augmente indéfiniment, a appartenant à l'intervalle $(\alpha_p + \varepsilon, \alpha_{p+1} - \varepsilon)$.

On peut écrire

$$(35) \quad \begin{aligned} \varphi_{2q}^{a,b}(x) = & \varphi_{2q}^{a,\alpha_1}(x) + \varphi_{2q}^{\alpha_1,\alpha_2}(x) + \dots \\ & + \varphi_{2q}^{\alpha_{p-1},\alpha_p}(x) + \varphi_{2q}^{\alpha_p,\alpha_{p+1}}(x) + \dots + \varphi_{2q}^{\alpha_r,b}(x). \end{aligned}$$

D'autre part, l'égalité analogue à (33) relative à un intervalle tel que (α_m, α_{m+1}) s'écrit en désignant par ξ un nombre compris

entre a_m et a_{m+1}

$$\varphi_{2q}^{a_m, a_{m+1}}(x) = f(a_m) I_{2q}^{a_m, \xi}(x) + f(a_{m+1}) I_{2q}^{\xi, a_{m+1}}.$$

Les modules de $I_{2q}^{a_m, \xi}$ et $I_{2q}^{\xi, a_{m+1}}$ sont au plus égaux à

$$\frac{K e^{x^2}}{|x - \lambda| q^{\frac{1}{2}}},$$

λ étant la valeur de x qui rend maximum le module de $\frac{1}{|x - \alpha|}$ et K étant un nombre fini indépendant de x et q ; on a donc

$$(36) \quad |\varphi_{2q}^{a_m, a_{m+1}}(x)| < \frac{K' e^{b^2}}{\varepsilon q^{\frac{1}{2}}},$$

K étant un nombre indépendant de a_m, a_{m+1}, x et q .

D'autre part, l'égalité analogue à (34) s'écrit

$$\begin{aligned} \varphi_{2q}^{x, a_{p+1}}(x) &= f(x) I_{2q}^{x, \beta}(x) + [f(\beta) - f(x)] I_{2q}^{\eta, \beta}(x) \\ &\quad + f(\beta) I_{2q}^{\beta, \xi}(x) + f(a_{p+1}) I_{2q}^{\xi, a_{p+1}}, \end{aligned}$$

β étant un nombre compris entre x et a_{p+1} , η un nombre compris entre x et β , et ξ un nombre compris entre β et a_{p+1} ; de même on a

$$\begin{aligned} \varphi_{2q}^{a_p, x}(x) &= f(x) I_{2q}^{\beta', x}(x) + [f(\beta') - f(x)] I_{2q}^{\beta', \eta'}(x) \\ &\quad + f(\beta') I_{2q}^{\xi', \beta'}(x) + f(a_p) I_{2q}^{a_p, \xi'}(x); \end{aligned}$$

en ajoutant membre à membre et en retranchant $\sqrt{\pi} f(x)$, il vient

$$\begin{aligned} &\varphi_{2q}^{a_p, x}(x) + \varphi_{2q}^{x, a_{p+1}}(x) - \sqrt{\pi} f(x) \\ &= f(x) \left[I_{2q}^{\beta', x}(x) - \frac{\sqrt{\pi}}{2} + I_{2q}^{x, \beta}(x) - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right] \\ &\quad + [f(\beta) - f(x)] I_{2q}^{\eta, \beta} + [f(\beta') - f(x)] I_{2q}^{\beta', \eta'} + f(\beta) I_{2q}^{\beta, \xi}(x) \\ &\quad + f(a_{p+1}) I_{2q}^{\xi, a_{p+1}} + f(\beta') I_{2q}^{\xi', \beta'} + f(a_p) I_{2q}^{a_p, \xi'}. \end{aligned}$$

Supposons que les distances des points β et β' au point x tende vers 0 comme $q^{-\mu}$, μ étant un nombre positif inférieur à $\frac{1}{2}$.

En se reportant aux démonstrations du Chapitre II, on constate que le module des quantités $I_{2q}^{\beta, \xi}(x)$, $I_{2q}^{\xi, a_{p+1}}(x)$, $I_{2q}^{\xi', \beta'}(x)$, $I_{2q}^{a_p, \xi'}(x)$

est inférieur à

$$\frac{A e^{b^2}}{q^{\frac{1}{2}-\mu}}$$

où A est un nombre fini indépendant de x .

Les quantités $I_{2q}^{x,\beta}(x)$ et $I_{2q}^{\beta',x}(x)$ tendent uniformément vers $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$; enfin, comme la fonction $f(x)$ est continue, les différences $f(\beta) - f(x)$ et $f(\beta') - f(x)$ tendent uniformément vers 0.

On peut donc trouver un nombre n tel que sous la seule condition que q soit supérieur à n , la différence

$$|\sqrt{\pi}f(x) - \varphi_{2q}^{a,b}(x)|$$

soit inférieure à un nombre η choisi aussi petit qu'on veut, quel que soit x appartenant à l'intervalle $a_p + \varepsilon, a_{p+1} - \varepsilon$.

La série (32) converge donc uniformément quand x est compris dans l'un des intervalles

$$(a + \varepsilon, a_1 - \varepsilon), (a_1 + \varepsilon, a_2 - \varepsilon), \dots, (a_r + \varepsilon, b - \varepsilon).$$

Il est aisé de montrer qu'il en est encore de même quand x est voisin de l'un des maxima ou minima $a_1, a_2, \dots, a_r$. Soit par exemple $x = a_p$ correspondant à un maximum $y_p = f(a_p)$ de la fonction $f(x)$ positive dans le voisinage de a_p ; $f(x)$ croît de $a_p - \varepsilon$ à a_p et décroît de a_p à $a_p + \varepsilon$. Je considère la fonction continue $Q(x)$ ainsi définie dans l'intervalle $(a_p - \varepsilon, a_p + \varepsilon)$,

$$Q(x) = f(x) \quad \text{de} \quad a_p - \varepsilon \quad \text{à} \quad a_p,$$

$$Q(x) = y_p + \mu[y_p - f(x)] \quad \text{de} \quad a_p \quad \text{à} \quad a_p + \varepsilon \quad (\mu > 1).$$

Cette fonction est croissante dans l'intervalle $(a_p - \varepsilon, a_p + \varepsilon)$.

Considérons maintenant la fonction

$$P(x) = Q(x) + f(x),$$

on a

$$P(x) = 2f(x) \quad \text{de} \quad a_p - \varepsilon \quad \text{à} \quad a_p,$$

$$P(x) = y_p(1 + \mu) - (\mu - 1)f(x) \quad \text{de} \quad a_p \quad \text{à} \quad a_p + \varepsilon.$$

$P(x)$ sera aussi croissant dans l'intervalle $(a_p - \varepsilon, a_p + \varepsilon)$. Par suite $f(x)$ est la différence de deux fonctions variant dans le même sens de part et d'autre de a_p . Si l'on développe $P(x)$ et $Q(x)$

en séries, il n'y aura aucune difficulté relativement à la valeur α_p . La série (32) représentant $f'(x)$ est donc uniformément convergente dans l'intervalle $(a + \varepsilon, b - \varepsilon)$.

L'uniformité de la convergence ne s'étend pas à l'intervalle (a, b) tout entier; il convient d'en exclure les extrémités a et b ; il est d'ailleurs évident que ces points, où la somme de la série est respectivement égale à $\frac{\sqrt{\pi}}{2} f(a)$ et $\frac{\sqrt{\pi}}{2} f(b)$ sont des points de discontinuités de la fonction représentée par la somme de la série.

Le terme général de la série (32) est

$$u_n = \frac{P_n(x)}{2^n \cdot n!} \int_a^b f(x) P_n(x) e^{-x^2} dx.$$

Supposons que dans l'intervalle (a, b) la fonction $f(x)$ ne soit jamais croissante ou jamais décroissante; on a

$$u_n = \frac{P_n(x)}{2^n n!} \{ f(a) [P_{n-1}(x) e^{-x^2}]_a^\xi - f(b) [P_{n-1}(x) e^{-x^2}]_\xi^b \}.$$

Si l'on désigne par M un nombre supérieur aux modules de $f(a)$ et de $f(b)$, on a donc

$$|u_n| < \frac{2^{2n+1} M}{2^n n!} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi} e^{x^2},$$

d'où

$$|u_n| < \frac{A}{n},$$

A étant un nombre fini indépendant de n .

Le terme général de la série (32) tend vers 0 comme $\frac{1}{n}$ quand les intégrations sont étendues à un intervalle dans lequel la fonction $f(x)$ reste finie.

Dans les démonstrations relatives à la convergence de la série (32), nous avons toujours envisagé des sommes $\varphi_{2q}^{a,b}(x)$ ayant un indice pair; elles s'appliquent donc, en réalité, non à la série (32), mais à la série qu'on en déduit en groupant les termes consécutifs deux à deux; comme u_n tend uniformément vers 0, il est clair que si cette dernière série est convergente ou uniformément convergente et a pour somme S , il en est de même

de la série (32); les différents résultats énoncés s'appliquent donc bien à la série (32) elle-même.

SUR LA CONVERGENCE ABSOLUE DES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES;

PAR M. P. FATOU.

J'ai indiqué dans ma Thèse (*Acta mathematica*, t. XXX, p. 398 et suiv.) l'intérêt qu'il y a à distinguer, parmi les points de convergence des séries trigonométriques, les points de convergence absolue et j'ai montré qu'une telle série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ ne peut être absolument convergente en tous les points d'un intervalle si petit qu'il soit que si la série $\sum \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ est elle-même convergente. Plus récemment, MM. Lusin (*C. R.*, t. 153, p. 580) et M. Denjoy (*C. R.*, t. 153, p. 135) sont revenus sur ce sujet et ont démontré que si la série $\sum \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ est divergente, l'ensemble des points de convergence absolue de la série trigonométrique est de mesure nulle. M. Denjoy fait reposer sa démonstration sur le théorème de M. Baire relatif aux fonctions de première classe, comme je l'avais fait moi-même dans le cas particulier que j'avais traité, et M. Lusin s'appuie pour arriver au même résultat sur un intéressant théorème de M. Egoroff. J'ai remarqué qu'on pouvait démontrer simplement la proposition en question sans recourir à des théorèmes aussi cachés de la théorie des fonctions et en ne s'appuyant que sur les principes essentiels de la théorie de la mesure. C'est ce que nous allons d'abord exposer ici.

Soient $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ des fonctions continues bornées d'une variable x , ne prenant que des valeurs positives ou nulles. Pour que la série $f_1(x) + f_2(x) + \dots$ soit convergente en un point x_0 , il faut et il suffit qu'il existe un nombre fini

positif A tel que l'inégalité

$$S_n(x_0) \leq A$$

soit vérifiée pour toutes les valeurs de n , $S_n(x)$ désignant la somme $f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$. L'ensemble des points x_0 pour lesquels ceci a lieu, est un ensemble fermé F , comme il résulte immédiatement de la continuité de $S_n(x)$.

Considérons maintenant une suite de nombres positifs $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots$ indéfiniment croissants. A chacun des A_i correspond, comme il vient d'être dit, un ensemble fermé F_i , et l'ensemble E des points de convergence de la série est l'ensemble des points qui figurent dans l'un au moins des F_i . Chacun des F_i est évidemment contenu dans ceux de rang plus élevé, et par suite dans E . On peut encore dire, en appelant $F_{i+1} - F_i$ l'ensemble des points de F_{i+1} qui n'appartiennent pas à F_i , que E est la somme des ensembles $F_1, F_2 - F_1, F_3 - F_2, \dots$, qui sont sans points communs deux à deux et, en appelant m la mesure de E , m_i la mesure de F_i , on aura, d'après les propriétés de la mesure,

$$m = m_1 + (m_2 - m_1) + (m_3 - m_2) + \dots + (m_i - m_{i-1}) + \dots,$$

c'est-à-dire

$$m = \lim_{i=\infty} m_i.$$

Si donc $m > 0$, on pourra prendre i assez grand pour que m_i soit positif et non nul. L'ensemble E contiendra donc un ensemble fermé de mesure non nulle, sur lequel les fonctions S_n sont bornées dans leur ensemble : on peut, si l'on veut, remplacer cet ensemble fermé par un ensemble parfait P de même mesure $p > 0$. L'intégrale de $S_n(x)$ étendue à l'ensemble P reste bornée quel que soit n , c'est-à-dire que la série (à termes positifs)

$$\int_P f_1 dx + \int_P f_2 dx + \dots + \int_P f_n dx + \dots$$

est convergente.

Appliquons ce résultat aux fonctions

$$f_n = \rho_n |\cos(nx + \omega_n)|,$$

le signe $||$ désignant la valeur absolue, et, conservant les hypothèses et notations précédentes, évaluons $\int_P f_n dx$.

Les points x sont supposés ici portés sur la circonférence de rayon 1. Soient $i_1, i_2, \dots, i_k, \dots$, les intervalles contigus à P. On a

$$\int_P = \int_0^{2\pi} - \int_{i_1} - \int_{i_2} - \dots - \int_{i_k} - \int_{i_{k+1}} - \dots$$

$$\text{mesure de P} = \mu = 2\pi - s_1 - s_2 - \dots - s_k - s_{k+1} - \dots$$

en appelant s_k la longueur de i_k .

On peut prendre k assez grand pour que la somme

$$\eta = s_{k+1} + s_{k+2} + \dots$$

soit aussi petite qu'on le veut; la somme

$$\int_{i_{k+1}} f_n dx + \int_{i_{k+2}} f_n dx + \dots$$

est inférieure à $\eta \cdot \rho_n$, puisque la fonction à intégrer est au plus égale à ρ_n .

Évaluons maintenant les intégrales $\int_{i_1}, \int_{i_2}, \dots$, soit

$$\int_a^b \rho_n |\cos(nx + \omega_n)| dx.$$

On peut diviser l'intervalle d'intégration en intervalles partiels où le cosinus garde un signe constant; l'intégrale indéfinie de $\cos(nx + \omega_n)$ étant $\frac{1}{n} \sin(nx + \omega_n) + \text{const.}$, chaque intégrale partielle a pour valeur $\frac{2}{n} \rho_n$ et est étendue à un intervalle de longueur $\frac{\pi}{n}$, sauf la première et la dernière, qui sont étendues à des intervalles $\varepsilon, \varepsilon'$ plus petits que $\frac{\pi}{n}$. On a donc

$$\int_a^b \rho_n |\cos(nx + \omega_n)| dx = \rho_n \left(\theta \varepsilon + N \frac{2}{n} + \theta' \varepsilon' \right),$$

où

$$0 \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{n}, \quad 0 \leq \varepsilon' \leq \frac{\pi}{n}, \quad 0 \leq \theta \leq 1, \quad 0 \leq \theta' \leq 1.$$

N est un entier qui vérifie l'égalité

$$\varepsilon + N \frac{\pi}{n} + \varepsilon' = b - a = s,$$

d'où

$$N = \frac{n}{\pi} (s - \varepsilon - \varepsilon').$$

On déduit de là

$$\int_a^b \rho_n |\cos(nx + \omega_n)| dx = \rho_n \left(\frac{2}{\pi} s + \frac{\Lambda}{n} \right)$$

(Λ compris entre -2 et $+2$).

Posons

$$\int_a^b \rho_n |\cos(nx + \omega_n)| dx = J_n.$$

On aura, par ce qui précède,

$$\frac{J_n}{\rho_n} = \frac{2}{\pi} (2\pi - s_1 - s_2 - \dots - s_k) + \frac{2\lambda}{n} + \lambda' \eta,$$

λ, λ' étant compris entre -1 et $+1$, ou

$$\frac{J_n}{\rho_n} = \frac{2}{\pi} (\mu + \eta) + \frac{2\lambda k}{n} + \lambda' \eta.$$

Les limites d'indétermination de $\frac{J_n}{\rho_n}$ pour n infini sont donc égales à $\frac{2}{\pi} \mu$, à des quantités près de l'ordre de η , et comme η est aussi petit qu'on le veut, on a

$$\lim_{n=\infty} \frac{J_n}{\rho_n} = \frac{2}{\pi} \mu \quad (\mu > 0).$$

La série ΣJ_n étant convergente, il faut que la série $\Sigma \rho_n$ le soit également.

Donc, si la série $\Sigma \rho_n$ n'est pas convergente, l'ensemble E est nécessairement de mesure nulle. c. q. f. d.

Revenons maintenant sur le rôle des points de convergence absolue. Posons

$$A_n = a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

$$B_n = a_n \sin nx - b_n \cos nx,$$

et soit x_0 un point de convergence absolue de la série ΣA_n . On a

$$A_n(x_0 + h) + A_n(x_0 - h) = 2 A_n(x_0) \cos nh,$$

$$B_n(x_0 + h) - B_n(x_0 - h) = 2 A_n(x_0) \sin nh.$$

Les séries ayant pour termes généraux les seconds nombres de ces égalités sont absolument et uniformément convergentes pour toutes les valeurs de h et représentent des fonctions continues de h . Si donc, pour une valeur de h , la série $\Sigma A_n(x_0 + h)$ est convergente, absolument convergente, divergente, sommable par le procédé de la moyenne arithmétique, la série $\Sigma A_n(x_0 - h)$ jouira de la même propriété; même remarque pour les séries $\Sigma B_n(x_0 + h)$, $\Sigma B_n(x_0 - h)$.

On voit que les points de convergence absolue, de convergence ordinaire, de divergence, de sommabilité, les arcs de convergence uniforme d'une série trigonométrique donnée ou de la série associée, sont deux à deux symétriques par rapport aux points de convergence absolue de la série donnée.

En particulier, l'ensemble des points de convergence absolue sur la circonférence est symétrique de lui-même par rapport à chacun de ses points. Si ces points sont en nombre fini, ils sont donc nécessairement placés aux sommets d'un polygone régulier inscrit dans la circonférence; s'ils sont en nombre infini, ils sont nécessairement répartis d'une manière dense sur celle-ci; c'est ce qui arrivera en particulier s'il y a deux points de convergence absolue dont la différence des arguments est incommensurable à 2π .

M. Lusin a remarqué que, dans cette hypothèse de l'existence d'une infinité de points de convergence absolue, l'ensemble des points de convergence ne peut avoir pour mesure que 0 ou 2π . On peut établir ce résultat à l'aide de la remarque suivante qui n'est pas indispensable pour ce but, mais qui paraît susceptible d'applications variées.

Considérons un ensemble linéaire de points de mesure non nulle, et soit $\varphi(x)$ la fonction égale à 1 aux points de cet ensemble E et nulle pour les points de l'ensemble complémentaire.

L'intégrale $\int_a^x \varphi(x) dx$ représente la mesure de l'ensemble des points de E contenus dans le segment (a, x) ; d'après un important théorème de M. Lebesgue, cette intégrale, considérée comme fonction de sa limite supérieure a , sauf pour les points d'un ensemble de mesure nulle, une dérivée égale à $\varphi(x)$. Comme E est de mesure non nulle, il existe donc une infinité de points de E pour

lesquels cette propriété a lieu. Soit x_0 un tel point. La propriété énoncée peut alors s'exprimer comme il suit : appelons *densité d'un ensemble E dans un intervalle* le quotient de la mesure de l'ensemble des points de E contenus dans l'intervalle par la longueur de cet intervalle. On peut déterminer un nombre positif η tel que, dans tout segment de longueur inférieure à η renfermant le point x_0 , la densité de l'ensemble E soit supérieure à $1 - \varepsilon$, ε étant aussi petit qu'on veut.

De même, si le complémentaire de E est de mesure non nulle, il existe une infinité de points x_0 jouissant de la propriété suivante : on peut trouver un nombre positif η tel que, dans tout segment de longueur inférieure à η renfermant x_0 , la densité de E soit inférieure à ε , ε étant aussi petit qu'on veut.

On voit par là qu'un ensemble mesurable qui est de mesure non nulle, ainsi que son complémentaire, est essentiellement *hétérogène*.

Appliquons ceci à la question qui nous occupe. Soit une série trigonométrique ayant une infinité de points de convergence absolue et E l'ensemble de ses points de convergence, de mesure non nulle. On peut donc trouver des segments de longueur finie de la circonférence dans lesquels la densité de E est supérieure à $1 - \varepsilon$, et comme E admet une infinité partout dense de points de symétrie, on pourra recouvrir entièrement la circonférence par des intervalles dans lesquels la densité de E sera supérieure à $1 - \varepsilon$; donc la mesure de E sera au moins $2\pi(1 - \varepsilon)$, c'est-à-dire 2π , puisque ε est aussi petit qu'on veut. Donc, la mesure de E est 0 ou 2π et la même propriété s'applique à l'ensemble des points de convergence de la série associée.

On voit donc que les séries trigonométriques possédant une infinité de points de convergence absolue présentent des particularités remarquables qui permettent de simplifier l'étude de leur convergence. Mais il y a lieu de remarquer que c'est là un fait plutôt exceptionnel, qui ne se présente pas dans les séries trigonométriques qu'on rencontre dans les applications ; c'est ainsi que la série

$$\sum a_n \cos nx$$

dans laquelle les a_n décroissent en valeur absolue n'est absolument

convergente pour aucune valeur de x , si la série Σa_n n'est pas absolument convergente.

Moyennant les mêmes hypothèses, la série

$$\Sigma a_n \sin nx$$

n'est absolument convergente que pour $x = 0$ ou $x = \pi$.

Nous nous contentons d'énoncer ces faits dont la démonstration est facile.

En revanche, on forme aisément des séries ayant une infinité même non dénombrable de points de convergence absolue, sans être absolument convergentes en tout point et qui, de plus, sont des séries de Fourier correspondant à des fonctions absolument intégrables. Pour toutes les séries trigonométriques

$$\Sigma a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

de cette sorte que j'ai pu former, la série de Taylor correspondante $\Sigma (a_n - ib_n) z^n$ admet son cercle de convergence comme coupure, et c'est probablement là un fait général, mais dont la démonstration m'échappe encore.

LES GROUPES PROJECTIFS QUI NE LAISSENT INVARIANTE AUCUNE MULTIPLICITÉ PLANE;

PAR M. E. CARTAN.

J'indique dans ce Mémoire une génération de tous les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane. Ces groupes sont tous simples ou semi-simples et leur étude revient à celle des groupes linéaires et homogènes qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane.

La génération obtenue repose sur la notion de groupes linéaires *fondamentaux*. Étant donnée une structure simple de rang l et d'ordre r , il existe l groupes linéaires particuliers $g_1, g_2, \dots, g_l$

admettant cette structure, ne laissant invariante aucune multiplicité plane et jouissant de la propriété remarquable suivante : *Tout groupe linéaire G de la même structure ne laissant invariante aucune multiplicité plane peut se déduire par un procédé régulier de ces l groupes particuliers, dits « fondamentaux ».*

Pour arriver à cette génération on prend, d'une certaine manière, qui n'est d'ailleurs pas unique, une variable particulière appelée variable *dominante*, dans chaque groupe fondamental. Soit x_i la variable dominante de g_i . On se donne alors arbitrairement l entiers $p_1, p_2, \dots, p_l$, positifs ou nuls, et l'on considère l'expression

$$x_1^{p_1} x_2^{p_2} \dots x_l^{p_l}.$$

Lorsqu'on applique à cette expression les transformations du groupe g à r paramètres dont les équations s'obtiennent par la juxtaposition des équations de $g_1, g_2, \dots, g_l$ ⁽¹⁾, cette expression se transforme en un certain nombre d'autres linéairement indépendantes.

Le groupe le plus général cherché G indique comment le groupe g transforme linéairement toutes ces expressions. Il dépend donc d'un système de l entiers positifs ou nuls.

Les groupes semi-simples s'engendrent d'une manière analogue. Si par exemple un groupe semi-simple est formé de deux sous-groupes simples, on engendrera tous les groupes linéaires G qui ont sa structure en prenant un groupe linéaire quelconque g de la première structure simple, aux variables $x_1, x_2, \dots, x_m$; et un groupe linéaire quelconque g' de la seconde structure simple, aux variables $y_1, \dots, y_n$. Le groupe le plus général cherché est celui qui indique comment les mn quantités $x_i y_k$ sont transformées linéairement entre elles, soit par les transformations de g , soit par celles de g' .

Les résultats ainsi obtenus comprennent en particulier ceux que l'on connaît déjà relativement à la génération des groupes projectifs à trois paramètres qui ne laissent invariante aucune multi-

(¹) Il faut naturellement supposer que tous ces groupes ont les mêmes paramètres en nombre r , ou encore que chaque transformation infinitésimale de g est la somme de l transformations infinitésimales correspondantes prises dans chacun des l groupes fondamentaux.

plicité plane : chacun d'eux indique en effet comment le groupe projectif de la droite transforme entre elles les expressions

$$x_1^p, \quad x_1^{p-1} x_2, \quad \dots, \quad x_1 x_2^{p-1}, \quad x_2^p.$$

Je forme dans ce Mémoire les différents groupes fondamentaux correspondant aux différentes structures simples.

Les groupes fondamentaux du type (A) sont connus depuis longtemps : ce sont les groupes projectifs qui indiquent comment le groupe projectif de l'espace à l dimensions transforme les points, les droites, les multiplicités planes à 2 dimensions, etc., les multiplicités planes à $l-1$ dimensions de cet espace. Ces groupes sont respectivement à

$$C_{l+1}^1, \quad C_{l+1}^2, \quad C_{l+1}^3, \quad \dots, \quad C_{l+1}^l$$

variables.

Parmi les groupes fondamentaux du type (B), l'un est le groupe projectif d'une quadrique dans l'espace à $2l$ dimensions; $l-2$ autres indiquent comment ce groupe projectif transforme dans cet espace les multiplicités planes à 1, 2, ..., $l-2$ dimensions. Enfin, un dernier groupe fondamental est tout à fait à part; il est à 2^l variables; il indique comment le groupe projectif de la quadrique transforme les 2^l paramètres homogènes (surabondants) des multiplicités planes à $l-1$ dimensions qui engendrent la quadrique. D'ailleurs, ce dernier groupe fondamental peut servir, par un procédé que j'indique, à engendrer tous les autres groupes fondamentaux.

Les résultats relatifs au type (D) sont analogues, sauf que le groupe fondamental à 2^l variables est remplacé par deux groupes fondamentaux (d'ailleurs isomorphes) à 2^{l-1} variables.

Les groupes fondamentaux du type (C) se déduisent très facilement de l'un d'entre eux, qui est le groupe projectif d'un complexe linéaire de l'espace à $2l-1$ dimensions.

J'indique enfin la formation des groupes fondamentaux des types (E), (F) et (G). Des six groupes fondamentaux du type (E) ($l=6$), deux sont à 27 variables, un à 78, deux à 351 et un à 2925.

Les quatre groupes fondamentaux du type (F) sont respectivement à 26, 52, 273 et 1274 variables.

Enfin, les deux groupes fondamentaux du type (G) sont respectivement à 7 et 14 variables.

Je suppose dans tout ce qui suit qu'on a affaire à des variables et à des paramètres *complexes*. Je me propose de compléter ultérieurement les résultats précédents en ce qui concerne les groupes *réels* ⁽¹⁾.

I. — GÉNÉRALITÉS. POIDS, POIDS HOMOLOGUES.

1. Considérons un groupe linéaire et homogène à n variables $x_1, x_2, \dots, x_n$, et supposons que ce groupe ne laisse invariante aucune multiplicité plane. J'ai démontré précédemment ⁽²⁾ que ce groupe :

Ou bien est simple ou semi-simple;

Ou bien est formé d'un sous-groupe simple ou semi-simple et du groupe à un paramètre des transformations homothétiques

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

La détermination des groupes linéaires qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane revient donc à celle de ces groupes qui sont simples ou semi-simples.

2. On sait que les transformations infinitésimales d'un groupe semi-simple d'ordre r et de rang l peuvent être choisies de manière à satisfaire aux conditions suivantes ⁽³⁾ :

D'abord l de ces transformations $Y_1, Y_2, \dots, Y_l$ sont échangeables entre elles; ensuite les $r - l$ autres $X_1, \dots, X_{r-l}$ satisfont aux relations

$$(Y_i X_k) = m_{ik} X_k \quad (i = 1, 2, \dots, l; k = 1, 2, \dots, r - l),$$

⁽¹⁾ Je fais dans le cours de ce Mémoire des renvois fréquents à ma Thèse : *Sur la structure des groupes de transformations finis et continus*. Paris, Nony, 1894. Je la désignerai pour abréger par la notation C .

⁽²⁾ *Les groupes de transformations continus, infinis, simples* (Ann. Éc. Norm. sup., 3^e série, t. XXVI, 1909, p. 99).

⁽³⁾ C ., Chap. IV, p. 61-67.

où les m_{ik} sont des coefficients constants. A chaque transformation X_k est associée une racine ω_k de l'équation caractéristique relative à la transformation infinitésimale $e_1 Y_1 + \dots + e_l Y_l$. Ces $r-l$ racines sont des combinaisons linéaires à coefficients rationnels de l d'entre elles, linéairement indépendantes,

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \dots, \quad \omega_l$$

et l'on peut toujours choisir ces l racines (dites *fondamentales*) de manière que toutes les autres soient de la forme

$$\omega_\alpha = h_{\alpha 1} \omega_1 + \dots + h_{\alpha l} \omega_l,$$

les $h_{\alpha i}$ étant entiers. Le crochet $(X_j X_k)$ de deux transformations X est un multiple non nul de la transformation X qui appartient à la racine $\omega_j + \omega_k$, si cette racine existe; dans le cas contraire, ce crochet est nul. Enfin, à deux quelconques $\omega_\alpha, \omega_\beta$ des $r-l$ racines ω est attaché un entier $a_{\alpha\beta}$ jouissant de la propriété que toutes les quantités qui font partie de la progression arithmétique de raison ω_β , et dont les termes extrêmes sont ω_α et $\omega_\alpha + a_{\alpha\beta} \omega_\beta$, sont des racines. Il existe de même un entier $a_{\beta\alpha}$. On a en particulier $a_{\alpha\alpha} = -2$. Enfin, si l'on a

$$\omega_\alpha = h_{\alpha 1} \omega_1 + \dots + h_{\alpha l} \omega_l,$$

on a

$$a_{\alpha i} = h_{\alpha 1} a_{1i} + \dots + h_{\alpha l} a_{li} \quad (i = 1, 2, \dots, r-l).$$

3. Si un groupe semi-simple est linéaire et homogène à n variables, on peut choisir ces variables de manière que chacune ait un poids ϖ ⁽¹⁾. Ce poids ϖ est une combinaison linéaire à coefficients rationnels des l racines fondamentales $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_l$:

$$(1) \quad \varpi = m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 + \dots + m_l \omega_l.$$

Si x est une variable de poids ϖ , $X_\alpha(x)$ est une combinaison linéaire des variables de poids $\varpi + \omega_\alpha$.

Si l'on pose

$$a_\alpha = m_1 a_{1\alpha} + m_2 a_{2\alpha} + \dots + m_l a_{l\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, r-l),$$

⁽¹⁾ C., Chap. VIII, p. 127-153. Les poids ϖ sont ce que j'appelle, dans ma Thèse, les *racines secondaires*.

et si l'on considère les poids qui forment la progression arithmétique de raison ω_α et dont les termes extrêmes sont ϖ et $\varpi + b_\alpha \omega_\alpha$, il existe des variables de chacun de ces poids. De plus, il y a autant de variables de poids $\varpi + b_\alpha \omega_\alpha$ que de variables de poids ϖ . Nous désignerons en particulier le poids $\varpi + b_\alpha \omega_\alpha$ par la notation $S_\alpha \varpi$, et nous l'appellerons le poids *transformé de ϖ par la substitution S_α* . Si $\omega_{\alpha'} = -\omega_\alpha$, on a

$$S_{\alpha'} S_\alpha \varpi = \varpi.$$

Un poids ϖ sera dit un poids *frontière* s'il est impossible de trouver une racine ω_α telle qu'il y ait en même temps des variables de poids $\varpi + \omega_\alpha$ et des variables de poids $\varpi - \omega_\alpha$. Il y a évidemment des poids frontières; il suffit de prendre parmi les poids de toutes les variables du groupe, ceux pour lesquels le coefficient m_1 de la formule (1) est le plus grand; parmi ces poids, ceux pour lesquels le coefficient m_2 est le plus grand, et ainsi de suite. On arrive ainsi à un poids, que nous appellerons poids *dominant*, et qui est évidemment frontière.

Si ϖ est un poids frontière, il en est de même de $S_\alpha \varpi$. Supposons en effet qu'il n'en soit pas ainsi. Pour une certaine valeur de β , il existerait en même temps des variables de poids $S_\alpha \varpi + \omega_\beta$ et des variables de poids $S_\alpha \varpi - \omega_\beta$. Par suite, il existerait en même temps des variables de poids

$$S_{\alpha'}(S_\alpha \varpi + \omega_\beta) = \varpi + S_{\alpha'} \omega_\beta \quad \text{et} \quad S_{\alpha'}(S_\alpha \varpi - \omega_\beta) = \varpi - S_{\alpha'} \omega_\beta,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse, la quantité $S_{\alpha'} \omega_\beta$ étant une racine ω_γ .

On montre de la même manière que si ϖ n'est pas un poids frontière, $S_\alpha \varpi$ ne l'est pas non plus.

4. Nous appellerons poids *homologues* d'un poids donné ϖ tous les poids qui peuvent s'en déduire par les transformations S_α répétées un nombre quelconque de fois. Tous les poids homologues de ϖ sont de la forme

$$S_{\alpha_n} S_{\alpha_{n-1}} \dots S_{\alpha_1} \varpi;$$

il leur correspond à tous le même nombre de variables.

Si le groupe ne laisse invariante aucune multiplicité plane,

tous les poids frontières sont homologues entre eux et homologues du poids dominant. Supposons, en effet, qu'il y ait des poids frontières qui ne soient pas homologues du poids dominant Π . Soit ϖ_0 le plus haut de ces poids frontières. Considérons alors toutes les variables dont le poids est ϖ_0 ou moins haut que ϖ_0 . Je dis que ces variables sont transformées entre elles par le groupe. Si, en effet, une de ces variables donnait, en lui appliquant la transformation X_α , une nouvelle variable de poids plus haut que ϖ_0 , le poids ϖ de cette variable ferait partie d'une progression arithmétique de raison ω_α ; le terme $\varpi + \omega_\alpha$ de cette progression serait un poids plus haut que ϖ_0 ; il y aurait donc un poids frontière de la forme $\varpi + h\omega_\alpha$ ($h \geq 1$) qui serait nécessairement homologue de ϖ_0 . Or, la transformation $S_{\alpha'}$ appliquée à ce poids frontière donnerait un poids homologue de la forme $\varpi - h'\omega_\alpha$ ($h' \geq 0$), et par suite moins haut que ϖ_0 , ce qui est contraire à l'hypothèse.

Les variables considérées étant transformées par le groupe, on obtient, en les égalant à zéro, les équations d'une multiplicité plane invariante par le groupe, ce qui est encore contraire à l'hypothèse.

Il résulte de là que *dans tout groupe linéaire qui ne laisse invariante aucune multiplicité plane, tout poids frontière détermine tous les autres points frontières.*

II. — GROUPES ISOMORPHES DE MÊME POIDS DOMINANT.

§. Nous allons maintenant démontrer que *si deux groupes linéaires isomorphes ne laissant invariante aucune multiplicité plane ont le même poids dominant, ils sont semblables.*

Prenons en effet dans le premier groupe une variable u ayant pour poids le poids dominant. Considérons toutes les expressions de la forme

$$(2) \quad X_{\alpha_n} X_{\alpha_{n-1}} \dots X_{\alpha_1} u,$$

où Xu est mis à la place de $X(u)$, $XX'u$ à la place de $X[X'(u)]$ et ainsi de suite.

Ces expressions (2) en nombre infini peuvent être rangées dans une suite linéaire. Chacune d'elles est une combinaison linéaire

des variables de même poids. Soient

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \dots,$$

ces expressions.

Partons de même d'une variable v du second groupe admettant pour poids le poids dominant et formons sur v les expressions analogues à (2). Soient

$$v_1, \quad v_2, \quad v_3, \quad \dots$$

Chaque v_i est de même poids que l'expression u_i correspondante. On peut d'ailleurs supposer $u_1 = u$, $v_1 = v$.

6. Considérons parmi les expressions (2) celles qui sont du poids dominant ϖ ; nous allons d'abord démontrer qu'elles sont de la forme ku , k étant un coefficient numérique qui ne dépend que du poids dominant, ainsi que des indices α_i qui entrent dans la formation de l'expression (2) considérée.

Chaque racine ω_{α_i} est de la forme

$$\omega_{\alpha_i} = m_{i1}\omega_1 + m_{i2}\omega_2 + \dots + m_{il}\omega_l,$$

et l'on a évidemment

$$\omega_{\alpha_1} + \omega_{\alpha_2} + \dots + \omega_{\alpha_n} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\Sigma m_{i1} = 0, \quad \Sigma m_{i2} = 0, \quad \dots, \quad \Sigma m_{il} = 0.$$

Supposons que l'un au moins des coefficients m_{i1} soit différent de zéro; alors l'un d'eux est positif; supposons que h soit la plus petite valeur de i pour laquelle cela a lieu. Nous allons d'abord montrer que l'expression considérée (2) est une combinaison linéaire d'expressions analogues de même poids ϖ , *mais pour lesquelles le nombre n est plus petit.*

En effet, si d'abord tous les coefficients

$$m_{11}, \quad m_{21}, \quad \dots, \quad m_{h-1,1}$$

sont nuls, l'expression (2) est identiquement nulle, car, sinon le poids de l'expression

$$X_{\alpha_h} X_{\alpha_{h-1}} X_{\alpha_{h-2}} \dots X_{\alpha_1} u$$

serait

$$\varpi' = \varpi + \omega_{\alpha_1} + \omega_{\alpha_2} + \dots + \omega_{\alpha_{h-1}} + \omega_{\alpha_h},$$

et le coefficient de ω_1 dans ϖ' est supérieur au coefficient de ω_1 dans ϖ , qui ne serait pas ainsi le poids dominant.

Plaçons-nous maintenant dans le cas général. On a

$$\begin{aligned} & X_{\alpha_n} \dots X_{\alpha_h} X_{\alpha_{h-1}} \dots X_{\alpha_1} u \\ &= X_{\alpha_n} \dots (X_{\alpha_h} X_{\alpha_{h-1}}) X_{\alpha_{h-2}} \dots X_{\alpha_1} u + X_{\alpha_n} \dots X_{\alpha_{h-1}} X_{\alpha_h} X_{\alpha_{h-2}} \dots X_{\alpha_1} u. \end{aligned}$$

Pour la première expression du second membre le nombre n est diminué d'une unité, à moins que $\omega_{\alpha_{h-1}} + \omega_{\alpha_h}$ ne soit nul; dans ce cas le crochet $(X_{\alpha_h} X_{\alpha_{h-1}})$ est une combinaison linéaire des transformations Y , et son effet sur l'expression $X_{\alpha_{h-2}} \dots X_{\alpha_1} u$ est de la multiplier par un facteur numérique qui ne dépend que de son poids et de α_h ⁽¹⁾; le nombre n est alors réduit de deux unités. Dans la seconde expression du second membre, au contraire, n n'est pas changé; mais l'indice h est diminué d'une unité. En raisonnant sur cette seconde expression comme sur la première, on fera avancer la transformation X_{α_h} jusqu'à ce qu'il n'y ait plus après elle aucun indice α_i pour lequel m_{i1} soit négatif; alors on sera arrivé à une expression identiquement nulle.

On pourra ainsi réduire de proche en proche le nombre n tant qu'il restera des indices α_i pour lesquels m_{i1} n'est pas nul. La réduction aura une fin puisque n ne peut descendre au-dessous de 2 sans être nul.

Lorsqu'il n'y aura plus aucun indice α_i pour lequel m_{i1} soit différent de zéro, on raisonnera sur les indices pour lesquels m_{i2} n'est pas nul, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait fait disparaître toutes les transformations X .

L'expression primitive se trouvera finalement de la forme ku , k ne dépendant pas du groupe linéaire considéré, mais uniquement du poids ϖ et des indices $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

7. Considérons maintenant les expressions, en nombre infini,

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \dots$$

Elles sont toutes des combinaisons linéaires d'un nombre fini

(1) Cela résulte d'un théorème d'après lequel Yu est un multiple de u , si le poids de u n'est pas nul. Ce théorème résulte au fond des propriétés connues des groupes linéaires simples à trois paramètres. Voir aussi C, p. 99-101.

d'entre elles, nombre au plus égal au nombre des variables du groupe. Soient

$$x_1, x_2, \dots, x_p$$

ces combinaisons indépendantes, dont chacune a un poids déterminé.

La multiplicité plane

$$x_1 = x_2 = \dots = x_p = 0$$

est évidemment invariante par le groupe, puisque chaque expression $X_\alpha x_i$ est une des expressions u_i , et par conséquent combinaison linéaire de $x_1, \dots, x_p$. Il faut donc, puisque le groupe n'admet aucune multiplicité plane invariante, que toute variable du groupe soit une combinaison linéaire de $x_1, \dots, x_p$.

On voit de plus (§), que parmi les expressions $x_1, x_2, \dots, x_p$, une seule est du poids dominant ϖ ; donc, *si un groupe linéaire ne laisse invariante aucune multiplicité plane, il existe une seule variable ayant pour poids le poids dominant, et par suite aussi une seule variable, ayant pour poids un poids frontière.*

8. Supposons, maintenant, ce qui est toujours possible, qu'on ait pris

$$x_1 = u_1, \quad x_2 = u_{i_2}, \quad x_3 = u_{i_3}, \quad \dots, \quad x_p = u_{i_p} \quad (1 < i_2 < i_3 < \dots < i_p),$$

et considérons les relations linéaires qui expriment :

$$\begin{aligned} &u_2, \dots, u_{i_2-1} \text{ en fonction de } u_1; \\ &u_{i_2+1}, \dots, u_{i_2-1} \text{ en fonction de } u_1, u_{i_2}; \\ &u_{i_3+1}, \dots, u_{i_3-1} \text{ en fonction de } u_1, u_{i_2}, u_{i_3}; \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Si l'on considère les *mêmes* relations entre les v de même indice, il se peut *a priori* qu'un certain nombre de ces relations *ne soient pas identiques*; elles exprimeraient alors des relations entre les variables du second groupe, chaque relation ne contenant que des variables de même poids. Supposons que q de ces relations soient indépendants et soient

$$V_1, V_2, \dots, V_q$$

leurs premiers membres. *Le groupe échange entre elles les quantités* $V_1, \dots, V_q$. En effet, si l'on applique à l'une d'elles V_i la transformation X_α , on obtient une expression qui, égale à zéro, donne une relation entre les v_i ; *et la relation analogue entre les* u_i *est identique.*

D'autre part, parmi les V_i , il n'y en a aucune de poids ϖ , parce que, d'après (5), toute relation entre les u_i de poids ϖ est de la forme $u_i = k_i u$ et que le coefficient k_i est le même pour les v que pour les u .

Si donc q n'était pas nul, le second groupe linéaire aux variables v admettrait une multiplicité plane invariante, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Il résulte de là que si l'on établit entre les variables u et les variables v les relations $v_i = u_i$, relations qui n'introduisent aucune relation entre les variables v ni entre les variables u , les deux groupes deviennent identiques, puisque si $X_\alpha u_i = u_j$, on a aussi $X_\alpha v_i = v_j$. Par conséquent, *si deux groupes linéaires isomorphes qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane, admettent le même poids dominant, ils sont semblables.*

La même conclusion subsiste évidemment s'ils ont un poids frontière commun.

9. La démonstration précédente montre comment on peut former tous les poids d'un groupe linéaire ne laissant invariante aucune multiplicité plane, dès que l'on connaît un poids frontière ϖ_0 .

On forme d'abord les poids homologues de ϖ_0 , ce qui donne tous les poids frontières.

On considère ensuite chaque substitution S_α telle que

$$S_\alpha \varpi_0 = \varpi_0 + h \omega_\alpha,$$

l'entier h étant plus grand que 1; et l'on prend les poids

$$\varpi_0 + \omega_\alpha, \quad \dots, \quad \varpi_0 + \left[\frac{h}{2} \right] \omega_\alpha.$$

On obtient ainsi un certain nombre de poids nouveaux, non frontières, dont on détermine les homologues. Cela donne un certain nombre de systèmes de poids homologues.

Dans chacun de ces systèmes on prend un poids particulier sur lequel on fait les mêmes opérations qu'on vient de faire sur ϖ_0 et ainsi de suite, jusqu'à ce que ces opérations ne soient plus possibles.

On obtient ainsi un certain nombre de systèmes de poids homologues, les poids d'un même système correspondant au même nombre de variables du groupe linéaire.

III. — PRODUIT DE DEUX GROUPES LINÉAIRES ISOMORPHES.

10. Considérons deux groupes linéaires g_1 et g_2 n'admettant aucune multiplicité plane invariante et isomorphes entre eux. Supposons d'une manière plus générale qu'ils soient isomorphes (holoédriques ou mériédriques) d'un même groupe semi-simple G . Soient $x_1, x_2, \dots, x_p$ les variables du premier; soient $y_1, y_2, \dots, y_q$ les variables du second.

Prenons l racines fondamentales $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_l$ du groupe G et soient, par rapport à ces racines, ϖ le poids dominant de g_1 et ϖ' le poids dominant de g_2 . Nous pouvons supposer que x_1 est la variable unique de poids ϖ , y_1 la variable unique de poids ϖ' .

Si nous considérons les différents produits $x_i y_k$, ils sont échangés entre eux d'une manière linéaire, définissant ainsi un groupe linéaire à pq variables. Partons maintenant du produit $x_1 y_1$ et appliquons-lui successivement et plusieurs fois de suite les différentes transformations du groupe. Nous obtiendrons un certain nombre de combinaisons linéaires $z_1, z_2, \dots, z_r$ des produits $x_i y_k$, chacune d'elles étant formée de produits tous de même poids. Le groupe qui indique comment ces r quantités $z_1, z_2, \dots, z_r$ sont transformées est un groupe linéaire qui ne laisse évidemment invariante aucune multiplicité plane. Nous l'appellerons *le produit* des deux groupes donnés. Son poids dominant est égal à la somme des poids dominants des deux groupes.

Ce qui précède prouve donc l'existence d'un groupe linéaire admettant pour point dominant la somme des poids dominants de deux groupes donnés et donne un procédé simple pour construire ce groupe.

11. Nous allons maintenant montrer que le poids du groupe

produit s'obtient en faisant, *de toutes les manières possibles et sans exception*, la somme d'un poids du premier groupe facteur et d'un poids du second groupe facteur.

Considérons en effet les équations finies du groupe g_1 et soit

$$x'_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_p x_p$$

l'équation qui donne la variable x'_1 transformée de x_1 . Il n'y a aucune relation linéaire à coefficients constants entre $a_1, a_2, \dots, a_p$; car s'il y en avait une on pourrait choisir les variables de manière à avoir $a_{p'+1} = \dots = a_p = 0$ sans qu'il y ait aucune relation linéaire à coefficients constants entre $a_1, \dots, a_p$.

On démontrerait alors facilement, en utilisant la propriété qui sert de définition aux groupes, que la multiplicité plane

$$x_1 = x_2 = \dots = x_p = 0$$

est invariante par le groupe.

Soit de même

$$y'_1 = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_q y_q$$

l'équation qui donne la variable y'_1 transformée de y_1 par la transformation la plus générale du groupe g_2 . On en déduit

$$x'_1 y'_1 = \sum a_i b_k x_i y_k.$$

Si i et k sont deux indices quelconques ($i \leq p, k \leq q$), le coefficient $a_i b_k$ de $x_i y_k$ n'est pas nul, puisque ni a_i ni b_k ne le sont; il n'est pas non plus constant (si i et k ne sont pas tous les deux égaux à 1), puisqu'il doit se réduire à zéro pour la transformation identique de G . Ce coefficient $a_i b_k$ dépend donc effectivement des paramètres de G . Par suite, si l'on pose

$$x_i y_k = z_{ik},$$

l'une des transformations infinitésimales du groupe qui transforme les $z_{\alpha\beta}$ est de la forme

$$(h z_{ik} + \dots) \frac{\partial f}{\partial z_{11}} + \dots$$

Il résulte de là que le groupe produit défini plus haut contient la variable $h z_{ik} + \dots$; autrement dit l'un des poids du groupe

produit est la somme du poids de la variable x_i et du poids de la variable y_k . C'est ce qu'il fallait démontrer.

Ce théorème prouve que le *groupe produit est indépendant de la définition particulière donnée au préalable du poids dominant*. Les poids frontières sont tous la somme d'un poids frontière de g_1 et d'un poids frontière de g_2 .

IV. — LES GROUPES LINÉAIRES FONDAMENTAUX.

12. Nous allons maintenant démontrer qu'étant donnée une structure simple de rang l , *il existe l groupes linéaires particuliers de cette structure, ne laissant invariante aucune multiplicité plane et tels que tout autre groupe linéaire isomorphe ne laissant invariante aucune multiplicité plane puisse être regardé comme le produit de deux ou plusieurs de ces groupes, chacun d'eux pouvant entrer plusieurs fois comme facteur*.

Autrement dit on peut trouver l groupes linéaires $g_1, g_2, \dots, g_l$ tels que si $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_l$ sont leurs poids dominants, le poids dominant de tout autre groupe linéaire de même structure soit de la forme

$$p_1 \Pi_1 + p_2 \Pi_2 + \dots + p_l \Pi_l,$$

où les coefficients p_i sont des entiers non négatifs.

Ces l groupes s'appelleront les *groupes fondamentaux* de la structure donnée.

Remarquons d'abord qu'on ne peut pas trouver deux systèmes différents de l groupes fondamentaux, et cela quelle que soit la définition donnée au préalable des poids dominants. Car si avec une deuxième définition on arrivait à trouver l nouveaux groupes fondamentaux $g'_1, g'_2, \dots, g'_l$, leurs poids dominants, à l'ancien sens, seraient de la forme

$$p_{i1} \Pi_1 + p_{i2} \Pi_2 + \dots + p_{il} \Pi_l \quad (i = 1, 2, \dots, l).$$

Chacun g'_i des l premiers groupes fondamentaux serait alors un produit de la forme

$$g_1^{q_{i1}} g_2^{q_{i2}} \dots g_l^{q_{il}},$$

et, d'après le n° 9, contiendrait tous les poids obtenus en ajoutant

de toutes les manières possibles le poids de chaque facteur. Son poids dominant, à l'ancien sens, serait donc

$$\sum q_{ij} p_{ik} \Pi_k = \Pi_i.$$

On en déduit facilement l'identité des deux systèmes. Il n'y aurait qu'un cas où la conclusion serait douteuse, c'est celui où un des poids Π_i serait déjà une somme de multiples, positifs ou nuls, des autres. Dans ce cas la représentation de tout poids dominant au moyen des poids fondamentaux ne serait pas unique : mais nous verrons, pour chaque type de groupes simples, que ce cas ne se présente pas.

La détermination des groupes fondamentaux de chaque structure simple étant supposée faite, on en déduit facilement tous les groupes linéaires (ne laissant invariante aucune multiplicité plane) de structure semi-simple donnée. Si cette structure résulte de la composition de plusieurs sous-groupes simples, on considérera les groupes fondamentaux relatifs à ces différentes structures simples et l'on formera tous les groupes produits de ces groupes fondamentaux. Ici aussi ces groupes fondamentaux sont en nombre l , l étant le rang du groupe. Mais ils ne sont qu'isomorphes mériédriques au groupe semi-simple donné.

Nous allons maintenant passer en revue les différents types de groupes simples. Nous commencerons d'abord par la détermination des l poids dominants fondamentaux $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_l$, et nous démontrerons ensuite l'existence de groupes linéaires admettant ces poids fondamentaux.

V. — POIDS FONDAMENTAUX DU TYPE A).

13. Ici les racines sont de la forme

$$\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, l+1),$$

où les $l+1$ quantités $\bar{\omega}_i$ sont liées par la relation

$$\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \dots + \bar{\omega}_{l+1} = 0.$$

Tout poids ϖ est de la forme

$$\varpi = m_1 \bar{\omega}_1 + m_2 \bar{\omega}_2 + \dots + m_{l+1} \bar{\omega}_{l+1},$$

où les coefficients m_i peuvent toujours être supposés liés par la relation

$$m_1 + m_2 + \dots + m_{l+1} = 0.$$

Si

$$\omega_\alpha = \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j,$$

on a

$$b_\alpha = -m_i + m_j;$$

par suite les coefficients m_i diffèrent entre eux de nombres entiers, ce sont donc des fractions ayant pour dénominateur $l+1$.

Pour définir le poids dominant, nous prendrons tous les poids pour lesquels m_1 est maximum, puis parmi ceux-là, tous ceux pour lesquels m_2 est maximum, et ainsi de suite. Pour qu'un poids soit dominant, il faut et il suffit qu'on ait

$$m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_{l+1}.$$

14. Parmi les poids dominants possibles nous pourons prendre les l suivants :

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \frac{\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \dots + \bar{\omega}_l - l\bar{\omega}_{l+1}}{l+1} = -\bar{\omega}_{l+1}, \\ \Pi_2 &= \frac{2\bar{\omega}_1 + 2\bar{\omega}_2 + \dots + 2\bar{\omega}_{l-1} - (l-2)\bar{\omega}_l - (l-2)\bar{\omega}_{l+1}}{l+1} = -\bar{\omega}_l - \bar{\omega}_{l+1}, \\ &\dots\dots\dots, \\ \Pi_i &= \frac{i\bar{\omega}_1 + i\bar{\omega}_2 + \dots + i\bar{\omega}_{l-i+1} - (l-i)\bar{\omega}_{l-i} - \dots - (l-i)\bar{\omega}_{l+1}}{l+1} \\ &= -\bar{\omega}_{l-i} - \bar{\omega}_{l-i+1} - \dots - \bar{\omega}_{l+1}, \\ \Pi_l &= \frac{l\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2 - \dots - \bar{\omega}_{l+1}}{l+1} = \bar{\omega}_1. \end{aligned}$$

Tout autre poids dominant

$$\varpi = m_1 \bar{\omega}_1 + m_2 \bar{\omega}_2 + \dots + m_{l+1} \bar{\omega}_{l+1}$$

est de la forme

$$\varpi = p_1 \Pi_1 + p_2 \Pi_2 + \dots + p_l \Pi_l,$$

où les entiers *non négatifs* $p_1, p_2, \dots, p_l$ sont donnés par les relations

$$p_1 = m_l - m_{l+1}, \quad p_2 = m_{l-1} - m_l, \quad \dots, \quad p_l = m_1 - m_2.$$

Les poids de chaque groupe g_i sont tous homologues entre eux.

Ils s'obtiennent en effectuant sur les indices des lettres $\overline{\omega}$ de Π_i une substitution quelconque.

Le groupe g_i , *supposé exister*, a donc C_{i+1}^i variables.

VI. — POIDS FONDAMENTAUX DU TYPE B).

15. Ici les racines sont de la forme (1)

$$\pm \omega_i, \quad \pm \omega_i \pm \omega_j \quad (i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, l).$$

Soit

$$\varpi = m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 + \dots + m_l \omega_l$$

un poids quelconque; soient $S_i \varpi$, $S_{ij} \varpi$, $S_{ij'} \varpi$ les poids transformés de ϖ par les substitutions S correspondant aux racines ω_i , $\omega_i + \omega_j$, $\omega_i - \omega_j$. On a

$$\begin{aligned} S_i \varpi &= \varpi - 2 m_i \omega_i, & S_{ij} \varpi &= \varpi - (m_i + m_j) (\omega_i + \omega_j), \\ S_{ij'} \varpi &= \varpi - (m_i - m_j) (\omega_i - \omega_j). \end{aligned}$$

Il résulte de là que les m_i sont ou bien tous entiers, ou bien tous des fractions de dénominateur 2 et de numérateur impair.

Définissons le poids dominant comme dans le cas du type A). On voit que si ϖ est un poids dominant, tous les m_i sont positifs ou nuls :

$$m_1 \geq m_2 \geq m_3 \geq \dots \geq m_l \geq 0.$$

Ces inégalités sont nécessaires et suffisantes pour que le poids ϖ soit plus haut que tous ses homologues.

16. Parmi les poids dominants possibles, nous pouvons prendre les l suivants :

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \frac{\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_l}{2}, \\ \Pi_2 &= \omega_1, \\ \Pi_3 &= \omega_1 + \omega_2, \\ &\dots\dots\dots, \\ \Pi_l &= \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{l-1}. \end{aligned}$$

Tout autre poids dominant est de la forme

$$\varpi = p_1 \Pi_1 + p_2 \Pi_2 + \dots + p_l \Pi_l,$$

(1) C, p. 79.

où les entiers non négatifs $p_1, p_2, \dots, p_l$ sont donnés par les relations

$$p_1 = 2m_l, \quad p_2 = m_1 - m_2, \quad p_3 = m_2 - m_3, \quad \dots, \quad p_l = m_{l-1} - m_l.$$

Les poids de g_1 sont de la forme $\frac{\pm \omega_1 \pm \omega_2 \pm \dots \pm \omega_l}{2}$ et sont au nombre de 2^l ; ils sont tous frontières.

Les poids de g_2 sont $\pm \omega_i$ et 0; les $2l$ premiers sont frontières.

Les poids de g_3 sont $\pm \omega_i \pm \omega_j$ et ceux de g_2 : ceux qui n'appartiennent pas à g_2 sont frontières.

D'une manière générale les poids de g_α sont

$$\pm \omega_{i_1} \pm \omega_{i_2} \pm \dots \pm \omega_{i_{\alpha-1}}$$

et les poids de $g_{\alpha-1}$. Les premiers sont frontières.

VII. — POIDS FONDAMENTAUX DU TYPE C).

17. Ici les racines sont ⁽¹⁾

$$\pm 2\bar{\omega}_i, \quad \pm \bar{\omega}_i \pm \bar{\omega}_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, l).$$

Soit

$$\varpi = m_1 \bar{\omega}_1 + m_2 \bar{\omega}_2 + \dots + m_l \bar{\omega}_l.$$

Si $S_{ii}, S_{ij}, S_{ij'}$ sont les substitutions correspondant aux racines $2\bar{\omega}_i, \bar{\omega}_i + \bar{\omega}_j, \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j$, on a

$$\begin{aligned} S_{ii}\varpi &= \varpi - 2m_i \bar{\omega}_i, & S_{ij}\varpi &= \varpi - (m_i + m_j)(\bar{\omega}_i + \bar{\omega}_j), \\ S_{ij'}\varpi &= \varpi - (m_i - m_j)(\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j). \end{aligned}$$

Il résulte de là que les m_i sont entiers. Si l'on définit le poids dominant comme précédemment, on voit que, pour tout poids dominant, on a

$$m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_l \geq 0.$$

Ces inégalités sont nécessaires et suffisantes.

18. Parmi les poids dominants possibles, on peut prendre les l

⁽¹⁾ C, p. 79.

suivants :

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= \omega_1, \\ \Pi_2 &= \omega_1 + \omega_2, \\ &\dots\dots\dots, \\ \Pi_l &= \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_l.\end{aligned}$$

Tous poids dominant ϖ est de la forme

$$\omega = p_1 \Pi_1 + p_2 \Pi_2 + \dots + p_l \Pi_l,$$

où les entiers non négatifs $p_1, p_2, \dots, p_l$ sont donnés par les formules

$$p_1 = m_1 - m_2, \quad p_2 = m_2 - m_3, \quad \dots, \quad p_{l-1} = m_{l-1} - m_l, \quad p_l = m_l.$$

Les poids Π sont donc fondamentaux.

Les poids de g_1 sont $\pm \omega_i$, en nombre $2l$, tous frontières.

Les poids de g_2 sont $\pm \omega_i \pm \omega_j$ et 0, tous frontières, sauf 0.

Les poids de g_3 sont $\pm \omega_i \pm \omega_j \pm \omega_k$ et ceux de g_1 , les premiers étant frontières, et ainsi de suite.

VIII. — POIDS FONDAMENTAUX DU TYPE D).

19. Les racines sont ici ⁽¹⁾

$$\pm \bar{\omega}_i \pm \bar{\omega}_j \quad (i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, l).$$

Soit

$$\varpi = m_1 \bar{\omega}_1 + m_2 \bar{\omega}_2 + \dots + m_l \bar{\omega}_l.$$

Si S_{ij} et $S_{ij'}$ sont les substitutions correspondant aux racines $\bar{\omega}_i + \bar{\omega}_j$ et $\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j$, on a

$$S_{ij} \varpi = \varpi - (m_i + m_j) (\bar{\omega}_i + \bar{\omega}_j), \quad S_{ij'} \varpi = \varpi - (m_i - m_j) (\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j).$$

Il en résulte que les m_i sont tous entiers, ou tous des fractions de dénominateur 2 et de numérateur impair. Si l'on définit le poids dominant comme dans les cas précédents, on voit que, si $i < j$, on doit avoir

$$m_i \geq m_j, \quad m_i \leq -m_j.$$

⁽¹⁾ C, p. 79.

Les coefficients $m_1, \dots, m_{l-1}$ sont donc positifs ou nuls, ne vont pas en croissant, et sont supérieurs ou égaux à m_l en valeur absolue

$$m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_{l-1} \geq 0; \quad m_{l-1} \geq |m_l|.$$

Ces inégalités sont nécessaires et suffisantes.

20. On peut choisir pour poids fondamentaux les poids suivants :

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \frac{\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \dots + \bar{\omega}_{l-1} - \bar{\omega}_l}{2}, \\ \Pi_2 &= \frac{\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \dots + \bar{\omega}_{l-1} + \bar{\omega}_l}{2}, \\ \Pi_3 &= \bar{\omega}_1, \\ \Pi_4 &= \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2, \\ &\dots\dots\dots \\ \Pi_l &= \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \dots + \bar{\omega}_{l-2}. \end{aligned}$$

Tout poids dominant ϖ est de la forme

$$\varpi = p_1 \Pi_1 + p_2 \Pi_2 + \dots + p_l \Pi_l,$$

où les nombres entiers non négatifs $p_1, \dots, p_l$ sont donnés par

$$\begin{aligned} p_1 &= m_{l-1} - m_l, & p_2 &= m_{l-1} + m_l, & p_3 &= m_1 - m_2, \\ p_4 &= m_2 - m_3, & \dots, & & p_l &= m_{l-2} - m_{l-1}. \end{aligned}$$

Les poids de g_1 et g_2 sont tous frontières et en nombre 2^{l-1} . Ceux de g_3 sont de la forme $\pm \bar{\omega}_i$, tous frontières. Ceux de g_4 sont $\pm \bar{\omega}_i \pm \bar{\omega}_j$ et 0, tous frontières, sauf 0. Ceux de g_5 sont $\pm \bar{\omega}_i \pm \bar{\omega}_j \pm \bar{\omega}_k$ et ceux de g_6 , et ainsi de suite.

IX. — POIDS FONDAMENTAUX DU TYPE E) ($l = 6$).

21. Les racines sont ici de la forme ⁽¹⁾

$$\begin{aligned} \omega_{ij} &= \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j, & \omega_{ijk} &= \bar{\omega}_i + \bar{\omega}_j + \bar{\omega}_k, & \omega'_{ijk} &= -(\bar{\omega}_i + \bar{\omega}_j + \bar{\omega}_k) \\ & & (i, j, k &= 1, 2, \dots, 6), \\ \omega_{000} &= 3\bar{\omega}_0 = -(\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \dots + \bar{\omega}_6), & \omega'_{000} &= -3\bar{\omega}_0 = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \dots + \bar{\omega}_6. \end{aligned}$$

⁽¹⁾ C, p. 80 et 142.

Si l'on a un poids ϖ de la forme

$$\varpi = m_1 \bar{\omega}_1 + m_2 \bar{\omega}_2 + \dots + m_6 \bar{\omega}_6,$$

et si l'on désigne par S_{ij} , S_{ijk} , S_{000} les substitutions correspondant aux racines ω_{ij} , ω_{ijk} , ω_{000} , on a

$$S_{ij} \varpi = \varpi - (m_i - m_j) (\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j),$$

$$S_{ijk} \varpi = \varpi + \left(\frac{1}{3} \sum m_\alpha - m_i - m_j - m_k \right) (\bar{\omega}_i + \bar{\omega}_j + \bar{\omega}_k),$$

$$S_{000} \varpi = \varpi - \frac{1}{3} \sum m_\alpha (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \dots + \bar{\omega}_6).$$

Il résulte de là que les m_i diffèrent entre eux de nombres entiers, que leur somme est un multiple de 3 et que la somme de trois quelconques d'entre eux est un multiple de 3. Ce sont donc en particulier, ou des nombres entiers, ou des fractions de dénominateur 3 et de numérateur congru à 1 (mod 3) ou des fractions de dénominateur 3 et de numérateur congru à 2 (mod 3).

Si l'on définit la hauteur relative de deux poids comme précédemment, on voit que pour tout poids dominant, les m_i ne vont pas en croissant

$$m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_6.$$

De plus l'entier $\frac{1}{3} \sum m_\alpha - m_4 - m_5 - m_6$ doit être négatif ou nul; on a par suite

$$m_1 + m_2 + m_3 \leq 2(m_4 + m_5 + m_6).$$

22. Réciproquement, supposons qu'on ait

$$(1) \quad \begin{cases} m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_6, \\ m_4 + m_5 + m_6 \geq \frac{1}{3} \sum m_\alpha; \end{cases}$$

on peut démontrer sans difficulté que de tous les poids homologues de ϖ , aucun n'est plus haut que lui. On forme d'abord facilement tous les poids homologues de ϖ . Abstraction faite de

leur ordre, les coefficients de ces poids homologues rentrent dans les catégories suivantes :

$$\begin{aligned}
 1^{\circ} & \left\{ \begin{array}{l} m_1 - \frac{1}{3} \Sigma m_{\alpha}, \quad m_2 - \frac{1}{3} \Sigma m_{\alpha}, \quad m_3 - \frac{1}{3} \Sigma m_{\alpha}, \quad m_4 - \frac{1}{3} \Sigma m_{\alpha}, \\ m_5 - \frac{1}{3} \Sigma m_{\alpha}, \quad m_6 - \frac{1}{3} \Sigma m_{\alpha}; \end{array} \right. \\
 2^{\circ} & \left\{ \begin{array}{l} m_i, \quad m_j, \quad m_k, \quad \frac{1}{3} \Sigma m_{\alpha} - m_s - m_t, \\ \frac{1}{3} \Sigma m_{\alpha} - m_l - m_r, \quad \frac{1}{3} \Sigma m_{\alpha} - m_r - m_s; \end{array} \right. \\
 3^{\circ} & \left\{ \begin{array}{l} m_i - \frac{1}{3} \Sigma m_{\alpha}, \quad m_j - \frac{1}{3} \Sigma m_{\alpha}, \quad m_k - \frac{1}{3} \Sigma m_{\alpha}, \quad \frac{1}{3} \Sigma m_{\alpha} - m_s - m_t, \\ \frac{1}{3} \Sigma m_{\alpha} - m_l - m_r, \quad \frac{1}{3} \Sigma m_{\alpha} - m_r - m_s; \end{array} \right. \\
 4^{\circ} & \left\{ \begin{array}{l} m_i, \quad m_i - \frac{1}{3} \Sigma m_{\alpha}, \quad \frac{1}{3} \Sigma m_{\alpha} - m_j - m_k, \quad \frac{1}{3} \Sigma m_{\alpha} - m_j - m_r, \\ \frac{1}{3} \Sigma m_{\alpha} - m_j - m_s, \quad \frac{1}{3} \Sigma m_{\alpha} - m_j - m_t \quad (1). \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

D'après cela, si l'un de ces poids était au moins aussi haut que π , on aurait l'une des inégalités

$$m_1 - \frac{1}{3} \Sigma m_{\alpha} \geq m_1, \quad \frac{1}{3} \Sigma m_{\alpha} - m_5 - m_6 \geq m_1.$$

La première inégalité donnerait

$$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 \leq 0;$$

en tenant compte de

$$m_1 + m_2 + m_3 - 2(m_4 + m_5 + m_6) \leq 0,$$

on en déduirait

$$m_1 + m_2 + m_3 - (m_4 + m_5 + m_6) \leq 0,$$

ce qui exige

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = m_6 = 0.$$

La deuxième inégalité conduirait aux inégalités

$$\frac{1}{3} \Sigma m_{\alpha} \leq m_4 + m_5 + m_6 \leq m_1 + m_5 + m_6 \leq \frac{1}{3} \Sigma m_{\alpha},$$

(1) On a désigné par i, j, k, r, s, t , les six indices 1, 2, 3, 4, 5, 6, rangés dans un ordre quelconque.

d'où l'on conclut

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 2(m_5 + m_6).$$

On pourrait donc poser

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 2a, \quad m_5 = b, \quad m_6 = a - b \quad \left(2a \geq b \geq \frac{a}{2} \geq 0\right).$$

On vérifie directement alors que le poids ϖ est au moins aussi haut que tous ses homologues.

Les poids *dominants* sont donc complètement caractérisés par les inégalités (1).

23. On trouve facilement les poids dominants suivants, rangés par ordre de hauteur :

$$\Pi_1 = \frac{2}{3}\bar{\omega}_1 + \frac{2}{3}\bar{\omega}_2 + \frac{2}{3}\bar{\omega}_3 + \frac{2}{3}\bar{\omega}_4 + \frac{2}{3}\bar{\omega}_5 - \frac{1}{3}\bar{\omega}_6 = -\bar{\omega}_6 - 2\bar{\omega}_0,$$

$$\Pi_2 = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3 + \bar{\omega}_4 + \bar{\omega}_5 + \bar{\omega}_6 = -3\bar{\omega}_0,$$

$$\Pi_3 = \frac{4}{3}\bar{\omega}_1 + \frac{1}{3}\bar{\omega}_2 + \frac{1}{3}\bar{\omega}_3 + \frac{1}{3}\bar{\omega}_4 + \frac{1}{3}\bar{\omega}_5 + \frac{1}{3}\bar{\omega}_6 = \bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_0,$$

$$\Pi_4 = \frac{4}{3}\bar{\omega}_1 + \frac{4}{3}\bar{\omega}_2 + \frac{4}{3}\bar{\omega}_3 + \frac{4}{3}\bar{\omega}_4 + \frac{1}{3}\bar{\omega}_5 + \frac{1}{3}\bar{\omega}_6 = -\bar{\omega}_5 - \bar{\omega}_6 - 4\bar{\omega}_0,$$

$$\Pi_5 = \frac{5}{3}\bar{\omega}_1 + \frac{5}{3}\bar{\omega}_2 + \frac{2}{3}\bar{\omega}_3 + \frac{2}{3}\bar{\omega}_4 + \frac{2}{3}\bar{\omega}_5 + \frac{2}{3}\bar{\omega}_6 = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 - 2\bar{\omega}_0,$$

$$\Pi_6 = 2\bar{\omega}_1 + 2\bar{\omega}_2 + 2\bar{\omega}_3 + \bar{\omega}_4 + \bar{\omega}_5 + \bar{\omega}_6 = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3 - 3\bar{\omega}_0.$$

Ces poids sont les six poids fondamentaux, car tout poids dominant ϖ est de la forme

$$\varpi = p_1 \Pi_1 + p_2 \Pi_2 + \dots + p_6 \Pi_6,$$

avec

$$p_1 = m_5 - m_6,$$

$$p_2 = \frac{2}{3}(m_4 + m_5 + m_6) - \frac{1}{3}(m_1 + m_2 + m_3),$$

$$p_3 = m_1 - m_2,$$

$$p_4 = m_4 - m_5,$$

$$p_5 = m_2 - m_3,$$

$$p_6 = m_3 - m_4.$$

24. Les poids de g_1 sont

$$-\bar{\omega}_i + \bar{\omega}_0, \quad -\bar{\omega}_i - 2\bar{\omega}_0, \quad \bar{\omega}_i + \bar{\omega}_j + \bar{\omega}_0,$$

tous frontières.

Les poids de g_2 sont

$$\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j, \quad \pm (\bar{\omega}_i + \bar{\omega}_j + \bar{\omega}_k), \quad \pm 3\bar{\omega}_0, \quad 0,$$

tous frontières, sauf 0.

Les poids de g_3 sont

$$\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_0, \quad \bar{\omega}_i + 2\bar{\omega}_0, \quad -\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j - \bar{\omega}_0,$$

tous frontières.

Les poids de g_4 sont ceux de g_3 et en outre les poids frontières

$$\begin{aligned} & -2\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_0, \quad -\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j + 2\bar{\omega}_0, \quad -\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j - 4\bar{\omega}_0, \quad -\bar{\omega}_i + \bar{\omega}_j + \bar{\omega}_k - \bar{\omega}_0, \\ & -\bar{\omega}_i + \bar{\omega}_j + \bar{\omega}_k + 2\bar{\omega}_0, \quad 2\bar{\omega}_i + \bar{\omega}_j + \bar{\omega}_k + 2\bar{\omega}_0. \end{aligned}$$

Les poids de g_5 sont ceux de g_4 et en outre les points frontières égaux et de signes contraires à ceux de g_4 .

Enfin les poids de g_6 sont ceux de g_2 , puis les poids frontières de $g_4 g_3$

$$\begin{aligned} & \pm (2\bar{\omega}_i + \bar{\omega}_j), \quad \bar{\omega}_i + \bar{\omega}_j - \bar{\omega}_k - \bar{\omega}_l, \\ & \pm (\bar{\omega}_i + \bar{\omega}_j + \bar{\omega}_k + \bar{\omega}_l - \bar{\omega}_m), \quad \pm (\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j - 3\bar{\omega}_0), \end{aligned}$$

enfin les poids frontières de g_6

$$\begin{aligned} & \pm (\bar{\omega}_i + \bar{\omega}_j - 2\bar{\omega}_k), \quad \pm (2\bar{\omega}_i + 2\bar{\omega}_j + \bar{\omega}_k + \bar{\omega}_l), \\ & \pm (2\bar{\omega}_i + 2\bar{\omega}_j + \bar{\omega}_k - \bar{\omega}_l), \quad \pm (\bar{\omega}_i + \bar{\omega}_j + \bar{\omega}_k - 3\bar{\omega}_0). \end{aligned}$$

X. — POIDS FONDAMENTAUX DU TYPE E) ($l = 7$).

25. Dans ce cas les racines sont de la forme ⁽¹⁾

$$\begin{aligned} \omega_{ij} &= \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j, \quad \omega_{ijk} = \bar{\omega}_i + \bar{\omega}_j + \bar{\omega}_k, \quad \omega'_{ijk} = -(\bar{\omega}_i + \bar{\omega}_j + \bar{\omega}_k), \\ \omega_{00i} &= 2\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i, \quad \omega'_{00i} = -(2\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i) \\ & \quad (i, j, k = 1, 2, \dots, 7), \end{aligned}$$

où les 8 quantités $\bar{\omega}_0, \bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_7$ sont liées par la relation

$$2\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_1 + \dots + \bar{\omega}_7 = 0.$$

⁽¹⁾ C, p. 80 et 143.

Tout poids ϖ peut se mettre sous la forme

$$\varpi = m_1 \bar{\omega}_1 + m_2 \bar{\omega}_2 + \dots + m_7 \bar{\omega}_7.$$

On a

$$\begin{aligned} S_{ij} \varpi &= \varpi - (m_i - m_j) (\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j), \\ S_{ijk} \varpi &= \varpi + \left(\frac{1}{3} \Sigma m_\alpha - m_i - m_j - m_k \right) (\bar{\omega}_i + \bar{\omega}_j + \bar{\omega}_k), \\ S_{00i} \varpi &= \varpi + \left(\frac{1}{3} \Sigma m_\alpha - m_i \right) ({}_2 \bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i). \end{aligned}$$

Il résulte de là que les quantités $m_i - m_j$, $m_i + m_j$ sont entières. Donc ou bien les m_i sont tous entiers, leur somme étant un multiple de 3; ou bien les m_i sont tous des fractions de dénominateur 2 et de numérateur impair, la somme des numérateurs étant un multiple de 3.

Définissons le poids dominant comme précédemment. On aura d'abord

$$(1) \quad m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_7,$$

puis

$$(2) \quad m_1 \leq \frac{1}{3} \Sigma m_\alpha \leq m_3 + m_6 + m_7;$$

on tire d'ailleurs de ces inégalités la conclusion que m_6 est positif.

26. On trouve sans difficulté les différents poids homologues d'un poids donné ϖ . Abstraction faite de l'ordre, leurs coefficients sont donnés par le Tableau suivant :

$$\begin{aligned} 1^\circ & \left\{ \begin{array}{l} m_i, \quad m_j, \quad m_k, \quad m_l, \quad \frac{1}{3} \Sigma m_\alpha - m_s - m_t, \quad \frac{1}{3} \Sigma m_\alpha - m_l - m_r, \\ \frac{1}{3} \Sigma m_\alpha - m_r - m_s; \end{array} \right. \\ 2^\circ & \left\{ \begin{array}{l} m_i, \quad m_i + m_j - \frac{1}{3} \Sigma m_\alpha, \quad m_i + m_k - \frac{1}{3} \Sigma m_\alpha, \quad m_i + m_l - \frac{1}{3} \Sigma m_\alpha, \\ m_i + m_r - \frac{1}{3} \Sigma m_\alpha, \quad m_i + m_s - \frac{1}{3} \Sigma m_\alpha, \quad m_i + m_t - \frac{1}{3} \Sigma m_\alpha; \end{array} \right. \\ 3^\circ & \left\{ \begin{array}{l} m_i, \quad m_j, \quad m_i + m_j - \frac{1}{3} \Sigma m_\alpha, \quad \frac{1}{2} \Sigma m_\alpha - m_k - m_l, \\ \frac{1}{3} \Sigma m_\alpha - m_k - m_r, \quad \frac{1}{3} \Sigma m_\alpha - m_k - m_s, \quad \frac{1}{3} \Sigma m_\alpha - m_k - m_t; \end{array} \right. \\ 4^\circ & \left\{ \begin{array}{l} m_i, \quad m_i + m_j - \frac{1}{3} \Sigma m_\alpha, \quad m_i + m_k - \frac{1}{3} \Sigma m_\alpha, \quad m_i + m_l - \frac{1}{3} \Sigma m_\alpha, \\ \frac{1}{3} \Sigma m_\alpha - m_s - m_t, \quad \frac{1}{3} \Sigma m_\alpha - m_l - m_r, \quad \frac{1}{3} \Sigma m_\alpha - m_r - m_s, \end{array} \right. \end{aligned}$$

auquel il faut ajouter le Tableau formé des mêmes coefficients changés de signes.

Supposons alors que les coefficients m_i du poids π satisfassent aux inégalités (1). Il est facile de voir qu'aucun poids homologue de π n'est plus haut que π . S'il en était ainsi, en effet, on aurait une des inégalités

$$\begin{aligned} -m_7 &\geq m_1, \\ \frac{1}{3} \Sigma m_\alpha - m_i - m_j &\geq m_k, \\ m_1 + m_2 - \frac{1}{3} \Sigma m_\alpha &\geq m_3. \end{aligned}$$

La première inégalité entraînerait, d'après (1), les inégalités

$$m_6 + m_7 \leq m_1 + m_7 \leq 0, \quad m_1 \leq \frac{1}{3} \Sigma m_\alpha \leq m_3 + m_6 + m_7 \leq m_3;$$

on en déduirait

$$\begin{aligned} m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_5, \quad m_6 + m_7 = 0, \\ 3m_1 = 5m_1 = 0, \quad m_6 = m_7 = 0. \end{aligned}$$

La deuxième inégalité donnerait

$$m_i + m_j + m_k \leq \frac{1}{3} \Sigma m_\alpha \leq m_3 + m_6 + m_7 \leq m_i + m_j + m_k,$$

d'où

$$\frac{1}{3} \Sigma m_\alpha = m_i + m_j + m_k,$$

et l'inégalité se changerait en égalité.

La dernière inégalité, enfin, entraîne les valeurs

$$m_1 = m_2 = 2a, \quad m_3 = m_4 = m_5 = m_6 = m_7 = a,$$

et l'on vérifie directement, dans ce cas, que π est au moins aussi haut que tous les poids homologues.

Les inégalités (1) et (2) sont donc nécessaires et suffisantes pour que le poids π soit un poids dominant.

27. On trouve facilement les poids dominants suivants, rangés

par ordre de hauteur :

$$\Pi_1 = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3 + \bar{\omega}_4 + \bar{\omega}_5 + \bar{\omega}_6 = -\bar{\omega}_7 - 2\bar{\omega}_0;$$

$$\Pi_2 = \frac{3}{2}\bar{\omega}_1 + \frac{1}{2}\bar{\omega}_2 + \frac{1}{2}\bar{\omega}_3 + \frac{1}{2}\bar{\omega}_4 + \frac{1}{2}\bar{\omega}_5 + \frac{1}{2}\bar{\omega}_6 + \frac{1}{2}\bar{\omega}_7 = \bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_0;$$

$$\Pi_3 = \frac{3}{2}\bar{\omega}_1 + \frac{3}{2}\bar{\omega}_2 + \frac{3}{2}\bar{\omega}_3 + \frac{3}{2}\bar{\omega}_4 + \frac{3}{2}\bar{\omega}_5 + \frac{3}{2}\bar{\omega}_6 + \frac{3}{2}\bar{\omega}_7 = -3\bar{\omega}_0;$$

$$\Pi_4 = 2\bar{\omega}_1 + 2\bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3 + \bar{\omega}_4 + \bar{\omega}_5 + \bar{\omega}_6 + \bar{\omega}_7 = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 - 2\bar{\omega}_0;$$

$$\Pi_5 = 2\bar{\omega}_1 + 2\bar{\omega}_2 + 2\bar{\omega}_3 + 2\bar{\omega}_4 + 2\bar{\omega}_5 + \bar{\omega}_6 + \bar{\omega}_7 = -\bar{\omega}_6 - \bar{\omega}_7 - 4\bar{\omega}_0;$$

$$\Pi_6 = \frac{5}{2}\bar{\omega}_1 + \frac{5}{2}\bar{\omega}_2 + \frac{5}{2}\bar{\omega}_3 + \frac{3}{2}\bar{\omega}_4 + \frac{3}{2}\bar{\omega}_5 + \frac{3}{2}\bar{\omega}_6 + \frac{3}{2}\bar{\omega}_7 = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3 - 3\bar{\omega}_0;$$

$$\Pi_7 = 3\bar{\omega}_1 + 3\bar{\omega}_2 + 3\bar{\omega}_3 + 3\bar{\omega}_4 + 2\bar{\omega}_5 + 2\bar{\omega}_6 + 2\bar{\omega}_7 = 2\bar{\omega}_5 + 2\bar{\omega}_6 + 2\bar{\omega}_7 - 2\bar{\omega}_0.$$

Ce sont les poids fondamentaux, car tout poids dominant ϖ est de la forme

$$\varpi = p_1 \Pi_1 + p_2 \Pi_2 + \dots + p_7 \Pi_7,$$

avec les coefficients

$$p_1 = m_6 - m_7,$$

$$p_2 = m_1 - m_2,$$

$$p_3 = m_5 + m_6 + m_7 - \frac{1}{3} \Sigma m_\alpha,$$

$$p_4 = m_2 - m_3,$$

$$p_5 = m_5 - m_6,$$

$$p_6 = m_3 - m_4,$$

$$p_7 = m_4 - m_5.$$

28. Les poids du groupe g_1 sont 0 et les poids frontières homologues de Π_1

$$\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j, \quad \pm (\bar{\omega}_i + \bar{\omega}_j + \bar{\omega}_k), \quad \pm (2\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i).$$

Les poids de g_2 sont les poids frontières homologues de Π_2 :

$$\pm (\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_0), \quad \pm (\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i + \bar{\omega}_j).$$

Les poids de g_3 sont les poids homologues de Π_2 et les poids frontières homologues de Π_3 .

Les poids de g_4 sont 0, les poids homologues de Π_1 et les poids frontières homologues de Π_4 .

Les poids de g_5 sont 0, les poids homologues de Π_1 et de Π_1 , et les poids frontières homologues de Π_5 .

Les poids de g_6 sont les poids homologues de Π_2 , de Π_3 et de $\Pi_1 + \Pi_2$, et les poids frontières homologues de Π_6 .

Les poids de g_7 sont 0, les poids homologues de Π_1 , Π_4 , Π_5 , $2\Pi_1$, $\Pi_2 + \Pi_3$, $\Pi_1 + \Pi_4$, et les poids frontières homologues de Π_7 .

XI. — POIDS FONDAMENTAUX DU TYPE E) ($l = 8$).

29. Les racines sont ici ⁽¹⁾

$$\omega_{ij} = \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j, \quad \omega_{ijk} = \bar{\omega}_i + \bar{\omega}_j + \bar{\omega}_k, \quad \omega'_{ijk} = -(\bar{\omega}_i + \bar{\omega}_j + \bar{\omega}_k) \\ (i, j, k = 1, 2, \dots, 9)$$

avec la relation

$$\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \dots + \bar{\omega}_9 = 0.$$

Tout poids ϖ peut se mettre sous la forme

$$\varpi = m_1 \bar{\omega}_1 + m_2 \bar{\omega}_2 + \dots + m_9 \bar{\omega}_9,$$

les coefficients m_i étant assujettis à la relation

$$m_1 + m_2 + \dots + m_9 = 0.$$

On a ici

$$S_{ij} \varpi = \varpi - (m_i - m_j)(\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j), \\ S_{ijk} \varpi = \varpi - (m_i + m_j + m_k)(\bar{\omega}_i + \bar{\omega}_j + \bar{\omega}_k) + \frac{1}{3}(m_i + m_j + m_k) \Sigma \bar{\omega}_\alpha.$$

Les coefficients m_i ont des différences entières; ce sont des fractions ayant pour dénominateur 3 et des numérateurs congrus entre eux (mod 3).

Définissons le poids dominant comme dans le cas du type A). On devra avoir d'abord

$$m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_9;$$

on aura ensuite

$$m_1 + m_8 + m_9 \geq 0 \geq m_2 + m_3 + m_4.$$

On peut démontrer, comme dans les deux cas précédents, que les inégalités précédentes suffisent pour que le poids ϖ soit poids dominant.

30. Considérons les huit poids dominants suivants, rangés par

(¹) C, p. 80.

ordre de hauteur :

$$\begin{aligned}
 \Pi_1 &= \bar{\omega}_1 && - \bar{\omega}_9 \\
 \Pi_2 &= \frac{5}{3} \bar{\omega}_1 + \frac{2}{3} \bar{\omega}_2 - \frac{1}{3} \bar{\omega}_3 - \frac{1}{3} \bar{\omega}_4 - \frac{1}{3} \bar{\omega}_5 - \frac{1}{3} \bar{\omega}_6 - \frac{1}{3} \bar{\omega}_7 - \frac{1}{3} \bar{\omega}_8 - \frac{1}{3} \bar{\omega}_9 = 2 \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2, \\
 \Pi_3 &= 2 \bar{\omega}_1 && - \bar{\omega}_8 - \bar{\omega}_9, \\
 \Pi_4 &= \frac{8}{3} \bar{\omega}_1 - \frac{1}{3} \bar{\omega}_2 - \frac{1}{3} \bar{\omega}_3 - \frac{1}{3} \bar{\omega}_4 - \frac{1}{3} \bar{\omega}_5 - \frac{1}{3} \bar{\omega}_6 - \frac{1}{3} \bar{\omega}_7 - \frac{1}{3} \bar{\omega}_8 - \frac{1}{3} \bar{\omega}_9 = 3 \bar{\omega}_1, \\
 \Pi_5 &= 3 \bar{\omega}_1 && - \bar{\omega}_7 - \bar{\omega}_8 - \bar{\omega}_9, \\
 \Pi_6 &= \frac{10}{3} \bar{\omega}_1 + \frac{1}{3} \bar{\omega}_2 + \frac{1}{3} \bar{\omega}_3 - \frac{2}{3} \bar{\omega}_4 - \frac{2}{3} \bar{\omega}_5 - \frac{2}{3} \bar{\omega}_6 - \frac{2}{3} \bar{\omega}_7 - \frac{2}{3} \bar{\omega}_8 - \frac{2}{3} \bar{\omega}_9 = 4 \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3, \\
 \Pi_7 &= 4 \bar{\omega}_1 && - \bar{\omega}_6 - \bar{\omega}_7 - \bar{\omega}_8 - \bar{\omega}_9, \\
 \Pi_8 &= 5 \bar{\omega}_1 && - \bar{\omega}_5 - \bar{\omega}_6 - \bar{\omega}_7 - \bar{\omega}_8 - \bar{\omega}_9.
 \end{aligned}$$

Ce sont les poids fondamentaux, car tout autre poids dominant ϖ peut se mettre sous la forme

$$\varpi = p_1 \Pi_1 + p_2 \Pi_2 + \dots + p_8 \Pi_8$$

avec les coefficients entiers non négatifs

$$\begin{aligned}
 p_1 &= m_8 - m_9, \\
 p_2 &= m_2 - m_3, \\
 p_3 &= m_7 - m_8, \\
 p_4 &= -m_2 - m_3 - m_4, \\
 p_5 &= m_6 - m_7, \\
 p_6 &= m_3 - m_4, \\
 p_7 &= m_5 - m_6, \\
 p_8 &= m_4 - m_5.
 \end{aligned}$$

31. Les poids du groupe g_1 sont 0 et les racines $\bar{\omega}_{ij}$, $\pm \bar{\omega}_{ijk}$.

Les poids du groupe g_2 sont 0 et les poids homologues de Π_1 et Π_2 .

Les poids du groupe g_3 sont 0 et les poids homologues de Π_1 , Π_2 et Π_3 .

Les poids du groupe g_4 sont 0 et les poids homologues de Π_1 , Π_2 , Π_3 et Π_4 .

Les poids du groupe g_5 sont 0 et les poids homologues de Π_1 , Π_2 , Π_3 , Π_4 , $2\Pi_1$, $\Pi_1 + \Pi_2$ et Π_5 .

Les poids du groupe g_6 sont 0 et les poids homologues de Π_1 , Π_2 , Π_3 , Π_4 , $2\Pi_1$, $\Pi_1 + \Pi_2$, Π_5 et Π_6 .

Les poids du groupe g_7 sont 0 et les poids homologues de Π_1 , Π_2 , Π_3 , Π_4 , $2\Pi_1$, $\Pi_1 + \Pi_2$, Π_5 , $\Pi_1 + \Pi_3$, Π_6 , $2\Pi_2$, $\Pi_1 + \Pi_4$, $\Pi_2 + \Pi_3$ et Π_7 .

Les poids du groupe g_8 sont 0 et les poids homologues de Π_1 , Π_2 , Π_3 , Π_4 , $2\Pi_1$, $\Pi_1 + \Pi_2$, Π_5 , $\Pi_1 + \Pi_3$, $3\Pi_1$, Π_6 , $2\Pi_2$, $\Pi_1 + \Pi_4$, $\Pi_2 + \Pi_3$, $2\Pi_1 + \Pi_2$, Π_7 , $\Pi_1 + \Pi_5$, $2\Pi_3$, $\Pi_2 + \Pi_4$, $\Pi_1 + \Pi_6$, $\Pi_3 + \Pi_4$, $\Pi_2 + \Pi_5$ et Π_8 .

XII. — POIDS FONDAMENTAUX DU TYPE F).

32. Ici les racines sont ⁽¹⁾

$$\pm \omega_i, \quad \pm \omega_i \pm \omega_j, \quad \frac{\pm \omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3 \pm \omega_4}{2} \quad (i, j = 1, 2, 3, 4).$$

Le rang du groupe est 4 et son ordre est 52.

Tout poids ϖ est de la forme

$$\varpi = m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 + m_3 \omega_3 + m_4 \omega_4.$$

Les substitutions $S\varpi$ correspondant aux racines $\pm \omega_i$, $\pm \omega_i \pm \omega_j$, $\frac{\pm \omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3 \pm \omega_4}{2}$ sont respectivement

$$S\varpi = \varpi - 2m_i \omega_i,$$

$$S\varpi = \varpi - (\pm m_i \pm m_j)(\pm \omega_i \pm \omega_j),$$

$$S\varpi = \varpi - (\pm m_1 \pm m_2 \pm m_3 \pm m_4) \frac{\pm \omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3 \pm \omega_4}{2}.$$

Il résulte de là que les m_i sont ou tous des entiers ou tous des fractions de dénominateur 2 et de numérateur impair.

Convenons de dire que le poids ϖ est plus haut que le poids ϖ' si la première des différences

$$m_1 - m'_1, \quad m_2 - m'_2, \quad m_3 - m'_3, \quad m_4 - m'_4$$

qui ne s'annule pas est positive. Les coefficients m_i de tout poids dominant sont alors positifs ou nuls et rangés par ordre de grandeur décroissante :

$$m_1 \geq m_2 \geq m_3 \geq m_4 \geq 0.$$

⁽¹⁾ C, p. 80.

De plus on doit avoir

$$m_1 \geq m_2 + m_3 + m_4.$$

Réciproquement, si ces conditions sont réalisées, tous les poids qu'on déduit de ϖ par des substitutions S répétées ne sont pas plus hauts que ϖ .

33. On trouve facilement les quatre poids dominants suivants rangés par ordre de hauteur :

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= \omega_1, \\ \Pi_2 &= \omega_1 + \omega_2, \\ \Pi_3 &= \frac{3\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4}{2}, \\ \Pi_4 &= 2\omega_1 + \omega_2 + \omega_3.\end{aligned}$$

Ce sont les poids fondamentaux, car tout poids dominant est de la forme

$$\varpi = p_1 \Pi_1 + p_2 \Pi_2 + p_3 \Pi_3 + p_4 \Pi_4,$$

où les coefficients non négatifs p_1, p_2, p_3, p_4 ont les valeurs

$$\begin{aligned}p_1 &= m_1 - m_2 - m_3 - m_4, \\ p_2 &= m_2 - m_3, \\ p_3 &= 2m_4, \\ p_4 &= m_3 - m_4.\end{aligned}$$

Les poids du groupe g_1 sont 0 et les poids frontières homologues de ω_1 .

Les poids du groupe g_2 sont 0, les poids frontières de g_1 homologues de ω_1 et les poids frontières homologues de $\omega_1 + \omega_2$.

Les poids du groupe g_3 sont 0, les poids frontières de g_1 homologues de ω_1 , ceux de g_2 homologues de $\omega_1 + \omega_2$, enfin les poids frontières homologues de $\frac{3\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4}{2}$.

Les poids du groupe g_4 sont 0, les poids frontières de g_1 homologues de ω_1 , ceux de g_2 homologues de $\omega_1 + \omega_2$, ceux de g_3 homologues de $\frac{3\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4}{2}$, ceux de g_1^2 homologues de $2\omega_1$, ceux de $g_1 g_2$ homologues de $2\omega_1 + \omega_2$, enfin les poids frontières homologues de $2\omega_1 + \omega_2 + \omega_3$.

XIII. — POIDS FONDAMENTAUX DU TYPE G).

34. Ici les racines sont de la forme ⁽¹⁾

$$\pm \omega_i, \quad \omega_{ij} = \omega_i - \omega_j \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

où les trois racines $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ sont liées par la relation

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0.$$

Le rang du groupe est 2 et son ordre est 14.

Tout poids ϖ est de la forme

$$\varpi = m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 + m_3 \omega_3,$$

où l'on peut supposer les coefficients liés par la relation

$$m_1 + m_2 + m_3 = 0.$$

On a ici

$$\begin{aligned} S_1 \varpi &= \varpi - 3m_1 \omega_1 \\ &= \varpi - 2m_1 \omega_1 + m_1 \omega_2 + m_1 \omega_3 = -m_1 \omega_1 - m_3 \omega_2 - m_2 \omega_3, \end{aligned}$$

$$S_{12} \varpi = \varpi - (m_1 - m_2)(\omega_1 - \omega_2) = m_2 \omega_1 + m_1 \omega_2 + m_3 \omega_3.$$

Il résulte de là que les coefficients m_i sont des fractions de dénominateur 3 et dont tous les numérateurs sont congrus (mod 3).

Définissons la hauteur relative de deux poids comme dans les cas précédents. Si ϖ est un poids dominant, on aura

$$m_1 \geq m_2 \geq m_3,$$

puis

$$m_1 \geq -m_3 \quad \text{ou} \quad m_2 \leq 0.$$

Réciproquement, si l'on a

$$m_1 \geq m_2 \geq m_3, \quad m_2 \leq 0,$$

les poids homologues de ϖ ne sont pas plus hauts que ϖ , et ϖ est un poids dominant.

35. On trouve facilement les deux poids dominants suivants

(¹) C, p. 80 et 81.

rangés par ordre de hauteur :

$$\Pi_1 = \frac{2}{3} \omega_1 - \frac{1}{3} \omega_2 - \frac{1}{3} \omega_3 = \omega_1,$$

$$\Pi_2 = \omega_1 - \omega_3.$$

Ce sont les poids fondamentaux, car tout poids dominant est de la forme

$$\varpi = p_1 \Pi_1 + p_2 \Pi_2,$$

avec

$$p_1 = -3m_3,$$

$$p_2 = m_2 - m_3.$$

Les poids du groupe g_1 sont 0 et les poids frontières $\pm \omega_i$ homologues de ω_1 .

Les poids du groupe g_2 sont 0, les poids frontières de g_1 et les poids frontières $\omega_i - \omega_j$.

XIV. — GROUPES LINÉAIRES FONDAMENTAUX DU TYPE A).

36. Il existe d'abord un groupe linéaire correspondant au poids fondamental Π_1 ; soit x_i une variable correspondant au poids $-\overline{\omega}_i$. Il suffit de prendre ⁽¹⁾

$$X_{ij} = x_j \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (i, j = 1, 2, \dots, l+1),$$

et par suite

$$X_{ii} - X_{jj} = x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} - x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Le groupe g_1 est donc le groupe linéaire et homogène spécial à $l+1$ variables.

On forme facilement les autres groupes fondamentaux. Le groupe g_2 est en effet celui qui indique comment le groupe g_1 transforme les C_{l+1}^2 , formes bilinéaires alternées $[x_i x_j]$ (coordonnées plückériennes de la droite), le groupe g_3 , celui qui indique comment g_1 transforme les C_{l+1}^3 , formes trilinéaires $[x_i x_j x_k]$ (coordonnées plückériennes d'une multiplicité plane à deux dimensions), et ainsi de suite.

⁽¹⁾ C, p. 140.

Par suite, tout groupe linéaire du type (Λ) qui ne laisse invariante aucune multiplicité plane indique comment g_1 transforme entre elles l'expression

$$x_1^{p_1} [x_1 x_2]^{p_2} [x_1 x_2 x_3]^{p_3} \dots [x_1 x_2 \dots x_l]^{p_l}$$

et celles qui s'en déduisent par les transformations de g_1 . Toutes ces expressions sont des combinaisons linéaires d'expressions de la forme

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_{l+1}^{\alpha_{l+1}} [x_1 x_2]^{\alpha_{12}} \dots [x_l x_{l+1}]^{\alpha_{l,l+1}} \dots [x_1 x_2 \dots x_l]^{\alpha_{12\dots l}},$$

où les exposants α_i , α_{ij} , etc., sont liés par les relations

$$\Sigma \alpha_i = p_1, \quad \Sigma \alpha_{ij} = p_2, \quad \Sigma \alpha_{ijk} = p_3, \quad \dots$$

Par exemple, si l'on prend $p_1 = 2$, $p_2 = p_3 = \dots = p_l = 0$, on aura le groupe qui indique comment les expressions x_i^2 , $x_i x_j$, sont transformées entre elles par le groupe linéaire de $l+1$ variables. C'est encore le groupe qui indique comment le groupe linéaire transforme les coefficients A_{ij} de la forme quadratique $\Sigma A_{ij} x_i x_j$.

XV. — GROUPES FONDAMENTAUX DU TYPE B).

37. Le groupe g_1 , s'il existe, est ici à 2^l variables, car le poids dominant

$$\Pi_1 = \frac{\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_l}{2}$$

a pour homologues les poids $\frac{\pm \omega_1 \pm \omega_2 \pm \dots \pm \omega_l}{2}$ et il ne peut y avoir dans le groupe g_1 que ces 2^l poids, tous frontières.

On obtient facilement un groupe admettant les poids précédents en considérant les variables $x_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_l}$, où les indices ε sont égaux à ± 1 . Posons alors

$$\begin{aligned} X_i &= \sum \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{i-1} x_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{i-1}} \alpha_i \varepsilon_{i+1} \dots \varepsilon_l \frac{\partial f}{\partial x_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{i-1} \dots \alpha_i \varepsilon_{i+1} \dots \varepsilon_l}}, \\ X_{ij} &= \sum \varepsilon_{i+1} \dots \varepsilon_{j-1} x_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{i-1} \alpha_i \varepsilon_{i+1} \dots \varepsilon_{j-1} \alpha_j \varepsilon_{j+1} \dots \varepsilon_l} \frac{\partial f}{\partial x_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{i-1} \dots \alpha_i \varepsilon_{i+1} \dots \varepsilon_{j-1} \dots \alpha_j \varepsilon_{j+1} \dots \varepsilon_l}}, \\ Y_i &= \alpha_i \sum \varepsilon_i x_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_l} \frac{\partial f}{\partial x_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_l}} \\ (i, j &= \pm 1, \pm 2, \pm l; \alpha_i = +1 \text{ si } i > 0; \alpha_i = -1 \text{ si } i < 0). \end{aligned}$$

Ces transformations engendrent un groupe simple du type B). C'est le groupe g_1 .

Le groupe g_2 est bien connu : c'est le groupe linéaire d'une forme quadratique ⁽¹⁾

$$x_0^2 + x_1 x_{-1} + \dots + x_l x_{-l},$$

les variables x_0, x_i, x_{-i} étant respectivement de poids 0, $\omega_i, -\omega_i$.

Le groupe g_3 de poids dominant $\omega_1 + \omega_2$ est le groupe qui indique comment g_2 transforme les formes bilinéaires $[x_i x_k]$. Le groupe ainsi défini admet en effet les mêmes poids que le groupe g_3 ; d'autre part, il ne laisse invariante aucune multiplicité plane, car il n'y a qu'une variable de poids donné, exception faite pour le poids 0 auquel correspondent les l variables $[x_1 x_{-1}]$, $[x_2 x_{-2}]$, ..., $[x_l x_{-l}]$. Toute multiplicité plane invariante serait donc définie par des relations de la forme

$$a_1 [x_1 x_{-1}] + a_2 [x_2 x_{-2}] + \dots + a_l [x_l x_{-l}] = 0;$$

mais l'échange de x_i et x_{-i} n'altérant pas la forme quadratique $x_0^2 + \sum x_i x_{-i}$, de la relation écrite doit découler l'existence de 2^l relations obtenues en changeant d'une manière quelconque les signes des coefficients : or, cela est impossible. Le groupe g_3 est à C_{2l+1}^2 variables : c'est le groupe *adjoint*.

On démontre de même que le groupe g_4 de poids dominant $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ est celui qui indique comment g_2 transforme les formes trilinéaires $[x_i x_j x_k]$; il est à C_{2l+1}^3 variables.

Enfin le groupe g_l indique comment g_2 transforme les formes $[x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{l-1}}]$; il est à C_{2l+1}^{l-1} variables.

38. Les groupes fondamentaux, à l'exception de g_1 , sont ainsi tous engendrés simplement au moyen de g_2 . Il y a d'ailleurs une relation simple entre les deux groupes g_1 et g_2 . Considérons en effet le système de 2^l équations linéaires

$$x_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_l} x_0 + \varepsilon_1 x_{-\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_l} x_{-1} + \dots \\ + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_l x_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{l-1}, -\varepsilon_l, \varepsilon_{l+1}, \dots, \varepsilon_n} x_{l\varepsilon_1} + \dots + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_l x_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{l-1}, -\varepsilon_l} x_{lz_l} = 0$$

avec les $2l$ paramètres $x_0, x_{\pm 1}, \dots, x_{\pm l}$. Ces équations définissent

(1) C, p. 140.

une famille de multiplicités planes de l'espace à $2l-1$ dimensions. Le groupe g_1 échange entre elles ces multiplicités, et l'on a en particulier

$$X_i = x_i \left(2x_0 \frac{\partial f}{\partial x_{-i}} - x_i \frac{\partial f}{\partial x_0} \right);$$

on obtient ainsi un groupe linéaire qui laisse invariante la forme quadratique

$$x_0^2 + x_1 x_{-1} + x_2 x_{-2} + \dots + x_l x_{-l}$$

et qui n'est autre que le groupe g_2 .

Réciproquement, le groupe g_1 peut être déduit du groupe g_2 comme étant le groupe qui indique comment g_2 transforme entre elles certaines multiplicités planes de l'espace à $2l$ dimensions : *ces multiplicités planes sont d'ailleurs contenues dans la quadrique*

$$x_0^2 + x_1 x_{-1} + \dots + x_l x_{-l} = 0.$$

En définitive, *on peut engendrer tous les groupes fondamentaux au moyen du premier groupe g_1 .*

39. On peut d'ailleurs indiquer une génération encore plus directe des groupes fondamentaux au moyen de g_1 . Considérons, en effet, d'abord le groupe g_l . Ses poids frontières sont les homologues de $\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{l-1}$. Considérons, d'autre part, le groupe qui indique comment g_1 transforme les différentes formes bilinéaires $[x_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l} x_{\tau_1, \dots, \tau_l}]$; il a les mêmes poids frontières que g_l ; en particulier la variable $[x_{11, \dots, 11} x_{11, \dots, 11}']$ a le poids frontière $\omega_1 + \dots + \omega_{l-1}$. *Le groupe g_l s'obtient donc en appliquant à la quantité $[x_{11, \dots, 11} x_{11, \dots, 11}']$ les différentes transformations de g_1 un nombre quelconque de fois : il indique comment g_1 transforme les différentes quantités ainsi obtenues.*

D'une manière générale, les poids frontières de $g_{l-\alpha}$ ($\alpha=1, \dots, l-1$) appartiennent, soit aux poids de g_1^2 , soit aux poids de g_l . Cherchons à déterminer une combinaison linéaire des variables de g_1^2 (ou des variables de g_l) qui soit de poids $\omega_1 + \dots + \omega_{l-\alpha-1}$, et telle que les différentes transformations du groupe g_1^2 (ou g_l) appliquées à cette combinaison linéaire de variables, ne donnent que des quantités dont le poids appartienne à $g_{l-\alpha}$; il suffira pour

cela qu'il en soit ainsi des transformations $X_{l-\alpha}, \dots, X_l$. S'il en est ainsi, la quantité considérée et celles qu'on en déduira seront des variables transformées par un groupe qui ne sera autre que $g_{l-\alpha}$.

On arrive ainsi au résultat suivant :

Si α est de la forme $4n+2$ ou $4n+3$, le groupe $g_{l-\alpha}$ est celui qui indique comment g_1 transforme linéairement entre elles la forme quadratique

$$\sum \varepsilon_{l-\alpha} \varepsilon_{l-\alpha+2} \dots x_{11} \dots 1, \varepsilon_{l-\alpha} \varepsilon_{l-\alpha+1} \dots \varepsilon_l x_{11} \dots 1 \varepsilon'_{l-\alpha} \dots \varepsilon'_l$$

et celles qu'on en déduit en lui appliquant les transformations de g_1 .

Si α est de la forme $4n$ ou $4n+1$, le groupe $g_{l-\alpha}$ est celui qui indique comment g_1 transforme linéairement entre elles la forme bilinéaire alternée

$$\sum \varepsilon_{l-\alpha} \varepsilon_{l-\alpha+2} \dots [x_{11} \dots 1 \varepsilon_{l-\alpha} \varepsilon_{l-\alpha+1} \dots \varepsilon_l x_{11} \dots 1 \varepsilon'_{l-\alpha} \varepsilon'_{l-\alpha+1} \dots \varepsilon'_l]$$

et celles qu'on en déduit en lui appliquant les transformations de g_1 .

XVI. — GROUPES FONDAMENTAUX DU TYPE C).

40. Ici nous avons le groupe fondamental g_1 en considérant ⁽¹⁾ le groupe linéaire et homogène à $2l$ variables

$$x_{\mp 1}, \dots, x_{\pm l}$$

qui laisse invariante la forme bilinéaire alternée

$$[x_1 x_{-1}] + [x_2 x_{-2}] + \dots + [x_l x_{-l}].$$

Les variables $x_{\pm i}$ ont les poids $\pm \omega_i$.

On obtiendra le groupe g_2 en partant de la forme bilinéaire alternée $[x_1 x_2]$ de poids Π_2 , et lui appliquant les transformations de g_1 . Le groupe g_2 indique comment g_1 transforme linéairement entre elles les quantités ainsi obtenues. Chaque poids frontière correspond à une variable; il n'y a de doute que pour le poids 0, qui correspondra à des variables, combinaisons linéaires des

⁽¹⁾ C, p. 141.

expressions $[x_1 x_{-1}], \dots, [x_l x_{-l}]$. Le nombre des variables de poids 0 sera ainsi au plus égal à $l - 1$, car l'expression

$$[x_1 x_{-1}] + \dots + [x_l x_{-l}]$$

est invariante par le groupe g_1 . Si alors

$$a_1[x_1 x_{-1}] + a_2[x_2 x_{-2}] + \dots + a_l[x_l x_{-l}]$$

est une de ces variables, les a_i ne sont pas tous égaux, par exemple $a_1 \neq a_2$; par raison de symétrie, la quantité

$$a_2[x_1 x_{-1}] + a_1[x_2 x_{-2}] + \dots + a_l[x_l x_{-l}]$$

est encore une de ces variables et par suite aussi la différence

$$[x_1 x_{-1}] - [x_2 x_{-2}]$$

et les différences homologues

$$[x_i x_{-i}] - [x_j x_{-j}].$$

Donc il y a $l - 1$ variables de poids 0, et le groupe g_2 est un groupe à $C_{2l}^2 - 1 = l(2l - 1) - 1$ variables.

On obtiendra d'une manière analogue les autres groupes fondamentaux. Le groupe g_α est celui qui indique comment g_1 transforme linéairement entre elles la forme alternée

$$[x_1 x_2 \dots x_\alpha]$$

et celles qu'on en déduit par les transformations de g_1 .

Le nombre des variables de g_α dont le poids est poids frontière de $g_{\alpha-2}$ est égal à $l - 1$; le nombre de celles dont le poids est poids frontière de $g_{\alpha-4}$ est $C_l^2 - 1$; d'une manière générale il y a $C_l^\beta - 1$ variable dont le poids est le poids frontière de $g_{\alpha-2\beta}$. On peut ainsi calculer le nombre total des variables de g_α .

Ici le groupe adjoint n'est pas un groupe fondamental. C'est en effet le groupe g_1^2 qui a trois couches de poids : les poids frontières correspondant chacun à une variable; les poids frontières de g_2 correspondant chacun à une seule variable; enfin le poids 0 qui correspond à l variables. Ce groupe g_1^2 est celui qui indique comment g_1 transforme linéairement entre elles les quantités $x_i x_k$

$$(i, k = \pm 1, \dots, \pm l).$$

XVII. — GROUPES FONDAMENTAUX DU TYPE D).

41. Les résultats sont ici tout à fait analogues à ceux du type B). Le groupe fondamental g_1 est à 2^{l-1} variables qu'on peut noter

$$x_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_l},$$

où les ε_i sont égaux à ± 1 et ont un produit égal à -1 . Les transformations de g_1 sont

$$X_{ij} = \Sigma_{\varepsilon_{i+1} \dots \varepsilon_{j-1}} x_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{i-1} \alpha_i \varepsilon_{i+1} \dots \varepsilon_{j-1} \alpha_j \varepsilon_{j+1} \dots \varepsilon_l} \frac{\partial f}{\partial x_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_i \alpha'_i \varepsilon_{i+1} \dots \varepsilon_{j-1} \alpha'_j \varepsilon_{j+1} \dots \varepsilon_l}} \\ (i, j = \pm 1, \dots, \pm l; \alpha_i = 1 \quad \text{si } i > 0; \alpha_i = -1 \quad \text{si } i < 0; \alpha'_i = -\alpha_i).$$

Le groupe fondamental g_2 est au fond identique à g_1 ; il est à 2^{l-1} variables qu'on peut noter

$$y_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_l},$$

où les ε_i , égaux à ± 1 , ont un produit égal à $+1$. Les transformations de g_2 sont données par les mêmes formules que celles de g_1 .

Le groupe fondamental g_3 est le groupe ⁽¹⁾ de la forme quadratique

$$x_1 x_{-1} + x_2 x_{-2} + \dots + x_l x_{-l}.$$

Quant aux groupes fondamentaux $g_4, g_5, \dots, g_l$, ils indiquent respectivement comment g_1 transforme linéairement entre elles les quantités

$$[x_1 x_2], [x_1 x_2 x_3], \dots, [x_1 x_2 \dots x_{l-2}]$$

et celles qu'on en déduit par les transformations de g_1 . Ils sont respectivement à $C_{2^l}^2, C_{2^l}^3, \dots, C_{2^l}^{l-2}$ variables.

Il y a ici aussi des relations remarquables entre les groupes g_1, g_2 et les autres groupes fondamentaux. Elles sont tout à fait analogues aux relations indiquées dans le cas du type B).

42. Le cas de $l = 3$ est intéressant, parce que les groupes du type D) sont isomorphes aux groupes du type A). Les groupes fondamentaux du type A) sont respectivement à un nombre de variables égal à

$$l+1 = 4, \quad C_{l+1}^2 = 6, \quad C_{l+1}^3 = 4;$$

⁽¹⁾ C, p. 141.

les groupes fondamentaux du type D) sont respectivement à un nombre de variables égal à

$$2^{l-1} = 4, \quad -2^{l-1} = 4, \quad C_{2l}^1 = 6.$$

On retrouve naturellement les mêmes nombres de variables, rangés dans un autre ordre. En particulier les deux groupes fondamentaux d'ordre 6 sont pour le type A), le groupe projectif des droites de l'espace, pour le type D) le groupe projectif d'une quadrique de l'espace à 5 dimensions : on sait en effet que ces deux groupes sont semblables.

XVIII. — GROUPES FONDAMENTAUX DU TYPE E) ($l = 6$).

43. Le groupe g_4 est un groupe à 27 variables que j'ai indiqué dans ma Thèse ⁽¹⁾. Les variables x_i, y_i, z_{ik} ont pour poids $-\bar{\omega}_i - 2\bar{\omega}_0, -\bar{\omega}_i + \bar{\omega}_0, \bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i + \bar{\omega}_k$.

Le groupe g_4 s'engendre facilement au moyen du précédent en partant de l'expression $[x_5 x_6]$ et lui appliquant les différentes transformations de g_1 . Les poids des différentes variables sont les poids frontières de g_4 et ceux de g_3 . Au poids dominant $\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_0$ de g_3 peuvent appartenir un certain nombre de variables, combinaisons linéaires des cinq expressions $[x_i z_{1i}]$: on vérifie facilement que toutes ces expressions entrent comme variables. Par suite le groupe g_4 est celui qui indique comment g_1 transforme les droites de l'espace à 26 dimensions. Le nombre des variables de g_4 est $\frac{27 \times 26}{2} = 351$.

Le groupe g_3 est dualistique de g_1 et par suite à 27 variables. Mais il peut aussi se déduire de la manière suivante de g_1 . Considérons le groupe g_1^2 qui transforme entre elles la quantité x_6^2 et celles qui s'en déduisent par les transformations de g_1 . Les poids frontières de g_3 sont des poids de g_1^2 . Considérons alors l'expression

$$u = x_2 z_{12} + x_3 z_{13} + \dots + x_6 z_{16}$$

qui est de poids $\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_0 = \Pi_3$. Elle est invariante par les transformations X_{ijk}, X'_{ijk} ; par suite le groupe qui exprime comment g_1 transforme linéairement l'expression u et celles qui

(1) C, p. 142.

s'en déduisent par les transformations de g_1 , admet Π_3 comme poids frontière. C'est donc le groupe g_3 . Remarquons d'ailleurs que u n'est autre chose que la dérivée partielle par rapport à y_i de la forme cubique (1)

$$J = \sum x_i y_k z_{ki} + \sum z_{\lambda\mu} z_{\nu\sigma} z_{\sigma\tau}$$

invariante par le groupe g_1 . Les différentes variables de g_3 sont donc les 27 dérivées partielles de la forme J .

Le groupe g_5 est le groupe dualistique de g_1 ; il est donc à 351 variables.

Le groupe g_6 est le groupe qui indique comment g_2 transforme l'expression $[x_1 x_3 x_6]$ et celles qui s'en déduisent par les transformations de g_1 . Or la transformation X'_{123} appliquée à $[x_1 x_3 x_6]$ donne

$$[x_4 x_5 z_{45}] + [x_1 x_6 z_{46}] + [x_3 x_6 z_{56}];$$

en posant $[x_i x_j x_{ij}] = u_{ij} = u_{ji}$, on en déduit que le groupe g_6 contient les variables $u_{ij} + u_{jk} + u_{ki}$, d'où l'on conclut facilement qu'il contient toutes les variables u_{ij} de poids $-3\overline{\omega}_0 = \Pi_2$. De ces variables on déduit par les transformations X_{ij} toutes les expressions trilinéaires possibles de poids $\Pi_1 + \Pi_3$. Par conséquent le groupe g_6 est le groupe qui indique comment g_1 transforme les plans (à 2 dimensions) de l'espace à 26 dimensions; il est à $\frac{27 \times 26 \times 25}{1 \times 2 \times 3} = 2925$ variables.

Reste le groupe g_2 : c'est le groupe adjoint à 78 variables. On peut l'engendrer au moyen du groupe $g_1 g_3$, c'est-à-dire en somme au moyen de g_1 . On considère pour cela la forme

$$\sum_{i,k} \overline{x_i x_k} z_{ik}$$

avec deux séries de 27 variables supposées transformées chacune par le groupe g_1 . Le groupe g_2 indique comment g_1 transforme linéairement la forme $\sum \overline{x_i x_k} z_{ik}$ et celles qu'on en déduit par les transformations de g_1 . La variable $\sum \overline{x_i x_k} z_{ik}$ de ce groupe est de poids $\Pi_2 = -3\overline{\omega}_0$.

(1) C, p. 143.

XIX. — GROUPES FONDAMENTAUX DU TYPE E) ($l = 7$).

44. Le groupe fondamental g_2 est le groupe à 56 variables que j'ai indiqué dans ma Thèse ⁽¹⁾. Les variables

$$x_i, \quad y_i, \quad x_{ik}, \quad y_{ik}$$

sont respectivement de poids

$$\bar{\omega}_0 - \bar{\omega}_i, \quad \bar{\omega}_i - \bar{\omega}_0, \quad \bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i + \bar{\omega}_k, \quad -(\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_i + \bar{\omega}_k).$$

Le groupe fondamental g_4 est celui qui indique comment g_2 transforme entre elles l'expression $[y_1 y_2]$ et celles qui s'en déduisent par les transformations de g_2 . On trouve facilement que toutes les expressions $[uv]$ formées avec deux des 56 variables de g_2 entrent comme variables de g_4 , exception faite pour les $[y_i x_i]$ et $[x_{ik} y_{ik}]$ qui n'entrent que par leurs différences. Le groupe g_4 est donc à $\frac{56 \times 55}{2} - 1 = 1539$ variables.

Le groupe fondamental g_6 est celui qui indique comment g_2 transforme entre elles l'expression $[y_1 y_2 y_3]$ et celles qui s'en déduisent par les transformations de g_2 . Au poids $\Pi_1 + \Pi_2$ appartiennent les cinq variables $[y_1 y_i y_{i7}]$; au poids Π_3 appartiennent les 21 variables $[y_i y_k y_{ik}]$, au poids Π_2 appartiennent 56 variables à saisir les différences mutuelles des 27 quantités $[y_1 y_i x_i]$, $[y_1 x_{ii} y_{ii}]$ et $[y_1 x_{ik} y_{ik}]$, et ensuite les quantités $[y_i x_{ij} y_{ij}]$. En résumé, le groupe g_6 a $C_{56}^3 - 56 = 27\,664$ variables.

Le groupe g_4 est le groupe adjoint à 133 variables. On peut l'engendrer au moyen du groupe g_2 . Il indique en effet comment g_2 transforme entre elles la forme quadratique $\Sigma y_i y_{i7}$ et celles qui s'en déduisent par les transformations de g_2 .

Le groupe g_3 est celui qui indique comment g_2 transforme la forme $\Sigma \overline{y_i y_j y_{ij}}$ de poids Π_3 et celles qui s'en déduisent par les transformations de g_2 .

Le groupe g_5 peut s'engendrer au moyen du groupe adjoint g_4 . Si l'on appelle e'_{007} la variable $\Sigma y_i y_{i7}$ de poids Π_1 le groupe g_5 indique comment g_4 transforme $[e'_{006} e'_{007}]$ et les quantités qui s'en déduisent par les transformations de g_4 .

Enfin le groupe g_7 indique comment g_2 transforme

(1) C, p. 143.

$[e'_{005}e'_{006}e'_{007}]$ et les quantités qui s'en déduisent par les transformations de g_1 .

On peut aussi engendrer les groupes g_5 et g_7 au moyen des variables de g_2 .

XX. — GROUPES FONDAMENTAUX DU TYPE E) ($l = 8$).

43. Le groupe g_1 est le groupe adjoint à 248 variables e_{ik} , e_{ijk} , e'_{ijk} .

Le groupe g_3 est le groupe qui indique comment g_1 transforme l'expression $[e_{18}e_{19}]$ et celles qui s'en déduisent par les transformations de g_1 .

Le groupe g_5 est celui qui indique comment g_2 transforme l'expression $[e_{17}e_{18}e_{19}]$ et celles qui s'en déduisent par les transformations de g_1 .

Le groupe g_7 est celui qui indique comment g_1 transforme l'expression $[e_{16}e_{17}e_{18}e_{19}]$ et celles qui s'en déduisent par les transformations de g_1 .

Le groupe g_8 est celui qui indique comment g_1 transforme l'expression $[e_{15}e_{16}e_{17}e_{18}e_{19}]$ et celles qui s'en déduisent par les transformations de g_1 .

Le groupe g_2 peut aussi s'engendrer au moyen de g_1 . C'est le groupe qui indique comment g_1 transforme la forme quadratique $\Sigma e_{1i}e_{12i}$ de poids Π_2 et celles qui s'en déduisent par les transformations de g_1 .

Le groupe g_6 peut alors s'engendrer au moyen du groupe g_2 . Si l'on appelle ξ_{ij} les variables $\Sigma e_{ip}e_{ijp}$ de g_2 , le groupe g_6 est celui qui indique comment g_2 transforme l'expression $[\xi_{12}\xi_{13}]$ et celles qui s'en déduisent par les transformations de g_2 .

Enfin le groupe g_4 se déduit aussi de g_1 . C'est celui qui indique comment g_1 transforme l'expression $\Sigma [e_{1i}e_{1j}e_{1ij}]$ de poids Π_3 et celles qui s'en déduisent par les transformations de g_1 .

XXI. — GROUPES FONDAMENTAUX DU TYPE F).

46. Le groupe g_1 est le groupe linéaire à 26 variables que j'ai indiqué dans ma Thèse ⁽¹⁾. Ces variables

$$\gamma, \quad \alpha, \quad x_i, \quad x_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

⁽¹⁾ C, p. 145.

sont respectivement de poids

$$0, \quad 0, \quad \omega_i, \quad \frac{\omega_\alpha + \omega_\beta + \omega_\gamma + \omega_\delta}{2}.$$

Le groupe g_2 est le groupe adjoint à 52 variables. C'est celui qui indique comment g_1 transforme entre elles l'expression

$$\xi_{12} = [x_1 x_2] - [x_{1234} x_{123'4'}] + [x_{123'4} x_{1234'}]$$

de poids Π_2 et celles qui s'en déduisent par les transformations de g_1 .

Le groupe g_3 est celui qui indique comment g_1 transforme entre elles l'expression $[x_1 x_{1234}]$ et celles qui s'en déduisent par les transformations de g_1 . Il est à 273 variables, les poids homologues de Π_2 correspondant chacun à 2 variables, les poids homologues de Π_1 à 5 variables et le poids 0 à 9 variables.

Enfin le groupe g_4 est le groupe qui indique comment g_2 transforme l'expression $[\xi_{12} \xi_{13}]$ de poids Π_4 et celles qui s'en déduisent par les transformations de g_2 . Il est à 1274 variables.

XXII. — GROUPES FONDAMENTAUX DU TYPE G).

47. Le groupe g_1 est le groupe à 7 variables indiqué dans ma Thèse ⁽¹⁾. Ces variables x_i, y_i, z sont respectivement de poids $-\overline{\omega_i}, +\overline{\omega_i}$ et 0.

Le groupe g_2 est le groupe adjoint à 14 variables. Il peut s'engendrer au moyen de g_1 . C'est celui qui indique comment g_1 transforme entre elles l'expression $[x_3 y_1]$ de poids Π_2 et celles qu'on en déduit par les transformations de g_1 . Les 14 variables de g_2 sont :

$$\begin{aligned} [x_i y_k] & \quad (i \neq k; i, k = 1, 2, 3), \\ [2z x_i] & - (ijk) [y_j y_k], \\ [2z y_i] & - (ijk) [x_j x_k], \\ [x_1 y_1] & - [x_3 y_3], \quad [x_2 y_2] - [x_3 y_3]. \end{aligned}$$

(1) C, p. 146.

LES CONDITIONS DE CONVERGENCE DE L'INTÉGRALE

$$\int_a^\infty \int_b^\infty \cdots \int_l^\infty \frac{dx dy \dots dt}{(x^\alpha + y^\beta + \dots + t^\lambda)^{a_1} (x^{\alpha_1} + y^{\beta_1} + \dots + t^{\lambda_1})^{a_2} (x^{\alpha_2} + y^{\beta_2} + \dots + t^{\lambda_2})^{a_3}};$$

PAR M. N. PODTIAGUINE.

M. Borel, dans son Livre *Leçons sur la théorie de la croissance* (1), en étudiant l'ordre de grandeur de certaines intégrales

$$\int_a^\infty \int_b^\infty \mathcal{F}(x, y, \alpha, \beta, \dots, \lambda) dx dy,$$

relativement aux paramètres $\alpha, \beta, \dots, \lambda$, a donné une méthode pour la recherche des conditions de leur convergence. Cette méthode consiste à déterminer tout d'abord le champ des variables, dans lequel l'intégrale peut devenir infinie. Puis on divise ce champ en plusieurs zones de manière à pouvoir, dans chacune de ces zones, réduire l'élément différentiel à une partie principale de forme simple. En ne retenant que ce terme prépondérant de l'élément différentiel, on cherche les conditions de convergence de l'intégrale dans chacune des zones.

M. Borel a ainsi trouvé les conditions de convergence de l'intégrale

$$\int_a^\infty \int_b^\infty \frac{dx dy}{(x^\alpha + y^\beta)(x^{\alpha_1} + y^{\beta_1})}.$$

Ici, dans ce petit travail, je me suis proposé de généraliser ces recherches et d'étudier, par une méthode basée sur le même principe, les conditions de convergence de l'intégrale

$$\int_a^\infty \int_b^\infty \cdots \int_l^\infty \frac{dx dy \dots dt}{(x^\alpha + y^\beta + \dots + t^\lambda)^{a_1} (x^{\alpha_1} + y^{\beta_1} + \dots + t^{\lambda_1})^{a_2} (x^{\alpha_2} + y^{\beta_2} + \dots + t^{\lambda_2})^{a_3}}.$$

Dans ce qui suit nous désignerons toujours par les lettres

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$$

(1) Pages 61-73.

des nombres quelconques fixes; par les lettres

$$A, B, C, D, \dots$$

les nombres arbitrairement grands; enfin, par les lettres

$$\alpha, b, c, \dots, k, l, \\ \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \beta, \beta_1, \beta_2, \gamma, \gamma_1, \gamma_2, \dots, z, z_1, z_2, \lambda, \lambda_1, \lambda_2$$

des nombres fixes positifs.

Nous allons commencer par l'étude de l'intégrale

$$I = \int_a^\infty \int_b^\infty \frac{dx dy}{(x^\alpha + y^\beta)^{a_1}}.$$

Si nous supposons que

$$a_1 \alpha > 1, \quad a_1 \beta > 1,$$

l'intégrale I ne peut diverger que dans un champ où x et y sont tous les deux très grands. Donc, il suffit d'étudier l'intégrale

$$I' = \int_A^\infty \int_B^\infty \frac{dx dy}{(x^\alpha + y^\beta)^{a_1}}.$$

Dans ce champ des variables x, y , traçons la courbe

$$y = x^{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

Cette courbe divise le champ en deux zones, et nous avons

$$I' = I_1 + I_2,$$

I_1 étant l'intégrale I' prise dans la première zone, I_2 la même intégrale prise dans la deuxième zone.

On a, dans la première zone,

$$y > x^{\frac{\alpha}{\beta}}$$

et, dans la seconde,

$$y < x^{\frac{\alpha}{\beta}},$$

de sorte que

$$\varphi(x, y) = (x^\alpha + y^\beta)^{a_1} = y^{a_1 \beta} \cdot h_1 \quad (1 < h_1 < 2^{a_1})$$

dans le premier cas, et

$$\varphi(x, y) = x^{a_1 \alpha} \cdot h_2 \quad (1 < h_2 < 2^{a_1})$$

dans le second cas. Nous avons donc

$$I_1 = \frac{1}{h_1} \int_{B'}^{\infty} \frac{dy}{y^{a_1 \beta}} \int_A^{y^{\frac{\beta}{\alpha}}} dx = \frac{1}{h_1} \int_{B'}^{\infty} \frac{dy}{y^{a_1 \beta}} \left[y^{\frac{\beta}{\alpha}} - A \right] \quad (1).$$

Mais le nombre B est arbitrairement grand. Donc, nous pouvons le prendre assez grand pour que l'on ait

$$y^{\frac{\beta}{\alpha}} - A = y^{\frac{\beta}{\alpha}} (1 - \eta),$$

η étant inférieur à 1. En appliquant le théorème de la moyenne, on a

$$I_1 = h_2' \int_{B'}^{\infty} \frac{dy}{y^{a_1 \beta - \beta}}.$$

Cette intégrale converge si

$$a_1 \beta - \frac{\beta}{\alpha} > 1$$

ou

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} < a_1.$$

Quant à l'intégrale I_2 , on a

$$I_2 = \frac{1}{h_2} \int_A^{\infty} \frac{dx}{x^{a_1 \alpha}} \int_B^{x^{\frac{\alpha}{\beta}}} dy = \frac{1}{h_2} \int_A^{\infty} \frac{dx}{x^{a_1 \alpha}} \left[x^{\frac{\alpha}{\beta}} - B \right].$$

Ici, nous intéressent seulement les valeurs de x qui sont très grandes.

Donc, nous pouvons remplacer ici A par une nouvelle limite A', de sorte que

$$x^{\frac{\alpha}{\beta}} - B = x^{\frac{\alpha}{\beta}} (1 - \eta),$$

η étant inférieur à 1. La condition de convergence de l'intégrale I_2 est donc

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} < a_1.$$

Nous voyons ainsi que la condition de convergence de l'inté-

(1) Pour simplifier nos calculs nous supposons que $A^{\frac{\alpha}{\beta}} > B$, de sorte que $B' > B$.

grale I est seulement

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} < \alpha_1.$$

Considérons maintenant l'intégrale

$$\Pi = \int_a^\infty \int_b^\infty \int_c^\infty \frac{dx dy dz}{(x^\alpha + y^\beta + z^\gamma)^{\alpha_1}}.$$

En supposant

$$\alpha_1 \alpha > 1, \quad \alpha_1 \beta > 1, \quad \alpha_1 \gamma > 1,$$

nous pouvons nous borner à l'étude de l'intégrale

$$\Pi' = \int_A^\infty \int_B^\infty \int_C^\infty \frac{dx dy dz}{(x^\alpha + y^\beta + z^\gamma)^{\alpha_1}}.$$

Imaginons dans le champ des variables x, y, z la surface

$$z^\gamma = x^\alpha + y^\beta.$$

Cette surface divise le champ en deux domaines, de sorte que

$$\Pi' = \Pi_1 + \Pi_2,$$

où Π_1 est l'intégrale Π' prise dans le premier domaine et Π_2 l'intégrale prise dans le second domaine. Mais dans le premier domaine on a

$$z^\gamma > x^\alpha + y^\beta,$$

d'où

$$\varphi(x, y, z) = (x^\alpha + y^\beta + z^\gamma)^{\alpha_1} = z^{\alpha_1 \gamma} \cdot h_1 \quad (1 < h_1 < 2^{\alpha_1}),$$

et dans le second

$$z^\gamma < x^\alpha + y^\beta,$$

d'où

$$\varphi(x, y, z) = (x^\alpha + y^\beta)^{\alpha_1} \cdot h_2 \quad (1 < h_2 < 2^{\alpha_1}).$$

Donc

$$\Pi_1 = \frac{1}{h_1} \int_{C'}^\infty \frac{dz}{z^{\alpha_1 \gamma}} \int_B^{w_1} dy \int_A^{w_2} dx \quad (1).$$

La limite supérieure w_1 est définie par les équations

$$z^\gamma = x^\alpha + w_1^\beta \quad \text{et} \quad x = A,$$

d'où

$$w_1 = z^{\frac{\gamma}{\beta}} (1 - \eta).$$

(1) Pour simplifier nos calculs nous supposons que $A^\alpha + B^\beta > C^\gamma$, de sorte que $C' > C$.

C' étant arbitrairement grand, nous pouvons le supposer assez grand pour que η soit inférieur à 1.

De même pour w_2 on a

$$w_2 = z^{\frac{\gamma}{\alpha}}(1 - \eta_1),$$

η_1 étant inférieur à 1. Donc

$$\Pi_1 = h'_1 \int_{C'}^{\infty} \frac{dz}{z^{a_1 \gamma}} z^{\frac{\gamma}{\beta} + \frac{\gamma}{\alpha}} [1 - \eta_2].$$

Ici encore nous pouvons prendre C' assez grand pour que η_2 soit inférieur à 1. On a finalement

$$\Pi_1 = h''_1 \int_{C'}^{\infty} \frac{dz}{z^{a_1 \gamma - \frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\gamma}{\beta}}}.$$

La condition de convergence de cette intégrale est

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} < a_1.$$

Envisageons maintenant l'intégrale Π_2 . On a

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= \frac{1}{h_2} \int_A^{\infty} \int_B^{\infty} \frac{dx dy}{(x^{\alpha} + y^{\beta})^{a_1}} \int_C^{(x^{\alpha} + y^{\beta})^{\frac{1}{\gamma}}} dz \\ &= \frac{1}{h_2} \int_A^{\infty} \int_B^{\infty} \frac{dx dy}{(x^{\alpha} + y^{\beta})^{a_1}} \left[(x^{\alpha} + y^{\beta})^{\frac{1}{\gamma}} - C \right]. \end{aligned}$$

Mais la question de la convergence se pose seulement pour x, y très grands. Nous pouvons donc remplacer ici A et B par deux nouvelles limites de telle sorte que

$$(x^{\alpha} + y^{\beta})^{\frac{1}{\gamma}} - C = (x^{\alpha} + y^{\beta})^{\frac{1}{\gamma}} (1 - \eta_3),$$

η_3 étant inférieur à 1. Mais l'intégrale

$$\int_A^{\infty} \int_B^{\infty} \frac{dx dy}{(x^{\alpha} + y^{\beta})^{a_1 - \frac{1}{\gamma}}}$$

a la forme de l'intégrale I, dont la condition de convergence,

comme nous avons déjà vu, est

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} < a_1 - \frac{1}{\gamma},$$

c'est-à-dire la même que celle de l'intégrale Π_1 .

Les mêmes raisonnements sont applicables aux intégrales de la forme

$$J_1 = \int_a^\infty \int_b^\infty \cdots \int_l^\infty \frac{dx dy \dots dt}{(x^\alpha + y^\beta + \dots + t^\lambda)^{a_1}}.$$

On trouvera pour elles la condition de convergence

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \dots + \frac{1}{\lambda} < a_1.$$

Si l'on suppose

$$a_1 = 1,$$

on obtiendra pour l'intégrale

$$\int_a^\infty \int_b^\infty \cdots \int_l^\infty \frac{dx dy \dots dt}{x^\alpha + y^\beta + \dots + t^\lambda}$$

la condition de convergence

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \dots + \frac{1}{\lambda} < 1$$

qui a déjà été donnée par M. Borel ⁽¹⁾.

Nous allons maintenant considérer l'intégrale

$$III = \int_a^\infty \int_b^\infty \frac{dx dy}{(x^\alpha + y^\beta)^{a_1} (x^{\alpha_1} + y^{\beta_1})^{a_2}}.$$

Nous supposons que

$$\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

En considérant y comme constant, nous voyons qu'il faut tout d'abord avoir

$$a_1 \alpha + a_2 \alpha_1 > 1$$

pour que l'intégrale III ait un sens. De même il faut que

$$a_1 \beta + a_2 \beta_1 > 1.$$

En supposant ces conditions remplies, l'intégrale III ne peut

⁽¹⁾ *Leçons sur la théorie de la croissance*, p. 70.

diverger que pour x et y tous deux très grands. Donc, nous pouvons nous borner à l'étude de l'intégrale

$$III' = \int_A^\infty \int_B^\infty \frac{dx dy}{(x^\alpha + y^\beta)^{a_1} (x^{\alpha_1} + y^{\beta_1})^{a_2}}.$$

Dans le champ des variables x, y traçons deux courbes

$$y = x^{\frac{\alpha}{\beta}} \quad \text{et} \quad y = x^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}}.$$

A cause de la condition $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha_1}{\beta_1}$, la première courbe sera au-dessus de la seconde. Ces courbes divisent le champ considéré en trois zones. On a, dans la première zone,

$$y^\beta > x^\alpha, \quad y^{\beta_1} > x^{\alpha_1};$$

dans la deuxième,

$$y^\beta < x^\alpha, \quad y^{\beta_1} > x^{\alpha_1},$$

et dans la troisième,

$$y^\beta < x^\alpha, \quad y^{\beta_1} < x^{\alpha_1},$$

de sorte que nous avons, dans les trois cas indiqués,

$$\varphi(x, y) = (x^\alpha + y^\beta)^{a_1} (x^{\alpha_1} + y^{\beta_1})^{a_2} = y^{a_1\beta + a_2\beta_1} \cdot h_1,$$

$$\varphi(x, y) = x^{a_1\alpha} y^{a_2\beta_1} \cdot h_2,$$

$$\varphi(x, y) = x^{a_1\alpha + a_2\alpha_1} \cdot h_3,$$

h_1, h_2, h_3 étant compris entre 1 et $2^{a_1 + a_2}$

En désignant par III_1, III_2, III_3 l'intégrale III' prise respectivement dans les première, deuxième et troisième zones, on a

$$III' = III_1 + III_2 + III_3.$$

Envisageons séparément les trois intégrales ci-dessus. On a

$$III_1 = \frac{1}{h_1} \int_{B'}^\infty \frac{dy}{y^{a_1\beta + a_2\beta_1}} \int_A^{y^{\frac{\beta}{\alpha}}} dx = h_1' \int_{B'}^\infty \frac{dy}{y^{a_1\beta + a_2\beta_1 - \frac{\beta}{\alpha}}} \quad (1),$$

$$III_2 = \frac{1}{h_2} \int_A^\infty \frac{dx}{x^{a_1\alpha}} \int_{\frac{\alpha_1}{\beta_1}}^{y^{\frac{\beta}{\alpha}}} \frac{dy}{y^{a_2\beta_1}} = h_2' \int_A^\infty \frac{dx}{x^{a_1\alpha}} \left[\frac{x^{\frac{\alpha}{\beta} (1 - a_2\beta_1)}}{\frac{\alpha}{\beta}} - \frac{x^{\frac{\alpha_1}{\beta_1} (1 - a_2\beta_1)}}{\frac{\alpha_1}{\beta_1}} \right].$$

(1) Nous supposons que $A^{\frac{\alpha}{\beta_1}} > B$, de sorte que $B' > B$.

Mais à cause de la condition $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha_1}{\beta_1}$, on a

$$x^{\frac{\alpha}{\beta}(1-a_2\beta_1)} = x^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}(1-a_2\beta_1)} = x^{\frac{\alpha}{\beta}(1-a_2\beta_1)} [1 - \tau_1],$$

τ_1 étant inférieur à 1 ⁽¹⁾. Il en résulte que

$$III_2 = h'_2 \int_A^\infty \frac{dx}{x^{a-a_1\frac{\alpha}{\beta}(1-a_2\beta_1)}}.$$

La condition de convergence des intégrales III_1 et III_2 est donc la même

$$a_2 \frac{\beta_1}{\beta} > \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - a_1.$$

Quant à l'intégrale III_3 , elle donne la nouvelle condition de convergence. En effet, on a

$$III_3 = \frac{1}{h_3} \int_A^\infty \frac{dx}{x^{a_1\alpha+a_2\alpha_1}} \int_B^{x^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}}} dy = h'_3 \int_A^\infty \frac{dx}{x^{a_1\alpha+a_2\alpha_1-\frac{\alpha_1}{\beta_1}}}$$

si nous supposons A assez grand. La condition de convergence de l'intégrale III_3 est donc

$$a_1 \frac{\alpha}{\alpha_1} > \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1} - a_2.$$

Ainsi, pour que l'intégrale III soit convergente, il faut et il suffit que ses paramètres satisfassent à deux conditions :

$$\begin{aligned} a_2 \frac{\beta_1}{\beta} &> \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - a_1, \\ a_1 \frac{\alpha}{\alpha_1} &> \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1} - a_2, \end{aligned}$$

avec

$$\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

En supposant ici

$$\alpha_1 = a_2 = 1,$$

on a

$$\begin{aligned} \frac{\beta_1}{\beta} &> \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - 1, \\ \frac{\alpha}{\alpha_1} &> \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1} - 1. \end{aligned}$$

(1) Nous supposons donc que $1 - a_2\beta_1 > 0$. Si $1 - a_2\beta_1 < 0$, il est aisé de démon-

Ce sont les conditions de convergence de l'intégrale

$$\int_a^\infty \int_b^\infty \frac{dx dy}{(x^\alpha + y^\beta)(x^{\alpha_1} + y^{\beta_1})}$$

qui ont été données par M. Borel (1).

Nous allons maintenant chercher les conditions de convergence de l'intégrale

$$IV = \int_a^\infty \int_b^\infty \int_c^\infty \frac{dx dy dz}{(x^\alpha + y^\beta + z^\gamma)^{a_1} (x^{\alpha_1} + y^{\beta_1} + z^{\gamma_1})^{a_2}}.$$

Si nous supposons

$$a_1 \alpha + a_2 \alpha_1 > 1,$$

$$a_1 \beta + a_2 \beta_1 > 1,$$

$$a_1 \gamma + a_2 \gamma_1 > 1,$$

l'étude de cette intégrale se ramène à l'étude de l'intégrale

$$IV' = \int_A^\infty \int_B^\infty \int_C^\infty \frac{dx dy dz}{(x^\alpha + y^\beta + z^\gamma)^{a_1} (x^{\alpha_1} + y^{\beta_1} + z^{\gamma_1})^{a_2}}.$$

Divisons le champ des variables x, y, z en trois domaines par deux surfaces

$$z^\gamma = x^\alpha + y^\beta,$$

$$z^{\gamma_1} = x^{\alpha_1} + y^{\beta_1}.$$

Supposons

$$\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \quad \frac{\beta}{\gamma} > \frac{\beta_1}{\gamma_1},$$

d'où

$$\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\alpha_1}{\gamma_1},$$

de sorte que

$$(1) \quad (x^\alpha + y^\beta)^{\frac{1}{\gamma}} > (x^{\alpha_1} + y^{\beta_1})^{\frac{1}{\gamma_1}} \quad (2).$$

Dans le premier domaine nous avons

$$\varphi(x, y, z) = (x^\alpha + y^\beta + z^\gamma)^{a_1} (x^{\alpha_1} + y^{\beta_1} + z^{\gamma_1})^{a_2} = z^{a_1 \gamma + a_2 \gamma_1} h_1,$$

dans le second

$$\varphi(x, y, z) = (x^\alpha + y^\beta)^{a_1} z^{a_2 \gamma_1} h_2$$

trer que la condition de convergence de l'intégrale III_2 est la même que celle de l'intégrale III_3 .

(1) *Leçons sur la théorie de la croissance*, p. 72.

(2) Cela veut dire que la première surface est au-dessus de la seconde.

et dans le troisième

$$\varphi(x, y, z) = (x^\alpha + y^\beta)^{a_1} (x^{\alpha_1} + y^{\beta_1})^{a_2} h_3,$$

où

$$1 < h_1 < 2^{a_1 + a_2}, \quad 1 < h_2 < 2^{a_1 + a_2}, \quad 1 < h_3 < 2^{a_1 + a_2}.$$

L'intégrale IV' , dans le premier de ces domaines, a pour valeur

$$IV_1 = h'_1 \int_{C'}^\infty \frac{dz}{z^{a_1 \gamma + a_2 \gamma_1}} \int_B^{z^{\frac{\gamma}{\beta}}} dy \int_A^{z^{\frac{\gamma}{\alpha}}} dx = h'_1 \int_{C'}^\infty \frac{dz}{z^{a_1 \gamma + a_2 \gamma_1 - \frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\gamma}{\beta}}} \quad (1),$$

et dans le deuxième, elle est égale à

$$\begin{aligned} IV_2 &= \frac{1}{h_2} \int_A^\infty \int_B^\infty \frac{dx dy}{(x^\alpha + y^\beta)^{a_1}} \int_{(x^{\alpha_1} + y^{\beta_1})^{\frac{1}{\gamma_1}}}^{(x^\alpha + y^\beta)^{\frac{1}{\gamma}}} \frac{dz}{z^{a_2 \gamma_1}} \\ &= h'_2 \int_A^\infty \int_B^\infty \frac{dx dy}{(x^\alpha + y^\beta)^{a_1 - \frac{1}{\gamma} (1 - a_2 \gamma_1)}} \end{aligned}$$

à cause de l'inégalité (1) (2).

Les intégrales IV_1 et IV_2 convergent si

$$a_2 \frac{\gamma}{\gamma_1} \geq \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} - a_1.$$

Quant à l'intégrale IV' , prise dans le troisième domaine, elle nous donne encore deux conditions de convergence. En effet, cette intégrale a pour valeur

$$\begin{aligned} IV_3 &= \frac{1}{h_3} \int_A^\infty \int_B^\infty \frac{dx dy}{(x^\alpha + y^\beta)^{a_1} (x^{\alpha_1} + y^{\beta_1})^{a_2}} \int_C^{(x^{\alpha_1} + y^{\beta_1})^{\frac{1}{\gamma_1}}} dz \\ &= h'_3 \int_A^\infty \int_B^\infty \frac{dx dy}{(x^\alpha + y^\beta)^{a_1} (x^{\alpha_1} + y^{\beta_1})^{a_2 - \frac{1}{\gamma_1}}}. \end{aligned}$$

Cette dernière intégrale a la forme de l'intégrale III. Nous avons déjà vu que les conditions de sa convergence sont

$$\begin{aligned} \left(a_2 - \frac{1}{\gamma_1}\right) \frac{\beta_1}{\beta} &> \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - a_1, \\ a_1 \frac{\alpha}{\alpha_1} &> \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\gamma_1} - a_2. \end{aligned}$$

Donc, pour que l'intégrale IV soit convergente, il faut et il

(1) Nous supposons toujours $C' > C$.

(2) Nous supposons que $1 - a_2 \gamma_1 > 0$. Si $1 - a_2 \gamma_1 < 0$, on obtiendra pour la convergence de l'intégrale IV_2 deux conditions : celles de l'intégrale IV_3 .

suffit que ses paramètres satisfassent à trois conditions

$$\begin{aligned} a_2 \frac{\gamma_1}{\gamma} &> \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} - a_1, \\ \left(a_2 - \frac{1}{\gamma_1}\right) \frac{\beta_1}{\beta} &> \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - a_1, \\ a_1 \frac{\alpha}{\alpha_1} &> \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\gamma_1} - a_2, \end{aligned}$$

avec

$$\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \quad \frac{\beta}{\gamma} > \frac{\beta_1}{\gamma_1}.$$

En se plaçant au point de vue de l'hypothèse de l'espace à quatre dimensions, on peut considérer l'intégrale

$$\int_a^\infty \int_b^\infty \int_c^\infty \int_d^\infty \frac{dx dy dz dt}{(x^\alpha + y^\beta + z^\gamma + t^\delta)^{a_1} (x^{\alpha_1} + y^{\beta_1} + z^{\gamma_1} + t^{\delta_1})^{a_2}}.$$

On trouvera quatre conditions pour sa convergence :

$$\begin{aligned} a_2 \frac{\delta_1}{\delta} &> \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} - a_1, \\ \left(a_2 - \frac{1}{\delta_1}\right) \frac{\gamma_1}{\gamma} &> \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} - a_1, \\ \left(a_2 - \frac{1}{\delta_1} - \frac{1}{\gamma_1}\right) \frac{\beta_1}{\beta} &> \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - a_1, \\ a_1 \frac{\alpha}{\alpha_1} &> \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\delta_1} - a_2, \end{aligned}$$

avec

$$\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \quad \frac{\beta}{\gamma} > \frac{\beta_1}{\gamma_1}, \quad \frac{\gamma}{\delta} > \frac{\gamma_1}{\delta_1}.$$

En appliquant toujours la même méthode, nous obtiendrons en général, pour la convergence de l'intégrale,

$$J_2 = \int_a^\infty \int_b^\infty \int_c^\infty \dots \int_h^\infty \int_l^\infty \frac{dx_1 dx_2 dx_3 \dots dx_{n-1} dx_n}{\left[\begin{aligned} &(x_1^\alpha + x_2^\beta + x_3^\gamma + \dots + x_{n-1}^\lambda + x_n^\lambda)^{a_1} \\ &\times (x_1^{\alpha_1} + x_2^{\beta_1} + x_3^{\gamma_1} + \dots + x_{n-1}^{\lambda_1} + x_n^{\lambda_1})^{a_2} \end{aligned} \right]},$$

n conditions

$$\begin{aligned} a_2 \frac{\lambda_1}{\lambda} &> \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \dots + \frac{1}{\lambda} - a_1, \\ \left(a_2 - \frac{1}{\lambda_1}\right) \frac{\alpha_1}{\alpha} &> \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \dots + \frac{1}{\lambda} - a_1, \\ &\dots\dots\dots \\ \left(a_2 - \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\alpha_1} - \dots - \frac{1}{\gamma_1}\right) \frac{\beta_1}{\beta} &> \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - a_1, \\ a_1 \frac{\alpha}{\alpha_1} &> \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\gamma_1} + \dots + \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\lambda_1} - a_2. \end{aligned}$$

avec

$$\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \quad \frac{\beta}{\gamma} > \frac{\beta_1}{\gamma_1}, \quad \dots, \quad \frac{z}{\lambda} > \frac{z_1}{\lambda_1}.$$

Nous avons vu que l'intégrale

$$\mathfrak{J}_1 = \int_a^\infty \int_b^\infty \dots \int_l^\infty \frac{dx dy \dots dt}{(x^\alpha + y^\beta + \dots + t^\lambda)^{a_1}},$$

dont l'élément différentiel a, dans son dénominateur, un facteur de la forme

$$(2) \quad (x^\alpha + y^\beta + \dots + t^\lambda)^{a_1}$$

converge, si ses paramètres satisfont à une seule condition. Nous venons de voir aussi que le nombre de conditions de convergence de l'intégrale $\mathfrak{J}_2$ dont l'élément différentiel a, dans son dénominateur, deux facteurs de la même forme, est égal à l'ordre de sa multiplicité. Le nombre de ces conditions croît encore plus vite si l'élément différentiel de l'intégrale a trois facteurs de la forme (2).

En effet, considérons d'abord l'intégrale

$$V = \int_a^\infty \int_b^\infty \frac{dx dy}{(x^\alpha + y^\beta)^{a_1} (x^{\alpha_1} + y^{\beta_1})^{a_2} (x^{\alpha_2} + y^{\beta_2})^{a_3}},$$

où a_1 et a_2 sont positifs ⁽¹⁾.

Nous supposons ici

$$(3) \quad \frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha_1}{\beta_1} > \frac{\alpha_2}{\beta_2}.$$

En supposant, en outre,

$$\begin{aligned} a_1 \alpha + a_2 \alpha_1 + a_3 \alpha_2 &> 1, \\ a_1 \beta + a_2 \beta_1 + a_3 \beta_2 &> 1, \end{aligned}$$

nous pouvons ne considérer que l'intégrale

$$V' = \int_A^\infty \int_B^\infty \frac{dx dy}{(x^\alpha + y^\beta)^{a_1} (x^{\alpha_1} + y^{\beta_1})^{a_2} (x^{\alpha_2} + y^{\beta_2})^{a_3}},$$

Traçons dans le champ des variables x, y les courbes

$$y = x^{\frac{\alpha}{\beta}}, \quad y = x^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}}, \quad y = x^{\frac{\alpha_2}{\beta_2}}.$$

En vertu des conditions (3), la première courbe sera au-dessus de la seconde et la seconde au-dessus de la troisième. Ainsi nous

(1) Dans ce qui suit, nous supposerons maintenant toujours $a_1 > 0$ et $a_2 > 0$.

avons quatre zones à considérer. Dans la première, on a

$$y^\beta > x^\alpha, \quad y^{\beta_1} > x^{\alpha_1}, \quad y^{\beta_2} > x^{\alpha_2}, \\ \varphi(x, y) = (x^\alpha + y^\beta)^{\alpha_1} (x^{\alpha_1} + y^{\beta_1})^{\alpha_2} (x^{\alpha_2} + y^{\beta_2})^{\alpha_3} = y^{a_1\beta + a_2\beta_1 + a_3\beta_2} \cdot h_1;$$

dans la seconde,

$$y^\beta < x^\alpha, \quad y^{\beta_1} > x^{\alpha_1}, \quad y^{\beta_2} > x^{\alpha_2}, \\ \varphi(x, y) = x^{a_1\alpha} y^{a_2\beta_1 + a_3\beta_2} \cdot h_2;$$

dans la troisième,

$$y^\beta < x^\alpha, \quad y^{\beta_1} < x^{\alpha_1}, \quad y^{\beta_2} > x^{\alpha_2}, \\ \varphi(x, y) = x^{a_1\alpha + a_2\alpha_1} y^{a_3\beta_2} \cdot h_3,$$

et dans la quatrième,

$$y^\beta < x^\alpha, \quad y^{\beta_1} < x^{\alpha_1}, \quad y^{\beta_2} < x^{\alpha_2}, \\ \varphi(x, y) = x^{a_1\alpha + a_2\alpha_1 + a_3\alpha_2} \cdot h_4,$$

où h_1, h_2, h_3 et h_4 sont tous compris entre 1 et $2^{a_1 + a_2 + a_3}$.

En désignant par V_1, V_2, V_3 et V_4 l'intégrale V' respectivement dans les première, deuxième, troisième et quatrième zones, nous avons

$$V' = V_1 + V_2 + V_3 + V_4.$$

On trouve, pour chacune de ces intégrales,

$$V_1 = \frac{1}{h_1} \int_B^\infty \frac{dy}{y^{a_1\beta + a_2\beta_1 + a_3\beta_2}} \int_A^{y^{\frac{\beta}{\alpha}}} dx = h'_1 \int_B^\infty \frac{dy}{y^{a_1\beta + a_2\beta_1 + a_3\beta_2 - \frac{\beta}{\alpha}}} \quad (1).$$

$$V_2 = \frac{1}{h_2} \int_A^\infty \frac{dx}{x^{a_1\alpha}} \int_{x^{\frac{\alpha}{\beta_1}}}^{\frac{\alpha}{\beta}} \frac{dy}{y^{a_2\beta_1 + a_3\beta_2}} = h'_2 \int_A^\infty \frac{dx}{x^{a_1\alpha - \frac{\alpha}{\beta} (1 - a_2\beta_1 - a_3\beta_2)}},$$

$$V_3 = \frac{1}{h_3} \int_A^\infty \frac{dx}{x^{a_1\alpha + a_2\alpha_1}} \int_{x^{\frac{\alpha_2}{\beta_2}}}^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}} \frac{dy}{y^{a_3\beta_2}} = h'_3 \int_A^\infty \frac{dx}{x^{a_1\alpha + a_2\alpha_1 - \frac{\alpha_1}{\beta_1} (1 - a_3\beta_2)}},$$

$$V_4 = \frac{1}{h_4} \int_A^\infty \frac{dx}{x^{a_1\alpha + a_2\alpha_1 + a_3\alpha_2}} \int_B^{x^{\frac{\alpha_3}{\beta_3}}} dy = h'_4 \int_A^\infty \frac{dx}{x^{a_1\alpha + a_2\alpha_1 + a_3\alpha_2 - \frac{\alpha_3}{\beta_3}}},$$

car A et B sont arbitrairement grands (2).

(1) Nous supposons toujours que $\Lambda^{\frac{\alpha_2}{\beta_2}} > B$. Donc $B' > B$.

(2) Nous n'avons considéré ici que le cas, dans lequel $1 - a_2\beta_1 - a_3\beta_2 > 0$, d'où $1 - a_3\beta_2 > 0$. Si $1 - a_3\beta_2 < 0$ ou seulement $1 - a_2\beta_1 - a_3\beta_2 < 0$, il est facile de démontrer que les conditions de convergence de l'intégrale V sont les mêmes.

Nous voyons ainsi que l'intégrale V est convergente si ses paramètres satisfont à trois conditions :

$$\begin{aligned} a_2 \frac{\beta_1}{\beta} + a_3 \frac{\beta_2}{\beta} &> \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - a_1, \\ a_1 \frac{\alpha}{\alpha_1} + a_3 \frac{\beta_2}{\beta_1} &> \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1} - a_2, \\ a_1 \frac{\alpha}{\alpha_2} + a_2 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} &> \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\beta_2} - a_3. \end{aligned}$$

avec

$$\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha_1}{\beta_1} > \frac{\alpha_2}{\beta_2}.$$

Considérons maintenant l'intégrale triple

$$VI = \int_a^\infty \int_b^\infty \int_c^\infty \frac{dx dy dz}{(x^\alpha + y^\beta + z^\gamma)^{a_1} (x^{\alpha_1} + y^{\beta_1} + z^{\gamma_1})^{a_2} (x^{\alpha_2} + y^{\beta_2} + z^{\gamma_2})^{a_3}},$$

où

$$\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \quad \frac{\beta}{\gamma} > \frac{\beta_1}{\gamma_1}, \quad \frac{\alpha_1}{\beta_1} > \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \quad \frac{\beta_1}{\gamma_1} > \frac{\beta_2}{\gamma_2}.$$

En supposant

$$\begin{aligned} a_1 \alpha + a_2 \alpha_1 + a_3 \alpha_2 &> 1, \\ a_1 \beta + a_2 \beta_1 + a_3 \beta_2 &> 1, \\ a_1 \gamma + a_2 \gamma_1 + a_3 \gamma_2 &> 1, \end{aligned}$$

nous pouvons ramener l'étude de cette intégrale à l'étude de l'intégrale

$$VI = \int_A^\infty \int_B^\infty \int_C^\infty \frac{dx dy dz}{(x^\alpha + y^\beta + z^\gamma)^{a_1} (x^{\alpha_1} + y^{\beta_1} + z^{\gamma_1})^{a_2} (x^{\alpha_2} + y^{\beta_2} + z^{\gamma_2})^{a_3}}.$$

Imaginons dans le champ des variables x, y, z trois surfaces :

$$\begin{aligned} z^\gamma &= x^\alpha + y^\beta, \\ z^{\gamma_1} &= x^{\alpha_1} + y^{\beta_1}, \\ z^{\gamma_2} &= x^{\alpha_2} + y^{\beta_2}. \end{aligned}$$

Ces surfaces divisent le champ en quatre domaines, de sorte que nous avons, dans le premier domaine,

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= (x^\alpha + y^\beta + z^\gamma)^{a_1} (x^{\alpha_1} + y^{\beta_1} + z^{\gamma_1})^{a_2} (x^{\alpha_2} + y^{\beta_2} + z^{\gamma_2})^{a_3} \\ &= z^{a_1 \gamma + a_2 \gamma_1 + a_3 \gamma_2} h_1; \end{aligned}$$

dans le deuxième

$$\varphi(x, y, z) = (x^\alpha + y^\beta)^{a_1} z^{a_2 \gamma_1 + a_3 \gamma_2} h; \quad ;$$

dans le troisième,

$$\varphi(x, y, z) = (x^\alpha + y^\beta)^{a_1} (x^{\alpha_1} + y^{\beta_1})^{a_2} z^{a_3 \gamma_2} h_3,$$

et dans le quatrième,

$$\varphi(x, y, z) = (x^\alpha + y^\beta)^{a_1} (x^{\alpha_1} + y^{\beta_1})^{a_2} (x^{\alpha_2} + y^{\beta_2})^{a_3} h_4,$$

h_1, h_2, h_3 et h_4 étant compris entre 1 et $2^{a_1 + a_2 + a_3}$.

Donc, l'intégrale VI', dans le premier domaine, est égale à

$$\begin{aligned} VI_1 &= \frac{1}{h_1} \int_{C'}^\infty \frac{dz}{z^{a_1 \gamma + a_2 \gamma_1 + a_3 \gamma_2}} \int_B^{z^{\frac{\gamma}{\beta}(1-\gamma_1)}} dy \int_A^{z^{\frac{\gamma}{\alpha}(1-\gamma_1)}} dx \\ &= h_1' \int_{C'}^\infty \frac{dz}{z^{a_1 \gamma + a_2 \gamma_1 + a_3 \gamma_2 - \frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\gamma}{\beta}}} \quad (1); \end{aligned}$$

dans le second elle a pour valeur

$$\begin{aligned} VI_2 &= \frac{1}{h_2} \int_A^\infty \int_B^\infty \frac{dx dy}{(x^\alpha + y^\beta)^{a_1}} \int_{(x^{\alpha_1} + y^{\beta_1})^{\frac{1}{\gamma_1}}}^{(x^\alpha + y^\beta)^{\frac{1}{\gamma}}} \frac{dz}{z^{a_2 \gamma_1 + a_3 \gamma_2}} \\ &= h_2' \int_A^\infty \int_B^\infty \frac{dx dy}{(x^\alpha + y^\beta)^{a_1 - \frac{1}{\gamma}(1 - a_2 \gamma_1 - a_3 \gamma_2)}} \quad (2). \end{aligned}$$

La condition de convergence des intégrales VI₁ et VI₂ est donc seule

$$a_2 \frac{\gamma_1}{\gamma} + a_3 \frac{\gamma_2}{\gamma} > \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} - a_1.$$

L'intégrale VI', dans le troisième domaine, est égale à

$$\begin{aligned} VI_3 &= \frac{1}{h_3} \int_A^\infty \int_B^\infty \frac{dx dy}{(x^\alpha + y^\beta)^{a_1} (x^{\alpha_1} + y^{\beta_1})^{a_2}} \int_{(x^{\alpha_2} + y^{\beta_2})^{\frac{1}{\gamma_2}}}^{(x^{\alpha_1} + y^{\beta_1})^{\frac{1}{\gamma_1}}} \frac{dz}{z^{a_3 \gamma_2}} \\ &= h_3' \int_A^\infty \int_B^\infty \frac{dx dy}{(x^\alpha + y^\beta)^{a_1} (x^{\alpha_1} + y^{\beta_1})^{a_2 - \frac{1}{\gamma_1}(1 - a_3 \gamma_2)}} \quad (3). \end{aligned}$$

(1) Toujours $C' > C$.

(2) Nous supposons donc que $1 - a_2 \gamma_1 - a_3 \gamma_2 > 0$. Dans le cas contraire, nous aurons pour la convergence de l'intégrale VI₂ deux conditions : celles de l'intégrale VI₃.

(3) En supposant $1 - a_3 \gamma_2 > 0$. Dans le cas où $1 - a_3 \gamma_2 < 0$, il est aisé de démontrer que l'intégrale VI₃ converge, si ses paramètres satisfont à trois conditions qui sont celles de l'intégrale VI₁. Remarquons qu'il est impossible d'avoir à la fois $1 - a_2 \gamma_1 - a_3 \gamma_2 > 0$ et $1 - a_3 \gamma_2 < 0$ parce que nous avons supposé $a_2 > 0$.

Les conditions de sa convergence sont

$$\left[a_2 - \frac{1}{\gamma_1} (1 - a_3 \gamma_2) \right] \frac{\beta_1}{\beta} > \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - a_1,$$

$$a_1 \frac{\alpha}{\alpha_1} > \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1} - a_2 + \frac{1}{\gamma_1} (1 - a_3 \gamma_2).$$

Enfin, l'intégrale VI', prise dans le quatrième domaine, qui est égale à

$$VI_4 = h_4' \int_A^\infty \int_B^\infty \frac{dx dy}{(x^\alpha + y^\beta)^{a_1} (x^{\alpha_1} + y^{\beta_1})^{a_2} (x^{\alpha_2} + y^{\beta_2})^{a_3 - \frac{1}{\gamma_2}}},$$

donne encore trois conditions :

$$a_2 \frac{\beta_1}{\beta} + \left(a_3 - \frac{1}{\gamma_2} \right) \frac{\beta_2}{\beta} > \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - a_1,$$

$$a_1 \frac{\alpha}{\alpha_1} + \left(a_3 - \frac{1}{\gamma_2} \right) \frac{\beta_2}{\beta_1} > \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1} - a_2,$$

$$a_1 \frac{\alpha}{\alpha_2} + a_2 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} > \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\beta_2} + \frac{1}{\gamma_2} - a_3.$$

Donc, l'intégrale VI converge, si ses paramètres satisfont à six conditions :

$$a_2 \frac{\gamma_1}{\gamma} + a_3 \frac{\gamma_2}{\gamma} > \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} - a_1,$$

$$a_2 \frac{\beta_1}{\beta} + \left(a_3 - \frac{1}{\gamma_2} \right) \frac{\beta_2}{\beta} > \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - a_1,$$

$$a_1 \frac{\alpha}{\alpha_1} + a_3 \frac{\gamma_2}{\gamma_1} > \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\gamma_1} - a_2,$$

$$a_1 \frac{\alpha}{\alpha_1} + \left(a_3 - \frac{1}{\gamma_2} \right) \frac{\beta_2}{\beta_1} > \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1} - a_2,$$

$$\left(a_1 - \frac{1}{\alpha} \right) \frac{\beta}{\beta_1} + a_3 \frac{\gamma_2}{\gamma_1} > \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\gamma_1} - a_2,$$

$$a_1 \frac{\alpha}{\alpha_2} + a_2 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} > \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\beta_2} + \frac{1}{\gamma_2} - a_3,$$

avec

$$\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \quad \frac{\beta}{\gamma} > \frac{\beta_1}{\gamma_1}, \quad \frac{\alpha_1}{\beta_1} > \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \quad \frac{\beta_1}{\gamma_1} > \frac{\beta_2}{\gamma_2}.$$

En général, pour l'intégrale

$$J_3 = \int_a^\infty \int_b^\infty \int_c^\infty \dots \int_k^\infty \int_l^\infty \frac{dx_1 dx_2 dx_3 \dots dx_{n-1} dx_n}{\left[\begin{aligned} & (x_1^\alpha + x_2^\beta + x_3^\gamma + \dots + x_{n-1}^\alpha + x_n^\lambda)^{a_1} \\ & \times (x_1^{\alpha_1} + x_2^{\beta_1} + x_3^{\gamma_1} + \dots + x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} + x_n^{\lambda_1})^{a_2} \\ & \times (x_1^{\alpha_2} + x_2^{\beta_2} + x_3^{\gamma_2} + \dots + x_{n-1}^{\alpha_{n-2}} + x_n^{\lambda_2})^{a_3} \end{aligned} \right]},$$

on a $3(n-1)$ conditions :

$$\begin{aligned}
 a_2 \frac{\lambda_1}{\lambda} + a_3 \frac{\lambda_2}{\lambda} &> \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \dots + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\lambda} - a_1, \\
 a_2 \frac{z_1}{z} + \left(a_3 - \frac{1}{\lambda_2}\right) \frac{z_2}{z} &> \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \dots + \frac{1}{z} - a_1, \\
 &\dots\dots\dots \\
 a_1 \frac{\alpha}{\alpha_1} + a_3 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} &> \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\gamma_1} + \dots + \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\lambda_1} - a_2, \\
 a_1 \frac{\alpha}{\alpha_1} + \left(a_3 - \frac{1}{\lambda_2}\right) \frac{z_2}{\alpha_1} &> \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\gamma_1} + \dots + \frac{1}{\alpha_1} - a_2, \\
 &\dots\dots\dots \\
 \left(a_1 - \frac{1}{\alpha}\right) \frac{\beta}{\beta_1} + a_3 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} &> \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\gamma_1} + \dots + \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\lambda_1} - a_2, \\
 \left(a_1 - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right) \frac{\gamma}{\gamma_1} + a_3 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} &> \frac{1}{\gamma_1} + \dots + \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\lambda_1} - a_2, \\
 &\dots\dots\dots \\
 a_1 \frac{\alpha}{\alpha_2} + a_2 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} &> \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\beta_2} + \frac{1}{\gamma_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\lambda_2} - a_3.
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 \frac{\alpha}{\beta} &> \frac{\alpha_1}{\beta_1}, & \frac{\beta}{\gamma} &> \frac{\beta_1}{\gamma_1}, & \dots & & \frac{z}{\lambda} &> \frac{z_1}{\lambda_1}; \\
 \frac{\alpha_1}{\beta_1} &> \frac{\alpha_2}{\beta_2}, & \frac{\beta_1}{\gamma_1} &> \frac{\beta_2}{\gamma_2}, & \dots & & \frac{z_1}{\lambda_1} &> \frac{z_2}{\lambda_2}.
 \end{aligned}$$

SUR LES LIGNES SINGULIÈRES DES FONCTIONS ANALYTIQUES :

PAR M. FATOU.

J'ai étudié, dans les *Acta mathematica* (t. XXX, 1906, p. 364 et suiv.), les propriétés que possèdent, au voisinage de leur cercle de convergence, les séries de Taylor qui restent bornées à l'intérieur de ce cercle et j'ai démontré que les fonctions qu'elles représentent possèdent la propriété suivante : en tous les points z_0 du cercle de la convergence, sauf au plus aux points d'un ensemble de mesure nulle, la fonction $f(z)$ tend vers une valeur déterminée quand z tend vers z_0 en restant à l'intérieur d'un angle inférieur à π ayant pour bissectrice le rayon Oz_0 .

Je me propose d'étendre cette propriété aux fonctions qui sont holomorphes ou méromorphes à l'intérieur d'un cercle C et qui de plus sont assujetties à cette condition que, lorsque z varie dans C , le point représentatif $Z = f(z)$ ne vienne jamais se placer sur un certain continu linéaire γ .

Pour abréger le langage, nous dirons qu'une fonction (analytique ou harmonique) possède la propriété $\mathcal{Q}$ en un point m d'une ligne analytique L , lorsque cette fonction supposée définie d'un certain côté de L , prend une valeur limite finie et bien déterminée quand le point représentatif tend vers m en restant à l'intérieur d'un angle inférieur à π ayant pour bissectrice la normale à L ; nous dirons qu'elle possède la propriété $\mathcal{Q}'$, si le cas d'une limite infinie n'est pas exclu, les autres hypothèses restant les mêmes.

Soit alors $F(z)$ une fonction n'ayant dans C d'autres singularités que les pôles, en nombre fini ou infini, mais telle qu'on n'ait jamais

$$F(z) = z$$

pour un point z intérieur à C , et un point z appartenant à un continu linéaire.

Soit γ ce continu; je dis qu'on peut choisir sur γ deux points A et B jouissant de la propriété suivante: lorsque le point Z varie dans son plan, sans jamais rencontrer γ (ou une partie de γ), la fonction

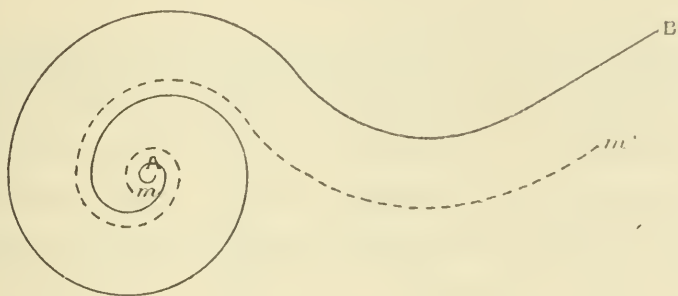
$$\frac{Z - A}{Z - B}$$

a un argument qui varie entre des limites finies.

La chose est à peu près évidente si l'on prend pour γ le segment de droite AB , ou une coupure curviligne ne présentant pas de singularités; dans ce cas, en effet, le point Z ne peut tourner qu'un nombre limité de fois autour du point A ou du point B , et tout chemin fermé qui ne contient à son intérieur aucun des deux points A et B ou qui contient ces deux points à la fois ramène l'argument à sa valeur initiale. Mais il peut en être autrement dans le cas où γ possède en A , par exemple, un point asymptote (*fig. 1*); dans ce cas, le point Z , pour aller de m en m' sans traverser γ , devra décrire la courbe ponctuée qui tourne autour de A un nombre de fois d'autant plus grand que m est plus rapproché de A ,

de sorte que l'argument de $Z - A$ peut croître indéfiniment. Comme nous pouvons toujours, dans nos raisonnements, remplacer

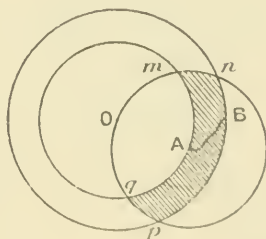
Fig. 1.



γ par une partie finie quelconque de γ , il est possible de choisir A et B de manière à éviter cette singularité ; mais lorsque l'on considère un continu quelconque, la possibilité d'un tel choix demande quelques explications.

Remarquons qu'un point asymptote d'une courbe possède cette propriété que sa distance à un point O quelconque du plan extérieur à la courbe n'est jamais un maximum ou un minimum pour

Fig. 2.



la distance du point O à un point variable de la courbe ; ceci nous amène donc à choisir un point A de la façon suivante : Soit (fig. 2) un point O extérieur à γ : la distance de O à γ possède un minimum différent de zéro et ce minimum est atteint pour un point A ; γ ne contient donc aucun point à l'intérieur du cercle de centre O et de rayon OA ; décrivons de A comme centre un cercle égal au précédent et prenons un point M de γ intérieur à ce cercle et tel qu'il existe un segment γ' de γ ayant pour extrémités A et M et qui soit tout entier à l'intérieur de ce même cercle : on déduit facilement de la définition d'un continu linéaire la possibilité d'un tel choix. Considérons alors le continu γ' : la distance de O à γ

possède un maximum qui se trouve atteint pour un certain point B; on doit supposer B différent de A, si le continu de γ' ne se réduit pas à un arc de cercle de centre O; B peut coïncider avec M ou être distinct de M; dans ce dernier cas, nous réduisons γ' au segment AB que nous appellerons c .

On voit que ce continu c doit être compris entre les deux cercles de centre O passant par A et B, et en outre intérieur au cercle de centre A passant par O. Il est donc compris à l'intérieur ou sur le contour du quadrilatère curviligne $mnpq$; dans ces conditions il est clair que le point Z ne peut tourner autour de A d'un angle surpassant 4π sans rencontrer c ; en effet, si Z décrit un chemin tel que celui de la figure 3 entourant A et non B, il existe néces-

Fig. 3.



sairement une partie rts de ce chemin qui réunit entre eux deux points du contour $mnpq$, laissant de part et d'autre les deux points A et B. Donc la ligne c qui, nous l'avons vu, est complètement intérieure à ce quadrilatère coupera nécessairement le chemin rts .

On fera un raisonnement analogue pour le point B et l'on en déduira que le point Z ne pouvant tourner que d'un angle limité autour des points A et B, l'argument de $\frac{Z-A}{Z-B}$ est lui-même limité.

Après cette digression nécessaire d'*analysis situs*, revenons à

la question qui nous intéresse, et considérons la fonction

$$G(z) = \log \left[\frac{F(z) - A}{F(z) - B} \right],$$

$F(z)$ ne prenant jamais les valeurs A et B , $G(z)$ est holomorphe et uniforme dans C , et, d'après ce qui précède, sa partie imaginaire reste bornée.

Posons

$$z = re^{i\theta}, \quad G(z) = \sum_0^{\infty} (a_n + ib_n) r^n e^{ni\theta} = P(r, \theta) + i Q(r, \theta),$$

$Q(r, \theta)$ étant bornée, la série $\Sigma(a_n^2 + b_n^2)$ est convergente (*loc. cit.*, p. 374), le rayon du cercle C étant égal à 1.

L'identité connue

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |G(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) r^{2n}$$

montre ensuite que l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{+\pi} |G(re^{i\theta})|^2 d\theta$$

a une limite finie quand r tend vers 1.

Ceci rappelé, remarquons qu'on peut choisir la constante k de manière que la fonction

$$H(z) = \frac{1}{G(z) - k}$$

soit bornée dans C ; il suffit de prendre k purement imaginaire et supérieur en module au module maximum de $Q(r, \theta)$.

A la fonction H , holomorphe et bornée dans C on peut appliquer le théorème rappelé au début de cet article : H possède la propriété $\mathfrak{O}$, *presque partout*, sur le cercle C .

Donc $G(z)$ possède presque partout la propriété $\mathfrak{O}'$ sur C . Mais l'égalité

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_{-\pi}^{+\pi} |G(re^{i\theta})|^2 d\theta = \text{quantité finie},$$

montre qu'on ne peut avoir

$$\lim_{r=1} |G(re^{i\theta})| = \infty$$

que pour un ensemble de mesure nulle de valeur de θ .

On peut donc dire que $G(z)$ possède la propriété $\mathcal{O}$ *presque partout* sur C .

L'égalité

$$F(z) = \frac{A - B e^{G(z)}}{1 - e^{G(z)}}$$

montre ensuite que $G(z)$ tendant vers une limite *finie* γ , $F(z)$ tend vers la limite bien déterminée, finie ou infinie,

$$\frac{A - B e^{\gamma}}{1 - e^{\gamma}}.$$

On peut donc dire que $F(z)$ possède la propriété $\mathcal{O}'$ *presque partout* sur le cercle C .

On peut donner un énoncé un peu plus général, en transformant l'énoncé précédent par une représentation conforme. Cet énoncé est le suivant :

Soit une ligne analytique $\mathcal{L}$ et une fonction analytique $F(z)$ définie d'un côté de $\mathcal{L}$, et n'ayant au voisinage de $\mathcal{L}$ d'autres singularités que des pôles. Supposons, en outre, que $F(z)$ ne puisse pas prendre au voisinage de $\mathcal{L}$ les valeurs d'un continu linéaire.

Cela étant, en tous les points z_0 de $\mathcal{L}$, sauf au plus aux points d'un ensemble de mesure nulle, $F(z)$ (qui a, en général, $\mathcal{L}$ comme ligne singulière essentielle) prend une valeur limite bien déterminée, finie ou infinie, quand z tend vers z_0 suivant un chemin faisant un angle fini avec $\mathcal{L}$.

On voit que la proposition démontrée par nous dans les *Acta* subsiste essentiellement si les *valeurs exceptionnelles* de la fonction, au lieu de remplir un domaine, sont distribuées sur une ligne.

On pourrait se demander si la méthode si féconde de M. Picard pour démontrer certaines propriétés des fonctions entières et qui repose, comme l'on sait, sur l'emploi de la fonction modulaire, ne

permettrait pas d'étendre le théorème aux fonctions ayant, par exemple, trois valeurs exceptionnelles. Mais l'exemple même des fonctions modulaires et fuchsienues montre qu'il existe des fonctions uniformes affectées de coupures et ayant en outre un nombre fini quelconque de valeurs exceptionnelles, qui ne possèdent en aucun point de leur coupure ou seulement en une infinité dénombrable de points, les propriétés remarquables que nous avons découvertes pour les fonctions étudiées dans cette Note.

Il est bon de rappeler, d'ailleurs, que cette étude repose essentiellement sur la connaissance des propriétés de l'intégrale de M. Lebesgue.

DES SYSTÈMES INFINIS D'ÉQUATIONS;

PAR M. A. PELLET.

I. Soient les équations

$$(1) \quad x_p^{m_p} - f_p(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (p = 1, 2, \dots, n),$$

les f_p étant des fonctions holomorphes; désignons par F_p une fonction majorante de f_p et considérons leurs n équations majorantes

$$(2) \quad X_p^{m_p} - F_p(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0,$$

m étant le plus grand des nombres m_p et $F(X)$ une fonction majorante des n fonctions

$$X^{m-m_p} F_p(X, X, \dots, X),$$

où le facteur de X^{m-m_p} n'est autre que $F_p(X_1, X_2, \dots, X_n)$ dans laquelle on a remplacé $X_1, X_2, \dots, X_n$ par X ; les valeurs positives de X qui rendent positive la fonction

$$X^m - F(X)$$

rendront aussi positives les premiers membres des n équations (2). Les équations (1) ont, dans la majorité des cas, un nombre de

systèmes de solutions égal au produit $m_1 m_2 \dots m_n$, pour chacun desquels les quantités $x_1, x_2, \dots, x_n$ ont des modules inférieurs à ξ , plus petite racine positive de l'équation $X^m - F(X) = 0$, et il n'y en a pas d'autres. Cela se voit immédiatement lorsque $n = 1$ des nombres $m_1, m_2, \dots, m_n$ sont égaux à l'unité, ou encore lorsque f_p ne contient que les p inconnues $x_1, x_2, \dots, x_p$ ($p = 1, 2, \dots, n$). Voir mon Mémoire *Sur les équations majorantes* (*Bulletin de la Société mathématique*, 1909).

2. Appliquons ceci à l'équation de Fredholm

$$\varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) \varphi(t) dt = f(s),$$

(Traité de MM. B. Heywood et Fréchet, p. 49).

On est conduit aux n équations linéaires

$$(3) \quad x_p = \delta \lambda \left[\sum_{q=2}^{q=n} x_q K(s_p, s_q) \right] + f(s_p),$$

où l'on a posé

$$s_1 = a, \quad s_2 = a + \delta, \quad \dots, \quad s_n = a + (n-1)\delta = b, \quad \delta = \frac{b-a}{n-1}$$

et

$$x_p = \varphi(s_p) \quad (p = 1, 2, \dots, n).$$

dans les équations (3) on doit omettre dans le second membre le terme correspondant à $q = p$, lorsque $K(s, s)$ est infini. Enfin on doit faire tendre n vers l'infini. Désignons par μ_s l'intégrale

$$\int_a^b |K(s, t)| dt$$

et soit μ son maximum lorsque s varie entre a et b ; par ν le maximum du module de $f(s)$ dans le même intervalle; on est conduit pour x_p à l'équation majorante

$$X - \lambda \mu X = \nu,$$

qui a une racine positive si $\lambda \mu < 1$; on suppose λ paramètre positif;

d'où, pour fonction majorante de $\varphi(s)$,

$$|f(s)| + \frac{\lambda \nu}{1 - \lambda \mu} \mu_s,$$

en développant suivant les puissances croissantes de λ .

Ce résultat se vérifie sur l'exemple de M. Picard (Traité de MM. B. Heywood et Fréchet, p. 81).

Plus généralement soit l'équation (p. 4 du Traité)

$$\varphi(M) - \lambda \int_D K(M, P) \psi[\varphi(P)] d\omega_P = f(M),$$

$\psi(x)$ étant une fonction holomorphe de x donnée, ayant pour fonction majorante $\Psi(X)$. Désignons par μ_M l'intégrale

$$\int_D |K(M, P)| d\omega_P = \mu_M,$$

par μ sa valeur maximum lorsque M varie dans le domaine D , par ν le maximum de $|f(M)|$ dans D , une équation majorante de $\varphi(M)$ dans D est

$$(4) \quad X - \lambda \mu \Psi(X) = \nu$$

et

$$|f(M)| + \mu_M X,$$

une fonction majorante de $\varphi(M)$, pour tout point M ; on peut ordonner $\varphi(M)$ suivant les puissances croissantes de λ si μ , ν , μ_M , $f(M)$ sont finies, et le rayon de convergence est au moins égal à la plus petite valeur positive λ pour laquelle l'équation (4) a une racine double.

3. Soit l'équation différentielle linéaire

$$(5) \quad \frac{d^m y}{dx^m} - \lambda \left(p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \dots + p_k \frac{d^{m-k} y}{dx^{m-k}} + \dots + p_m y \right) = 0,$$

les coefficients p étant des fonctions holomorphes de e^x et e^{-x} ,

$$p = a_0 + a_1 e^x + a_{-1} e^{-x} + \dots + a_n e^{n x} + a_{-n} e^{-n x} + \dots,$$

toutes convergentes lorsque la partie réelle de x est comprise entre R et R_1 , $R_1 > R$. Si l'on remplace x par $r + r_1 \sqrt{-1} + x$, r et r_1

étant réels, les coefficients conservent leur forme et sont convergents lorsque la partie réelle de x est comprise entre $R - r$ et $R_1 - r$, quantités de signes contraires, lorsque r est compris entre R et R_1 ; ainsi nous supposons $R < 0$ et $R_1 > 0$. Cherchons à satisfaire à cette équation par une fonction y de la forme

$$b_0 e^{\rho x} + b_1 e^{(\rho+1)x} + b_1 e^{(\rho-1)x} + \dots = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} b_n e^{(\rho+n)x},$$

ρ étant un nombre non entier et différent de zéro. Les dérivées de y seront de la même forme. Nous prendrons pour inconnue

$$y^{(m)} = \frac{d^m y}{dx^m}.$$

On aura

$$y^{(m)} = \sum b_n e^{(\rho+n)x}, \quad y^{(m-k)} = \sum b_n \frac{e^{(\rho+n)x}}{(\rho+n)^k}$$

(n variant entre $-\infty$ et $+\infty$).

Substituant dans l'équation et ordonnant, les coefficients doivent être tous nuls, ce qui donne une infinité d'équations pour les quantités b . Si l'on considère l'une d'elles, il y a un seul terme ne s'annulant pas avec λ et formé par l'une des quantités b_n ; nous désignerons cette équation par l'indice de cette quantité, qui varie d'une équation à l'autre. Supposons pour un moment connus les $2N+1$ coefficients b_n ayant un indice inférieur à N en valeur absolue. On arrive, pour les équations en nombre infini dont l'indice est en valeur absolue $\geq N$, à l'équation majorante

$$B \left[1 - \lambda \left(P_1 \frac{1}{N_1} + P_2 \frac{1}{N_1^2} + \dots + P_m \frac{1}{N_1^m} \right) \right] = Q,$$

où N_1 représente $N - |\rho|$, Q une fonction linéaire des modules des $2N+1$ quantités b_n , pour $|n| < N$, les coefficients tendant vers zéro lorsque N tend vers l'infini; P_k la somme des modules des termes de la série p_k , pour $x=0$, série qui est convergente d'après l'hypothèse faite $R < 0$ et $R_1 > 0$.

On a $B > |b_n|$, pour $n \geq N$, pourvu que le coefficient de B soit positif, ce qui, quelle que soit la valeur du paramètre positif λ , sera réalisé pour N suffisamment grand. En effet, dans le produit

$p_k y^{(m-k)}$, le coefficient de $e^{(\rho+n)x}$ est égal à

$$\sum \frac{a_\alpha b_{n-\alpha}}{(\rho + n - \alpha)^k},$$

où α entier positif ou négatif satisfait à l'inégalité

$$|n - \alpha| \geq N;$$

donc ce coefficient a un module inférieur à

$$P_k \frac{B}{N_1^k},$$

B étant le module maximum des quantités $b_n, |n| \geq N$.

Ainsi le maximum de λ étant donné, on pourra assigner N de façon que l'équation majorante des équations d'indice $|n| \geq N$ ait une racine positive; on pourra donc résoudre ces équations en ordonnant les inconnues b_n suivant les puissances croissantes de λ , sans se préoccuper de la convergence de leur déterminant. Substituant dans les $2N + 1$ équations homogènes d'indice inférieur en valeur absolue à N , on a un système de $2N + 1$ équations du premier degré à $2N + 1$ inconnues, homogènes; leur déterminant doit être nul pour qu'il y ait un système de solutions, ce qui donne une équation pour ρ ; cette équation étant satisfaite, les valeurs de $b_n, |n| < N$, seront proportionnelles aux déterminants partiels du premier ordre, supposés non nuls tous ensemble; ces déterminants sont des fonctions entières de λ .

4. Plus généralement, ρ étant une indéterminée, tirons des $2N$ équations d'indice autre que zéro, les valeurs des $b_n, N > |n| > 0$, en fonctions de b_0 ; puis substituons dans l'équation d'indice zéro, et soit $\Delta(\rho)b_0$ ce que devient le premier membre; on a

$$y^{(m)} - \lambda [p_1 y^{(m-1)} + p_2 y^{(m-2)} + \dots + p_m y] = \Delta(\rho) b_0 e^{\rho x};$$

différentions l fois par rapport à ρ ; il vient

$$y_l^{(m)} - \lambda [p_1 y_l^{(m-1)} + \dots + p_m y_l] = b_0 e^{\rho x} [\Delta(\rho).x^l + l \Delta'(\rho).x^{l-1} + \dots + \Delta^{(l)}(\rho)],$$

en posant

$$y_l = \frac{d^l y}{d\rho^l}, \quad \Delta'(\rho) = \frac{d\Delta(\rho)}{d\rho}.$$

Ainsi si ρ est une racine multiple d'ordre l de l'équation $\Delta(\rho) = 0$, $y, y_1, \dots, y_{l-1}$ sont l solutions de l'équation (5).

Si $\Delta(\rho)$ est différent de zéro, posons

$$b_0 = \frac{c}{\Delta(\rho)}, \quad \frac{y}{\Delta(\rho)} = z;$$

z est une solution de l'équation

$$(6) \quad z^{(m)} - \lambda(p_1 z^{(m-1)} + \dots + p_m z) = ce^{\rho x}$$

et

$$\frac{d^l z}{d\rho^l}$$

de l'équation (6) où l'on remplace le second membre par $ce^{\rho x}$.

Si la parenthèse de l'équation (5) contenait un terme en $y^{(m)}$, si l'on avait l'équation

$$y^{(m)} - \lambda[p y^{(m)} + p_1 y^{(m-1)} + \dots + p_m y] = 0,$$

le nouveau coefficient p étant de la même forme que les autres et, comme eux, convergent pour partie réelle de x comprise entre R et R_1 , ce qui précède serait applicable, mais seulement pour les valeurs de λ inférieures à $\frac{1}{P}$, P étant la somme des modules des coefficients de p .

§. Une solution du problème qui précède a été donnée par M. Poincaré (*Bulletin de la Société mathématique*, t. XIV, p. 77) dans le cas de $m = 2$, et sa méthode a été étendue au cas général par M. Helge von Koch (*Acta mathematica*, t. XV et t. XVIII).

Mais la méthode actuelle, plus simple, est applicable à des équations linéaires aux dérivées partielles analogues, équations qu'on pourrait aussi bien appeler équations aux intégrales partielles.

Soit

$$u = \sum_m \sum_n a_{m,n} e^{(\rho+m)x + (\rho_1+n)y},$$

les sommes s'étendant à toutes les valeurs entières positives et négatives de m et de n . Désignons par $u^{(\alpha, \beta)}$ une fonction de même forme ayant pour dérivée $\alpha^{\text{ième}}$ par rapport à x , et $\beta^{\text{ième}}$ par

rapport à y la fonction u :

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} u(x, y)}{\partial x^{\alpha} \partial y^{\beta}} = u,$$

$$u(x, y) = \sum_m \sum_n a_{m,n} \frac{e^{(\rho+m)x + (\rho_1+n)y}}{(\rho+m)^{\alpha} (\rho_1+n)^{\beta}},$$

ρ et ρ_1 indéterminés non entiers positifs ou négatifs, ni nuls.

Considérons les p équations

$$(7) \quad z_i - \lambda f_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p),$$

les f_i étant des fonctions homogènes et du premier degré des quantités $z_j^{(\alpha, \beta)}$ ($j = 1, 2, \dots, p$) et $\alpha + \beta \geq 1$; de plus les coefficients sont des fonctions de la forme précédente, en y faisant $\rho = \rho_1 = 0$,

$$\sum_m \sum_n a_{m,n} e^{m.x + n.y},$$

ces séries étant toutes convergentes pour partie réelle de x comprise entre $-R$ et R_1 , et de y comprise entre $-R'$ et R'_1 , R, R_1, R', R'_1 étant des quantités positives.

Cherchons à satisfaire aux équations (7) par des fonctions de la forme de u ,

$$z_i = \sum_m \sum_n b_{m,n}^{(i)} e^{(\rho+m)x + (\rho_1+n)y};$$

on est conduit à une infinité d'équations entre les indéterminés $b_{m,n}^{(i)}$ qui se réduisent respectivement à l'une de ces quantités pour $\lambda = 0$. Regardons pour un moment comme connue l'une des quantités $b_{00}^{(0)}$ par exemple, et mettons de côté l'équation qui se réduit à $b_{00}^{(0)}$ pour $\lambda = 0$; les équations restantes permettent de développer les autres quantités $b_{m,n}^{(i)}$ suivant les puissances croissantes de λ ; ces développements sont des fonctions entières de λ , convergents quelle que soit λ . Substituant dans l'équation mise à part, on est conduit à une relation entre ρ et ρ_1 , et $b_{00}^{(0)}$ peut être pris arbitrairement.

6. La méthode peut s'appliquer à des équations ne pouvant se ramener à la forme précédente; ainsi à l'équation

$$a_0 \frac{\partial^{2p} z}{\partial x^{2p}} + a_1 \frac{\partial^{2p} z}{\partial x^{2p-1} \partial y} + \dots + a_k \frac{\partial^{2p} z}{\partial x^{2p-k} \partial y^k} + \dots + a_{2p} \frac{\partial^{2p} z}{\partial y^{2p}} - u z = 0,$$

si elle est à caractéristiques imaginaires, c'est-à-dire si l'équation

$$\alpha_0 r^{2p} + \alpha_1 r^{2p-1} + \dots + \alpha_k r^{2p-k} + \dots + \alpha_{2p} = 0$$

n'a que des racines imaginaires, u étant toujours une fonction de la forme

$$\sum \sum a_{m,n} e^{mx+ny},$$

m et n prenant toutes les valeurs entières positives et négatives.

Si l'on ne considère que les fonctions u régulières, c'est-à-dire si m et n ne prennent que les valeurs entières positives ou nulles, la méthode s'applique à l'équation

$$\alpha_0 \frac{\partial^p z}{\partial x^p} + \alpha_1 \frac{\partial^p z}{\partial x^{p-1} \partial y} + \dots + \alpha_p \frac{\partial^p z}{\partial y^p} - \lambda f = 0,$$

f étant une fonction linéaire et homogène des dérivées de z d'ordre inférieur à p , ayant par conséquent

$$1 + 2 + 3 + \dots + p = \frac{p(p+1)}{2} \text{ termes,}$$

les coefficients étant des fonctions régulières de x et y pourvu que l'équation

$$\alpha_0 r^p + \alpha_1 r^{p-1} + \dots + \alpha_p = 0$$

n'ait pas de racine positive.

Enfin on peut étendre la méthode aux fonctions d'un nombre quelconque de variables.

SUR LES SYSTÈMES DE LAGRANGE A PARAMÈTRE PRINCIPAL;

PAR M. ÉT. DELASSUS.

1. Nous dirons qu'un système S_2 de n équations différentielles du second ordre définissant n paramètres $a, b_1, \dots, b_{n-1}$ en fonction de la variable t est à paramètre principal a , s'il possède n intégrales premières

$$(1) \quad \theta_1 = C_1, \quad \dots, \quad \theta_n = C_n,$$

où les paramètres secondaires b ne figurent que par leurs dérivées b' . L'élimination des b' entre les équations (1) fournira immédiatement l'équation principale

$$(2) \quad F(a, a', t, C_1, \dots, C_n) = 0$$

déterminant a et fournissant l'intégration complète de S_2 par quadratures chaque fois qu'elle sera elle-même intégrable par quadratures, ce qui arrivera, par exemple, quand les n intégrales seront indépendantes de t , car cette variable ne figurera évidemment pas alors dans l'équation principale.

2. Nous donnant *a priori* l'équation (2), on peut évidemment trouver d'une infinité de façons des fonctions θ de a , de a' , de t et de $n - 1$ autres paramètres $b'_1, \dots, b'_n$ telles que F résulte de l'élimination des b' entre les équations (1), puis former un système S_2 admettant ces n intégrales premières; donc, *l'équation principale peut être une équation absolument quelconque.*

3. Le système S_2 est équivalent au système S'_2 déduit de (1) par dérivation, ce qui n'introduit pas les b et donne pour les a'' , $b''_1, b''_2, \dots, b''_{n-1}$ des expressions contenant a , a' , t et les b' ; réciproquement, soit un système de la forme

$$(S_2) \quad \begin{cases} a'' = A(a, a', b', t), \\ b''_i = B_i(a, a', b', t) \quad (i = 1, 2, \dots, n - 1). \end{cases}$$

On obtiendra des intégrales premières indépendantes des b comme solutions de l'équation linéaire

$$(3) \quad \frac{\partial \theta}{\partial a'} A + \sum \frac{\partial \theta}{\partial b'_i} B_i + \frac{\partial \theta}{\partial a} a' + \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0.$$

Comme cette équation est à $n + 2$ variables, on peut, d'une infinité de façons, trouver un système de n intégrales principales, c'est-à-dire indépendantes des b . Le même système pourra donc donner naissance à une infinité d'équations principales.

4. Soit un groupe de $n - 1$ intégrales principales

$$(G) \quad \theta_1 = C_1, \quad \dots, \quad \theta_{n-1} = C_{n-1},$$

c'est-à-dire satisfaisant à l'équation (3).

Soit θ une $n^{\text{ième}}$ intégrale principale quelconque. Les équations G définissent les b' en fonction de $a, a', t, C_1, \dots, C_{n-1}$ et en portant dans la $n^{\text{ième}}$ intégrale

$$\theta = C,$$

on a évidemment l'équation principale correspondante

$$(4) \quad F(a, a', t, C_1, \dots, C_{n-1}) = C.$$

Tout système de fonctions $a, b'_1, \dots, b'_{n-1}$ vérifiant (S_2) vérifiera, pour des valeurs convenables de $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}, C$, les équations (G), (4) et la première équation de S_2 , donc aussi toutes les équations qu'on pourra en déduire par dérivations et combinaisons. En particulier, il vérifiera l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial a} a' + \frac{\partial F}{\partial a'} a'' + \frac{\partial F}{\partial t} = 0,$$

déduite de (4) par dérivation, et l'équation

$$(5) \quad a'' = \mathfrak{A}(a, a', t, C_1, \dots, C_{n-1})$$

obtenue en portant dans la première équation de (S_2) les valeurs des b' fournies par les équations (G) et, par suite, l'équation

$$(6) \quad \frac{\partial F}{\partial a} a' + \frac{\partial F}{\partial a'} \mathfrak{A} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

qui en résulte par élimination de a'' .

C'est une identité en t , mais comme S_2 admet une solution correspondant à des valeurs arbitraires de $C_1, \dots, C_{n-1}$ et à des valeurs initiales quelconques a_0, a'_0 pour $t = t_0$, c'est, en réalité, une identité par rapport à toutes les variables $a, a', t, C_1, \dots, C_{n-1}$. Nous l'appellerons *l'équation fondamentale du groupe G* et nous remarquerons immédiatement qu'elle exprime ce fait presque intuitif que *toute équation principale obtenue en complétant le groupe G au moyen d'une $n^{\text{ième}}$ intégrale principale est une intégrale première de l'équation*

$$a'' = \mathfrak{A}(a, a', t, C_1, \dots, C_{n-1}),$$

à laquelle se réduit (S_2) en vertu des intégrales (G).

5. Étudions le cas important des équations principales indé-

pendantes de t , cas dans lequel on a l'intégration de (S_2) par quadratures.

Pour que (G) puisse, par adjonction d'une $n^{\text{ième}}$ intégrale principale, fournir une telle équation principale, il faut que l'équation fondamentale de G admette des intégrales indépendantes de t , ce qui exige manifestement que t ne figure pas dans $\mathcal{A}$. Nous désignerons par (Γ) les groupes (G) satisfaisant à cette condition. Les équations principales indépendantes de t seront alors fournies par l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} \alpha' + \frac{\partial F}{\partial \alpha'} \mathcal{A}_0 = 0$$

qui admet une intégrale indépendante de t , soit

$$f(\alpha, \alpha', C_1, \dots, C_{n-1})$$

et donne

$$F = \Phi(f, t, C_1, \dots, C_{n-1}).$$

F ne doit pas contenir t qui, ne figurant pas dans f , ne doit pas figurer dans Φ ; les équations principales indépendantes du temps sont donc de la forme

$$\Phi(f, C_1, \dots, C_{n-1}) = C$$

et se réduisent toutes à l'équation unique

$$f = \text{const.}$$

Ainsi : toutes les équations principales indépendantes de t qui peuvent être obtenues au moyen d'un même groupe (Γ) se réduisent à une seule.

Si l'on remarque que l'équation principale n'est que l'intégrale complémentaire

$$\theta = C,$$

réduite au moyen des intégrales (Γ) , on voit que les intégrales principales susceptibles de fournir avec (Γ) une équation principale indépendante de t se réduisent toutes, en vertu des intégrales (Γ) à la même relation

$$f(\alpha, \alpha', C_1, \dots, C_{n-1}) = \text{const.}$$

6. Appliquons ces généralités aux systèmes (S_2) satisfaisant aux conditions suivantes :

1° A est une forme quadratique, homogène ou non, de a' et des b' ;

2° (S_2) possède un système (Γ) d'intégrales principales linéaires;

3° (S_2) possède une intégrale principale J algébrique et entière par rapport à a' , $b'_1, \dots, b'_n$;

4° Les intégrales (Γ) et J conduisent à une équation principale indépendante de t .

Les intégrales (Γ) fournissent les b' fonctions linéaires de a' et, en portant dans J , on a une équation principale

$$F(a, a', C_1, \dots, C_{n-1}) = C,$$

dont le premier membre est un polynôme entier en a' satisfaisant à

$$(7) \quad \frac{\partial F}{\partial a} a' + \frac{\partial F}{\partial a'} \mathfrak{A} = 0,$$

$\mathfrak{A}$ étant ici un polynôme du second degré en a'

$$\mathfrak{A} = \alpha a'^2 + \beta a' + \gamma,$$

à coefficients fonctions de a , $C_1, \dots, C_{n-1}$.

Supposons d'abord que le groupe (Γ) soit tel qu'on ait

$$\gamma = 0,$$

l'équation (7) se réduit à

$$\frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial a'} (\alpha a' + \beta) = 0$$

et possède une intégrale linéaire en a'

$$f = \lambda a' + \mu,$$

donc

$$F = \Phi(\lambda a' + \mu),$$

et l'équation principale algébrique et entière à l'inconnue a' possède la propriété de se transformer en une équation à coefficients constants par un simple changement linéaire d'inconnue. Dans ce cas, on peut dire que l'intégrale J ou bien est linéaire, ou bien est réductible à une relation linéaire en vertu des intégrales (Γ) .

Supposons en second lieu que (Γ) ne donne pas un coefficient γ identiquement nul. L'équation (7) est alors

$$\frac{\partial F}{\partial a'}(2a'^2 + \beta a' + \gamma) = -a' \frac{\partial F}{\partial a},$$

les deux membres sont des polynômes entiers en a' , le second contient a' en facteur et comme γ n'est pas nul, a' doit être en facteur dans $\frac{\partial F}{\partial a'}$, ce qui revient à dire que F ne contient pas de terme du premier degré en a' , donc :

Si l'intégrale J n'est pas réductible à la forme linéaire au moyen des intégrales (Γ) , le terme du premier degré en a' n'existe jamais dans l'équation principale supposée indépendante de t .

En particulier :

Si une intégrale quadratique, non réductible à la forme linéaire au moyen des intégrales (Γ) , fournit une équation principale indépendante de t , cette équation est de la forme

$$a'^2 = \Psi(a, C_1, \dots, C_{n-1}, C).$$

II.

7. Les équations de Lagrange du mouvement d'un système holonome soumis à des forces ne dépendant que de la position sont de la forme considérée dans la première partie. Mises sous forme résolue, elles donnent des fonctions A et B_i qui sont toutes quadratiques par rapport aux q' . Donc, elles sont dans le cas particulier qui a été examiné en dernier lieu. Nous pourrions donc dire :

Si un système de Lagrange possède $n - 1$ intégrales linéaires et une intégrale quadratique indépendantes des $n - 1$ paramètres $b_1, \dots, b_{n-1}$ et conduisant à une équation principale indépendante du temps, cette équation est de la forme

$$a'^2 = \Psi(a)$$

ou de la forme

$$\alpha(\lambda a' + \mu)^2 + \beta(\lambda a' + \mu) + \gamma = 0,$$

α, β, γ étant des constantes et λ, μ des fonctions de a .

8. Additionnons les équations de Lagrange après les avoir respectivement multipliées par les q' correspondants et convenons de dire qu'on a *l'intégrale des forces vives* chaque fois que cette combinaison sera une dérivée exacte. On peut l'écrire en décomposant la force vive $2T$ en groupes homogènes

$$\frac{d}{dt}(T_2 - T_0) + \frac{\partial T}{\partial t} - \Sigma Q q' = 0,$$

il faudra donc supposer

$$(8) \quad \frac{\partial T}{\partial t} - \Sigma Q q' = \frac{d\Omega}{dt},$$

et l'intégrale des forces vives, sous sa forme générale, sera

$$(9) \quad T_2 - T_0 + \Omega = C.$$

9. La condition (8) exige que T_2 ne contienne pas t et que l'on ait

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} - \Sigma Q q' = \frac{\partial \Omega}{\partial t},$$

en désignant par $\frac{\partial}{\partial t}$ la dérivée prise en ne tenant pas compte du t qui peut figurer explicitement.

Nous conviendrons de dire qu'un système de Lagrange est un système à fonction V si T_2 est indépendant de t et si la quantité

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} - \Sigma Q q'$$

est la dérivée exacte $\frac{\partial}{\partial t}$ d'une fonction des q et de t , fonction que nous conviendrons de toujours représenter par la lettre V .

Nous considérerons ces systèmes en même temps que les systèmes à fonction U définis par la condition

$$\Sigma Q q' = \frac{\partial U}{\partial t}.$$

10. On sait qu'un système à fonction U possède une infinité de fonctions génératrices G

$$G = T + U + \frac{d\theta}{dt},$$

0 fonction arbitraire des q et de t , permettant de l'écrire sous la forme

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial G}{\partial q'_i} \right) - \frac{\partial G}{\partial q_i} = 0.$$

Considérons de même un système à fonction V . L'égalité de définition

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} - \Sigma Q q' = \frac{\partial V}{\partial t}$$

donne

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial T_1}{\partial q'_i} - Q_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}$$

ou, puisque T_2 ne contient pas T et que T_0 ne contient pas les q' ,

$$Q_i = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial T}{\partial q'_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i}.$$

Portant ces expressions des Q_i dans les équations de Lagrange, celles-ci deviennent

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q'_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial q'_i} \right) - \frac{\partial V}{\partial q_i}$$

ou

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial (T - V)}{\partial q'_i} \right] - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial (T - V)}{\partial q'_i} - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_i} = 0$$

ou enfin

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial (T - V)}{\partial q'_i} \right] - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_i} = 0.$$

Si alors on pose

$$\Gamma = T - V + \frac{\partial \theta}{\partial t} + f(t),$$

0 étant une fonction arbitraire des q et de t et $f(t)$ une fonction arbitraire de t , les équations de Lagrange s'écriront sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial q'_i} \right) - \frac{\partial \Gamma}{\partial q_i} = 0.$$

Les systèmes à fonction V possèdent donc des fonctions génératrices Γ donnant une forme canonique analogue à celle des systèmes à fonction U , mais où l'opération $\frac{d}{dt}$ est remplacée par l'opération $\frac{\partial}{\partial t}$.

11. Les systèmes à intégrale des forces vives sont forcément des systèmes à fonction V , mais la condition (8) montre alors que l'on a

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t}.$$

si donc on prend

$$\Gamma = T - V$$

et si l'on décompose en groupes homogènes, on aura

$$\Gamma_2 = T_2,$$

$$\Gamma_1 = T_1,$$

$$\Gamma_0 = T_0 - V,$$

de sorte que Γ_0 sera, comme Γ_2 , indépendante de t . En outre, au moyen de cette fonction Γ , l'intégrale (9) des forces vives s'écrira simplement

$$\Gamma_2 - \Gamma_0 = \text{const.}$$

qui met en évidence le fait que *l'intégrale des forces vives est toujours indépendante de t* .

Réciproquement, partons du système à fonction V , écrit au moyen d'une quelconque de ses fonctions génératrices Γ et effectuons la combinaison des forces vives

$$\Sigma q' \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial q'} \right) - \frac{\partial \Gamma}{\partial q} \right] = 0,$$

on aura

$$\frac{\partial}{\partial t} \Sigma q' \frac{\partial \Gamma}{\partial q'} - \left[\Sigma q'' \frac{\partial \Gamma}{\partial q'} + \Sigma q' \frac{\partial \Gamma}{\partial q} \right] = 0$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial t} \Sigma q' \frac{\partial \Gamma}{\partial q} - \frac{\partial \Gamma}{\partial t} = 0$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\Sigma q' \frac{\partial \Gamma}{\partial q} - \Gamma \right) = 0$$

ou enfin

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Gamma_2 - \Gamma_0) = 0.$$

Si on l'écrit

$$\frac{d}{dt} (\Gamma_2 - \Gamma_0) + \frac{\partial \Gamma_0}{\partial t} = 0,$$

puisque Γ_2 ne contient pas t , on voit que la condition nécessaire et suffisante d'existence de l'intégrale des forces vives est que

$\frac{\partial \Gamma_0}{\partial t}$ soit une dérivée exacte et, comme elle ne contient pas les q' , il faut que ce soit une fonction de t seulement, soit

$$\frac{\partial \Gamma_0}{\partial t} = f(t),$$

et alors, la nouvelle fonction génératrice

$$\Gamma - \int f(t) dt$$

ne contiendra plus t dans sa portion de degré zéro. Ainsi :

Pour qu'un système à fonction V possède l'intégrale des forces vives, il faut et il suffit qu'il possède une fonction génératrice Γ ne contenant le temps que dans sa portion Γ_1 et alors, au moyen de cette fonction Γ , l'intégrale des forces vives s'écrit

$$\Gamma_2 - \Gamma_0 = \text{const.},$$

théorème qui est l'analogie du suivant démontré ailleurs ⁽¹⁾ :

Pour qu'un système à fonction U possède l'intégrale des forces vives, il faut et il suffit qu'il possède une fonction génératrice G ne contenant pas le temps, et alors l'intégrale des forces vives s'écrit, au moyen de cette fonction G ,

$$G_2 - G_0 = \text{const.}$$

Ajoutons enfin la remarque bien évidente qui suit : si un système à fonction V possède une fonction génératrice Γ indépendante du temps, c'est, en même temps, un système à fonction U car, pour une telle fonction Γ , l'opération $\frac{\delta}{\delta t}$ est équivalente à l'opération $\frac{d}{dt}$ et les équations ainsi écrites montrent que Γ est une fonction G , de sorte qu'il existe bien une fonction U .

12. La forme générale

$$\frac{\delta}{\delta t} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial q_i} \right) - \frac{\partial \Gamma}{\partial q_i} = 0 \quad (\Gamma_2 \text{ et } \Gamma_0 \text{ indépendants de } t),$$

$$\Gamma_2 - \Gamma_0 = h$$

⁽¹⁾ ET. DELASSUS, *Sur les forces vives équivalentes* (Nouvelles Annales de Mathématiques, 1912).

des systèmes à intégrale des forces vives et de cette intégrale va nous permettre d'étudier complètement *les systèmes de Lagrange à intégrale des forces vives et à paramètre principal mis en évidence par cette intégrale des forces vives et par $n - 1$ intégrales linéaires indépendantes du temps.*

Alors Γ_2 et Γ_0 ne contiennent ni t ni les b ; Γ_0 est une fonction de a et Γ_2 est de la forme

$$2\Gamma_2 = A a'^2 + 2a' P_1(b') + P_2(b'),$$

P_1 polynome homogène du premier degré aux b' , P_2 polynome homogène du second degré aux b' ; A , les coefficients de P_1 et ceux de P_2 étant des fonctions de a .

Nous savons *a priori* que l'équation principale obtenue sera indépendante du temps et de l'une des deux formes

$$a'^2 = F(a),$$

$$\alpha(\lambda a' + \mu)^2 + \beta(\lambda a' + \mu) + \gamma = 0 \quad (\alpha, \beta, \gamma \text{ constantes})$$

que, pour des raisons qui apparaîtront ultérieurement, nous appellerons *forme normale* et *forme accidentelle*.

Soient

$$(10) \quad I_1 = C_1, \quad \dots, \quad I_{n-1} = C_{n-1}$$

les $n - 1$ intégrales linéaires et

$$(11) \quad \frac{dI_1}{dt} = 0, \quad \dots, \quad \frac{dI_{n-1}}{dt} = 0$$

les équations du second ordre qu'on en tire par dérivation.

Des équations (10) nous tirerons les b' sous la forme

$$(12) \quad b'_i = \lambda_i a' + \mu_i,$$

les λ étant des fonctions de a et les μ des fonctions linéaires des C à coefficients fonctions de a telles que a étant considéré comme donné, on puisse déterminer les C de façon que les μ prennent des valeurs arbitrairement choisies. Portons les b' dans l'intégrale des forces vives

$$\Gamma_2 - \Gamma_0 = h$$

et cherchons les conditions pour que le coefficient de a' soit nul,

quels que soient les C. Il suffit de substituer dans Γ_2 , on aura

$$\Gamma_2(\alpha', \lambda \alpha' + \mu),$$

et si l'on pose

$$\Gamma_2(1, \lambda) = \Lambda,$$

le coefficient de α' sera

$$\sum \mu \frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda}$$

et ne pourra être nul, quels que soient les C, que si l'on a

$$(13) \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda_1} = 0, \quad \dots \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda_{n-1}} = 0.$$

Considérons les équations (11) du second ordre; en les résolvant par rapport aux b'' , on en tirera

$$(14) \quad b''_i = \lambda_i \alpha'' + \dots,$$

les λ étant ceux des formules (12). Portons dans l'équation de Lagrange qui correspond à un b quelconque et cherchons le coefficient de α'' ; il faudra prendre

$$\frac{\partial \Gamma_2}{\partial b'_k},$$

y remplacer α' et les b' par α'' et les b'' , puis les b'' par les $\lambda \alpha''$. Le coefficient de α'' sera alors $\frac{\partial \Gamma_2}{\partial b'_k}$ où l'on aura remplacé α' par 1 et les b' par les λ , c'est-à-dire

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda_k}$$

donc sera nul. En vertu des équations (11), les équations de Lagrange qui correspondent aux b se réduisent à des relations du premier ordre, c'est-à-dire à des identités, puisque leurs paramètres et leurs dérivées premières peuvent être prises arbitrairement. Donc :

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation principale soit de la forme normale est que les $n - 1$ intégrales linéaires résultent de combinaisons faites uniquement sur les $n - 1$ équations de Lagrange qui correspondent aux paramètres secondaires b .

Et, par exclusion :

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation principale soit de la forme accidentelle est que, parmi les $n-1$ intégrales linéaires, il y en ait au moins une qui résulte d'une combinaison où figure effectivement l'équation de Lagrange qui correspond au paramètre a .

Commençons par étudier la forme accidentelle.

Soient

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}(\Gamma) &= \frac{\delta}{\delta t} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial a'} \right) - \frac{\partial \Gamma}{\partial a} = 0, \\ \mathfrak{B}_i(\Gamma) &= \frac{\delta}{\delta t} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial b'_i} \right) - \frac{\partial \Gamma}{\partial b_i} = 0\end{aligned}$$

les équations de Lagrange. Il existe alors une intégrale

$$I = \xi a' + \Sigma \eta b' + \zeta = \text{const.}$$

telle que l'on ait identiquement

$$\frac{dI}{dt} = \mu \mathfrak{A}(\Gamma) + \Sigma \lambda_i \mathfrak{B}_i(\Gamma)$$

avec

$$\mu \neq 0.$$

Si l'on groupe les termes par ordre, on voit immédiatement que cette identité se décompose en trois autres

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\xi a' + \Sigma \eta b') &= \mu \mathfrak{A}(\Gamma_2) + \Sigma \lambda_i \mathfrak{B}_i(\Gamma_2), \\ \frac{d\xi}{da} a' &= \mu \mathfrak{A}(\Gamma_1) + \Sigma \lambda_i \mathfrak{B}_i(\Gamma_1), \\ 0 &= \mu \mathfrak{A}(\Gamma_0) + \Sigma \lambda_i \mathfrak{B}_i(\Gamma_0).\end{aligned}$$

Comme Γ_2 ne contient ni t ni les b , la première montre, par identification des coefficients de a'' et des b'' , que μ et les λ sont indépendants de t et des b , ce sont des fonctions de a .

On a

$$\mu \mathfrak{A}(\Gamma_2) + \Sigma \lambda_i \mathfrak{B}_i(\Gamma_2) = \mu \frac{\delta}{\delta t} \left(\frac{\partial \Gamma_2}{\partial a'} \right) + \Sigma \lambda_i \frac{\delta}{\delta t} \left(\frac{\partial \Gamma_2}{\partial b'_i} \right) - \mu \frac{\partial \Gamma_2}{\partial a};$$

le premier terme et le second ne donnent que des termes en a'' , des termes aux b'' et des termes du second degré contenant a' en facteur; les seuls termes quadratiques aux b' proviennent de $\frac{\partial \Gamma_2}{\partial a}$ et

pas, de la forme

$$2\Gamma = 2G = \Lambda a'^2 + 2a'P_1 + P_2,$$

P_2 étant à coefficients constants. Réciproquement G étant indépendant des b , un tel système admet les intégrales principales immédiates fournies par les équations relatives aux b

$$\frac{\partial G}{\partial b'_1} = C_1, \quad \dots, \quad \frac{\partial G}{\partial b'_n} = C_n,$$

de sorte qu'en employant ces intégrales visibles *a priori* on est fatalement dans le cas de l'équation principale de forme normale. Pour obtenir une équation de forme accidentelle, il faut ne pas employer ces intégrales qui résultent uniquement des équations $\mathfrak{B}(\Gamma) = 0$. Effectivement il existe une autre intégrale. En effet, les équations de Lagrange sont toutes de la forme

$$R_1(b'') + H a'' + K a'^2 = 0,$$

les R_1 étant des fonctions linéaires à coefficients constants, les H et les K des fonctions de a . Si l'on fait une combinaison linéaire à coefficients constants de façon à éliminer les b'' on tombe sur une équation de la forme

$$f(a)a'' + \varphi(a)a'^2 = 0,$$

qui, bien visiblement, admet une intégrale linéaire de la forme

$$\psi(a)a' = \text{const.}$$

Cette $n^{\text{ième}}$ intégrale première est en réalité l'équation principale qu'on obtient ainsi sous forme linéaire sans passer par l'intégrale des forces vives.

Ainsi : *Lorsqu'un système est dans le cas qui pourrait conduire à la forme accidentelle de l'équation principale, il possède $n - 1$ intégrales immédiates au moyen desquelles il se trouve forcément dans le cas de la forme normale de l'équation principale.*

14. Étudions maintenant le cas où l'on a forcément la forme normale, c'est-à-dire où les $n - 1$ intégrales linéaires sont des conséquences des équations $\mathfrak{B}_i(\Gamma) = 0$; les identités analogues à celles

du cas précédent se réduisent aux deux premières

$$\frac{d}{dt}(\xi a' + \Sigma \eta b') = \Sigma \lambda_i \mathfrak{W}_i(\Gamma_2) = \Sigma \lambda_i \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Gamma_2}{\partial b'_i} \right) = \frac{d}{dt} \Sigma \lambda_i \frac{\partial \Gamma_2}{\partial b'_i} - a' \Sigma \frac{d\lambda_i}{da} \frac{\partial \Gamma_2}{\partial b'_i},$$

$$\frac{d\xi}{da} a' = \Sigma \lambda_i \mathfrak{W}_i(\Gamma_1),$$

la première montre que

$$a' \Sigma \frac{d\lambda_i}{da} \frac{\partial \Gamma_2}{\partial b'_i}$$

doit être une dérivée exacte d'une forme linéaire de a' et des b' à coefficients fonctions de a , ce qui est absurde puisqu'elle ne contient pas les dérivées secondes et elle ne peut pas être la dérivée d'une fonction de a et des b puisqu'elle est quadratique aux a' , b' , elle doit être nulle, donc les $\frac{d\lambda}{da}$ sont nuls et les λ sont des constantes.

Les quantités $\mathfrak{W}_i(\Gamma)$ possèdent donc $n - 1$ combinaisons linéaires distinctes et à coefficients constants qui sont des dérivées exactes de sorte que ces $n - 1$ quantités elles-mêmes sont des dérivées exactes.

On a

$$\mathfrak{W}_i(\Gamma) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Gamma_2}{\partial b'_i} \right) + \mathfrak{W}_i(\Gamma_1),$$

donc les $\mathfrak{W}_i(\Gamma_1)$ sont des dérivées exactes. Or, l'identité des forces vives pour Γ_1

$$a' \mathfrak{A}(\Gamma_1) + \Sigma b'_i \mathfrak{W}_i(\Gamma_1) = 0$$

montre que, quels que soient les b' , la quantité

$$\Sigma b'_i \mathfrak{W}_i(\Gamma_1)$$

doit être divisible par a' . Il faut donc que tous les $\mathfrak{W}_i(\Gamma_1)$ contiennent a' en facteur, et, comme ce sont des dérivées exactes, ce sont les dérivées de fonctions de a seulement

$$\mathfrak{W}_1(\Gamma_1) = \frac{d}{dt} \omega_1(a), \quad \dots, \quad \mathfrak{W}_{n-1}(\Gamma_1) = \frac{d}{dt} \omega_{n-1}(a).$$

Posons alors

$$\Phi = \Gamma_1 - \Sigma \omega_i b'_i,$$

on aura

$$\mathfrak{W}_1(\Phi) = 0, \quad \dots, \quad \mathfrak{W}_{n-1}(\Phi) = 0$$

et, en vertu de l'identité des forces vives pour Φ ,

$$\mathfrak{L}_b(\Phi) = 0.$$

Il en résulte que Γ_1 et $\Sigma \omega_i b'_i$ donneront les mêmes termes dans les équations de Lagrange de sorte que le système possédera une fonction génératrice Γ

$$\Gamma_2 + \Sigma \omega_i b'_i + \Gamma_0$$

indépendante de t et des b . Ce sera aussi une fonction G . Ainsi, et en tenant compte du résultat du paragraphe précédent, nous pouvons dire :

Les seuls systèmes qui sont à paramètre principal, au moyen de l'intégrale des forces vives et de $n - 1$ intégrales linéaires indépendantes du temps, sont les systèmes à fonction U possédant une fonction génératrice G indépendante de t et des b . Cette fonction met en évidence et d'une façon immédiate l'intégrale des forces vives et $n - 1$ intégrales linéaires, et l'équation principale déduite de ces n intégrales est toujours de la forme normale.

On peut dire plus simplement que les systèmes possédant cette propriété sont forcément dans le cas régulier d'intégration par quadratures ⁽¹⁾ et l'on peut remarquer, à un point de vue pratique, qu'il n'est pas nécessaire de chercher la fonction G indépendante de t et des b . Quelle que soit cette fonction G , les équations de Lagrange sont les mêmes, le changement de fonction G ne fait que modifier le groupement de leurs termes. Si l'on constate qu'on a l'intégrale des forces vives, que les équations relatives aux b sont des dérivées exactes et que toutes ces intégrales sont indépendantes de t et des b , on sera assuré d'obtenir, par élimination des b' , une équation principale de forme normale.

15. Les systèmes de Lagrange à intégrale des forces vives et dont $n - 1$ équations sont des dérivées exactes possèdent des propriétés intéressantes. Désignons par $b_1, \dots, b_{n-1}$ les paramètres qui correspondent à ces équations et par a le $n^{\text{ième}}$ paramètre. Par hypothèse Γ_2 et Γ_0 sont indépendants du temps.

(¹) EL. DELASSUS, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1912.

Et

$$\mathfrak{W}_i(\Gamma) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial b'_i} \right) - \left[\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Gamma_1}{\partial b'_i} + \frac{\partial \Gamma_2}{\partial b_i} + \frac{\partial \Gamma_1}{\partial b_i} + \frac{\partial \Gamma_0}{\partial b_i} \right]$$

doit être une dérivée exacte, de sorte que le crochet doit aussi être une dérivée exacte, ce qui exige qu'il ne contienne pas de termes quadratiques $\frac{\partial \Gamma_2}{\partial b_i}$; donc Γ_2 doit être indépendant des b .

$\mathfrak{W}_i(\Gamma_2)$ est alors une dérivée exacte, donc les quantités

$$\mathfrak{W}_i(\Gamma_1 + \Gamma_0),$$

c'est-à-dire

$$\mathfrak{W}_i(\Gamma_1) - \frac{\partial \Gamma_0}{\partial b_i},$$

doivent être des dérivées exactes de fonctions ω_i de α , des b et de t . On aura donc

$$\begin{aligned} \mathfrak{W}_i(\Gamma_1) &= \frac{\partial \omega_i}{\partial t}, \\ - \frac{\partial \Gamma_0}{\partial b_i} &= \frac{\partial \omega_i}{\partial t}. \end{aligned}$$

D'après l'identité des forces vives pour Γ_1 les $\mathfrak{W}_i(\Gamma_1)$ doivent contenir α' en facteur, donc les ω_i ne contiennent pas les b et d'autre part, comme Γ_0 ne contient pas t , les $\frac{\partial \omega_i}{\partial t}$ sont indépendants de t et les ω_i sont de la forme

$$\omega_i = k_i t + h_i,$$

les k et les h étant des fonctions de α . Il en résulte

$$\frac{\partial \Gamma_0}{\partial b_i} = -k_i,$$

donc

$$\Gamma_0 = k_0 - \sum k_i b_i,$$

k_0 étant une nouvelle fonction de α .

Posons

$$\Phi = \Gamma_1 - \sum \omega_i b'_i.$$

On aura

$$\mathfrak{W}_i(\Phi) = \mathfrak{W}_i(\Gamma_1) - \frac{\partial \omega_i}{\partial t} = 0.$$

Les $\mathfrak{W}_i(\Phi)$ étant nuls, l'identité des forces vives pour Φ montre que $\mathfrak{A}(\Phi)$ est aussi nulle, de sorte que Γ_1 et $\sum \omega_i b'_i$ sont équiva-

lentes au point de vue des équations de Lagrange et qu'on obtient une nouvelle fonction génératrice en remplaçant Γ_1 par

$$\Sigma \omega_i b'_i$$

qui ne dépend pas des b .

Finalement nous voyons que le système possède une fonction génératrice de la forme

$$\Gamma_2 + \Sigma (k_i t + h_i) b'_i + k_0 - \Sigma k_i b_i,$$

Γ_2 étant indépendant de t et des b et les k et h étant des fonctions de a .

Les n intégrales sont alors

$$\Gamma_2 - \Gamma_0 = (\Gamma_2 - k_0) + \Sigma k_i b_i = h.$$

$$\frac{\partial \Gamma_2}{\partial b'_i} + k_i t + h = C,$$

et l'on voit que l'intégrale des forces vives ne contient pas t , mais contient les b par une fonction linéaire additive à coefficients fonctions de a , tandis que les intégrales linéaires ne contiennent pas les b , mais contiennent chacune t par un terme additif dont le coefficient est celui que possède le b correspondant dans l'intégrale des forces vives. Si celle-ci, qui ne contient pas t , ne contient pas les b , les intégrales linéaires, qui ne contiennent pas les b , ne contiendront pas t .

D'ailleurs l'hypothèse que l'intégrale des forces vives ne contient pas les b , exigeant que les k_i soient nuls, il en résulte que Γ est en même temps indépendante des b et de t , donc :

Pour être dans le cas régulier d'intégration par quadratures, il faut et il suffit :

1° *Que les équations de Lagrange, relatives à $n - 1$ des paramètres soient des dérivées exactes;*

2° *Que l'intégrale des forces vives existe et ne dépende pas de ces paramètres.*

Étant donné un système de Lagrange, on peut se proposer de chercher s'il existe un changement de paramètres le ramenant au cas régulier d'intégration. Cette recherche, impraticable dans le cas général, se fait aisément dans le cas particulier suivant qui se rencontre fréquemment.

transformée, le système se trouvera forcément ramené au cas régulier d'intégration par quadratures.

SUR LA RATIONALISATION
DES COEFFICIENTS D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE ALGÈBRE;
PAR M. R. GARNIER.

Considérons une équation différentielle du troisième ordre (pour simplifier l'écriture), soit

$$(1) \quad y''' = R(y'', y', y; x),$$

où R est rationnelle en y'' et y' , algébrique en y , analytique en x , et dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes. Je me propose de démontrer qu'on peut toujours trouver une relation algébrique

$$(2) \quad f(y, z; x) = 0$$

telle que les coefficients de la fonction rationnelle R de y'' et y' soient *rationnels en y et z et que la fonction $z(x)$ définie par (2) [où l'on a remplacé y par l'intégrale générale de (1)] ait aussi ses points critiques fixes.*

Tout d'abord, la fonction R étant algébrique en y , on peut toujours l'exprimer en fonction rationnelle de y et d'une irrationnelle $\zeta(y; x)$ liée à y par l'équation irréductible

$$(3) \quad \varphi(y, \zeta; x) = 0,$$

algébrique en y et ζ , analytique en x . L'équation (1) s'écrira alors

$$y''' \sum_h \sum_k a_{hk}(y, \zeta; x) y''^h y'^k = \sum_i \sum_j b_{ij}(y, \zeta; x) y''^i y'^j,$$

les a_{hk} et b_{ij} étant rationnels en y et ζ .

Cela étant, soient E l'ensemble des points singuliers du coefficient différentiel $R(y'', y', y, x)$ et e l'ensemble des points critiques des intégrales $y(x)$ de (1); ajoutons à E les points $x = \xi$ pour lesquels

l'équation (3) devient réductible, et soit $\bar{x}$ un point n'appartenant pas à l'ensemble ainsi formé. Appelons y_0, y'_0, y''_0 un ensemble de valeurs régulières ⁽¹⁾ attribuées à y, y', y'' , et ζ_0 une des racines de l'équation algébrique $\varphi(y_0, \zeta; \bar{x}) = 0$. D'après le théorème de Cauchy il existe une intégrale de (1) répondant aux conditions initiales précédentes; soit D le domaine d'existence de cette intégrale. Relions les points de e situés à l'intérieur de D par des coupures que x ne pourra franchir, et soit D' ce que devient le domaine D après le tracé des coupures. L'intégrale $y(x)$ est une fonction uniforme à l'intérieur de D'; dès lors, deux cas sont à distinguer :

1° Ou bien, pour tout chemin fermé $\mathcal{L}$ décrit par x à l'intérieur de D' sans rencontrer les points ξ , le point $\zeta(y)$ décrit sur la surface de Riemann (3) un cycle nul $\odot$ ⁽²⁾, et cela quelles que soient les conditions initiales choisies;

2° Ou bien il existe des chemins fermés $\mathcal{L}$ et des conditions initiales tels que le cycle $\odot$ ne se réduit pas à zéro.

Dans le premier cas, il est clair que la fonction $\zeta(x)$ définie par l'équation (3), dans laquelle on a remplacé y par $y(x)$, n'a pas d'autres points critiques que les points de e . Nous n'avons donc à nous occuper que du second cas.

Appelons ζ_1 la valeur prise par ζ quand x a décrit le chemin $\mathcal{L}$ en vertu de la fixité des points critiques de y on aura

$$(4) \quad \begin{aligned} y_0''' \Sigma_h \Sigma_k [a_{hk}(y_0, \zeta_1; \bar{x}) - a_{hk}(y_0, \zeta_0; \bar{x})] y_0''^h y_0'^k \\ = \Sigma_i \Sigma_j [b_{ij}(y_0, \zeta_1; \bar{x}) - b_{ij}(y_0, \zeta_0; \bar{x})] y_0''^i y_0'^j. \end{aligned}$$

Ceci posé, attribuons à y'' et y' des valeurs initiales Y_0'' et Y_0' très voisines de y_0'' et y_0' , et prenons toujours $Y_0 = y_0, Z_0 = \zeta_0$. D'après des théorèmes de M. H. Poincaré le chemin $\mathcal{L}$ restera intérieur au domaine D' correspondant à la nouvelle intégrale $Y(x)$ de (1) et le nouveau cycle $\odot$ décrit par ζ sera très voisin du premier. Quand x aura décrit $\mathcal{L}$, la valeur finale de ζ sera donc encore ζ_1 ;

⁽¹⁾ Ceci exige que y_0 ne soit pas un point critique de la fonction $\zeta(y; \bar{x})$.

⁽²⁾ A vrai dire, la surface (3) se déforme quand x varie; mais elle reste toujours équivalente à elle-même (au point de vue de l'analysis situs) si x ne rencontre pas de points ξ .

en définitive, on pourra encore écrire l'identité (4) en remplaçant y_0'' et y_0' par d'autres valeurs très voisines, mais *arbitrairement choisies*. Or ceci exige que l'on ait :

$$\begin{aligned} a_{hk}(y_0, \zeta_1; \bar{x}) &= a_{hk}(y_0, \zeta_0; \bar{x}), \\ b_{ij}(y_0, \zeta_1; \bar{x}) &= b_{ij}(y_0, \zeta_0; \bar{x}); \end{aligned}$$

il en résulte nécessairement que si a_{hk} , par exemple, dépend de ζ , la fonction

$$z = a_{hk}(y, \zeta; x),$$

où l'on a remplacé y par une intégrale *quelconque* de (1) et ζ par une branche de la fonction algébrique $\zeta(x)$ définie par (3), ne peut avoir de points critiques n'appartenant pas à e : il suffira d'exprimer ζ en fonction rationnelle de y et z pour avoir la représentation cherchée.

Le théorème précédent généralise une proposition énoncée dans dans ma Thèse⁽¹⁾; il s'étend évidemment à une équation d'ordre quelconque. Il est d'une grande importance au point de vue de la recherche des équations différentielles dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes; il fournit, en effet, des conditions supplémentaires qui doivent être vérifiées dans le domaine des points critiques de l'irrationnelle $z(y)$.

SUR LA PUISSANCE DE L'ENSEMBLE DES POINTS SINGULIERS TRANSCENDANTS DES FONCTIONS INVERSES DES FONCTIONS ENTIÈRES;

PAR M. J. SIRE.

1. Dans une Note publiée à la fin des *Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre*, de M. Pierre Boutroux, M. Painlevé a posé les deux questions suivantes :

1° Une fonction uniforme, continue dans une aire D et qui est

(¹) *Ann. sc. Éc. Norm. sup.*, 3^e série, t. XXIX, 1912, p. 13.

holomorphe dans cette aire, sauf peut-être pour un ensemble parfait partout discontinu de points singuliers, est-elle holomorphe dans toute l'aire ?

2° L'ensemble des points singuliers transcendants de la fonction inverse d'une fonction entière est-il toujours dénombrable ?

M. Denjoy, en reprenant un exemple donné par M. Pompéiu dans sa thèse, a montré que la première de ces questions se résout par la négative. Nous allons établir qu'il en est de même de la seconde, en construisant une fonction entière telle que l'ensemble des points singuliers transcendants de la fonction inverse ait effectivement la puissance du continu. Il nous est nécessaire, pour parvenir à une telle fonction entière, de montrer qu'il existe des fonctions entières satisfaisant à la condition suivante : elles convergent uniformément vers une limite déterminée λ , quand la variable converge vers le point à l'infini en restant à l'intérieur au sens large d'un angle A qui diffère de π d'aussi peu que l'on veut, tandis qu'elles convergent uniformément vers une limite $\mu \neq \lambda$ quand la variable converge vers le point à l'infini en restant à l'intérieur de l'angle A' dont les côtés sont les prolongements des côtés de l'angle A .

2. La fonction entière

$$g(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{\nu}}{\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma(1 + \nu\sigma)} \quad (\sigma > 0)$$

vérifie, pour tous les points de l'angle

$$(1) \quad \frac{\pi\sigma}{2} + \varepsilon \leq \theta \leq 2\pi - \frac{\pi\sigma}{2} - \varepsilon \quad (\varepsilon \text{ nombre positif arbitraire}),$$

la relation

$$(2) \quad g(x) = \frac{i\gamma}{x^2} - \sum_{\nu=1}^m \frac{x^{-\nu}}{\left(\frac{2\nu-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu\sigma\right)} + x^{-\alpha} \varepsilon(x)$$

($m < \alpha < m+1$, $m > 1$),

γ désignant un nombre réel fini et $\varepsilon(x)$ convergeant uniformément vers zéro lorsque x augmente indéfiniment en restant à l'intérieur de l'angle (1).

Nous poserons à cet effet

$$\varphi(z) = \frac{1}{\left(z + \frac{1}{2}\right) \Gamma(1 + \sigma z)},$$

de sorte que la fonction $g(x)$ pourra s'écrire

$$g(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi(\nu) x^{\nu}.$$

Ceci étant, nous considérerons avec M. Lindelöf ⁽¹⁾ l'intégrale

$$\int_S \frac{\varphi(z) x^z dz}{e^{2\pi i z} - 1},$$

S désignant le contour formé par la demi-circonférence C_R admettant le point $x = -x$ comme centre, de rayon $n + \frac{1}{2} + x$ et située dans le demi-plan $\tau \geq -x$ ($z = \tau + it$) et du diamètre de cette demi-circonférence. La fonction $\frac{\varphi(z) x^z}{e^{2\pi i z} - 1}$ admettra comme pôles simples à l'intérieur du contour S les points d'affixes entières

$$-m, -m+1, \dots, n-1, n$$

et le point d'afixe $-\frac{1}{2}$. Le résidu correspondant à un pôle d'afixe entière ν étant égal à $\frac{\varphi(\nu) x^{\nu}}{2\pi i}$ et le résidu correspondant au point d'afixe $-\frac{1}{2}$ étant égal à

$$\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-2\Gamma\left(1 - \frac{\sigma}{2}\right)},$$

nous aurons, en appliquant le théorème des résidus,

$$- \gamma i x^{-\frac{1}{2}} + \sum_{\nu=-m}^n \varphi(\nu) x^{\nu} = \int_S \frac{\varphi(z) x^z dz}{e^{2\pi i z} - 1} \quad \left[\gamma = \frac{\pi}{\Gamma\left(1 - \frac{\sigma}{2}\right)} \right].$$

(1) LINDELÖF, *Le calcul des résidus*, p. 110.

Ceci posé, la fonction $\frac{1}{\Gamma(1+\sigma z)}$ vérifiant la relation ⁽¹⁾

$$\left| \frac{1}{\Gamma[1+\sigma(x+\rho e^{i\psi})]} \right| < e^{\left(\frac{\pi\sigma}{2}+\varepsilon\right)\rho},$$

α désignant une constante réelle quelconque et ε un nombre positif arbitraire; pour $-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$ et à partir d'une valeur de ρ suffisamment grande, la fonction $\varphi(z)$ qui ne diffère de la fonction $\frac{1}{\Gamma(1+\alpha z)}$ que par la présence du facteur $\frac{1}{z+\frac{1}{2}}$ vérifiera dans les mêmes conditions la relation

$$|\varphi(\alpha+\rho e^{i\psi})| < e^{\left(\frac{\pi\sigma}{2}+\varepsilon\right)\rho}.$$

Alors nous aurons, d'après M. Lindelöf ⁽²⁾, pour tout point de l'angle (1),

$$-i\gamma x^{-\frac{1}{2}} + \sum_{\nu=-m}^{\infty} \varphi(\nu) x^{\nu} = \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{\varphi(z) x^z dz}{e^{2\pi i z} - 1}$$

avec

$$\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{\varphi(z) x^z dz}{e^{2\pi i z} - 1} = x^{-\alpha} \varepsilon(x),$$

$\varepsilon(x)$ convergeant uniformément vers zéro lorsque x augmente indéfiniment en restant à l'intérieur de l'angle (1), d'où l'on déduit immédiatement la relation (2).

Remarque. — La quantité $\gamma = \frac{\pi}{\Gamma\left(1-\frac{\sigma}{2}\right)}$ est positive et dé-

croissante pour toutes les valeurs de σ appartenant à l'intervalle $(0, 2-\eta)$, η désignant un nombre positif très petit. Elle admet donc dans cet intervalle $(0, 2-\eta)$ un minimum $k=\pi$ et

un maximum $K = \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)}.$

3. La relation $x=y^2$ fait correspondre aux points du plan

⁽¹⁾ Cf. LINDELÖF, *loc. cit.*, p. 120.

⁽²⁾ *Ibid.*, p. 113-116.

des x situés dans l'angle (1), les points du plan des y appartenant à chacun des angles

$$(3) \quad \frac{\pi\sigma}{4} + \frac{\varepsilon}{2} \leq 0 \leq \pi - \frac{\pi\sigma}{4} - \frac{\varepsilon}{2},$$

$$(4) \quad \pi + \frac{\pi\sigma}{4} + \frac{\varepsilon}{2} \leq 0 \leq 2\pi - \frac{\pi\sigma}{4} - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors si c désigne une constante positive supérieure à γ et si nous posons

$$h(y) = c \pm i y g(y^2),$$

où il faudra prendre le signe — si la détermination de y qui décrit l'angle (3) est pour chaque point x appartenant à l'angle (1) égale à la détermination de $x^{\frac{1}{2}}$ qui figure dans la formule (2) et le signe + dans le cas contraire, nous aurons, comme on le constate aisément, pour tous les points de l'angle (3),

$$h(y) = c + \gamma - \sum_1^m \varphi(-\nu) y^{-(2\nu-1)} + y^{-(2\alpha-1)} \varepsilon(y^2),$$

et pour tous les points de l'angle (4)

$$h(y) = c - \gamma - \sum_1^m \varphi(-\nu) y^{-(2\nu-1)} + y^{-(2\alpha-1)} \varepsilon(y^2),$$

$\varepsilon(y^2)$ convergeant uniformément vers zéro lorsque y augmente indéfiniment en restant à l'intérieur de l'un quelconque des angles (3) ou (4). Alors on en déduit que *la fonction entière $h(y)$ converge uniformément vers le nombre positif $c + \gamma$ lorsque y augmente vers l'infini en restant à l'intérieur de l'angle (3) et vers le nombre positif $c - \gamma$ lorsque y s'éloigne à l'infini en restant à l'intérieur de l'angle (4).*

Ceci étant vrai, quelque petits que soient les nombres positifs σ et ε , on voit, en remarquant que $\frac{1}{\left| \Gamma\left(1 - \frac{\sigma}{2}\right) \right|}$ est bornée pour

toutes les valeurs de σ appartenant à l'intervalle $(0, 2 - \eta)$, qu'il existe *des fonctions entières tendant uniformément vers un nombre positif λ lorsque y augmente indéfiniment dans un angle A qui est inférieur à π d'aussi peu que l'on voudra et*

vers le nombre positif $\mu \neq \lambda$, lorsque y augmente indéfiniment dans l'angle A' opposé par le sommet à A .

4. Décrivons du point $y = 0$ comme centre une circonférence C de rayon égal à l'unité et désignons par C_1 la portion de C située au-dessus de l'axe des quantités réelles ξ . Partageons cette demi-circonférence C_1 en trois parties égales et excluons tous les points intérieurs au sens étroit à l'arc médian, de même que les points de la circonférence C diamétralement opposés à ces derniers. Partageons de même chacun des deux arcs restants de C_1 en trois parties égales et excluons tous les points intérieurs au sens étroit à chacun des deux arcs médians, de même que les points de la circonférence C qui leur sont diamétralement opposés et continuons ainsi indéfiniment. Considérons l'ensemble des points restants de la circonférence C (les extrémités de C_1 étant également exclues), nous désignerons par E_1 la portion de cet ensemble située sur la demi-circonférence C_1 et par E_2 la portion de cet ensemble située sur la demi-circonférence C_2 ; chacun de ces ensembles E_1 et E_2 est, comme on le sait, un ensemble parfait non dense ayant la puissance du continu.

Le nombre des arcs de la demi-circonférence C_1 exclus pendant la $n^{\text{ième}}$ opération est égal à $\lambda(n) = 2^{n-1}$. Nous désignerons par

$$s_{n,1}, \quad s_{n,2}, \quad \dots, \quad s_{n,\lambda(n)}$$

ces arcs exclus en les supposant rangés dans l'ordre où les rencontre un mobile parcourant la demi-circonférence C_1 en partant de son origine située sur l'axe des ξ positifs pour aboutir à son extrémité située sur l'axe des ξ négatifs, par σ_n leur longueur commune, par $a_{n,j}$ et $b_{n,j}$ les extrémités droite et gauche de l'arc $s_{n,j}$, par $a'_{n,j}$ et $b'_{n,j}$ les points de la circonférence C diamétralement opposés aux points $b_{n,j}$ et $a_{n,j}$ et enfin par $\theta_{n,j}$ l'angle que fait la bissectrice de l'angle $a_{n,j}Ob_{n,j}$ avec l'axe des ξ positifs.

Ceci posé, considérons la suite des fonctions

$$f_{n,1}(y), \quad f_{n,2}(y), \quad \dots, \quad f_{n,\lambda(n)}(y),$$

où $f_{n,j}(y)$ est la fonction qui se déduit de la fonction $h(y)$ du n° 3 en y remplaçant σ par σ_n , y par $ye^{-i\theta_{n,j}}$ et le nombre positif c

par le nombre positif c_n appartenant à l'intervalle

$$(2\gamma_n, 3\gamma_n) \left[\gamma_n = \left\lfloor \frac{\pi}{\Gamma\left(1 - \frac{\sigma_n}{2}\right)} \right\rfloor \right].$$

En vertu d'un résultat de ce n° 3, la fonction $f_{n,j}(y)$ convergera uniformément vers le nombre positif $\alpha_n = c_n - \gamma_n$ quand y augmente indéfiniment en restant intérieur au sens large à l'angle $a_{n,j} Oa'_{n,j}$ et vers le nombre positif $\beta_n = c_n + \gamma_n$ quand y augmente indéfiniment en restant intérieur au sens large à l'angle $b_{n,j} Ob'_{n,j}$.

Si comme nous le supposons, le nombre positif c_n , défini comme il vient d'être dit précédemment, est le même pour chacune des fonctions $f_{n,j}(y)$ [$j = 1, 2, \dots, \lambda(n)$], les nombres α_n et β_n seront les mêmes pour chacune de ces fonctions et leur différence $\beta_n - \alpha_n$ qui est égale à $2\gamma_n$ restera comprise entre $2K$ et $2k$ et cela quel que soit l'indice n , K et k étant les nombres définis dans la remarque du n° 2, en supposant $\eta = 1$.

Appelons angle A tout angle ayant l'origine pour sommet et interceptant entre ses côtés un des arcs de la circonférence C compris entre deux arcs consécutifs de cette circonférence exclus pendant la $n^{\text{ième}}$ opération. Le nombre de ces arcs sera égal à $\mu(n) = 2\lambda(n) = 2^n$. Nous les représenterons par

$$A_{n,1}, A_{n,2}, \dots, A_{n,\mu(n)},$$

en les supposant rangés dans l'ordre où les rencontre un mobile parcourant la circonférence C dans le sens positif et partant de l'axe des ξ positifs. Alors l'angle $A_{n,1}$ admettra l'axe des ξ positifs comme bissectrice et l'angle $A_{n,\lambda(n)+1}$ admettra l'axe des ξ négatifs comme bissectrice et les deux angles

$$A_{n,\lambda(n)+1-q} \text{ et } A_{n,\lambda(n)+1+q} \quad [q = 1, 2, \dots, \lambda(n) - 1]$$

seront symétriques par rapport à l'axe des quantités réelles.

Posons

$$f_n(y) = \sum_{j=1}^{\lambda(n)} f_{n,j}(y).$$

Un angle quelconque A étant, pour chaque valeur de j appartenant à la suite des nombres $1, 2, 3, \dots, \lambda(n)$, intérieur à l'un des angles $a_{n,j} Oa'_{n,j}$ et $b_{n,j} Ob'_{n,j}$ la fonction $f_n(y)$ converge uni-

formément vers une limite positive lorsque γ augmente indéfiniment en restant à l'intérieur de l'angle A . Nous désignerons par $\mu_{n,p}$ la limite correspondant à l'angle $A_{n,p}$ et nous allons comparer les nombres $\mu_{n,p}$ entre eux.

L'angle $A_{n,1}$ étant intérieur à chacun des angles

$$a_{n,j} Oa'_{n,j} [j = 1, 2, \dots, \lambda(n)]$$

nous aurons

$$\mu_{n,1} = \lambda(n) \alpha_n,$$

puisque chaque fonction $f_{n,j}(\gamma)$ converge vers α_n lorsque γ augmente indéfiniment en restant à l'intérieur de l'angle $a_{n,j} Oa'_{n,j}$. Ceci étant, si p est un nombre entier vérifiant les relations

$$2 \leq p \leq \lambda(n) + 1,$$

on a

$$\mu_{n,p} = \mu_{n,1} + 2(p-1)\gamma_n.$$

En effet, l'angle $A_{n,p}$ étant intérieur aux $p-1$ angles

$$b_{n,j} Ob'_{n,j} [j = 1, 2, \dots, p-1]$$

et aux $\lambda(n) - p + 1$ angles $a_{n,j} Oa'_{n,j} [j = p, \dots, \lambda(n)]$ et comme chacune des fonctions $f_{n,j}(\gamma)$ converge uniformément vers β_n lorsque γ augmente indéfiniment en restant à l'intérieur de l'angle $b_{n,j} Ob'_{n,j}$, nous aurons

$$\mu_{n,p} = (p-1)\beta_n + [\lambda(n) - p + 1]\alpha_n = \mu_{n,1} + 2(p-1)\gamma_n,$$

puisque

$$\beta_n - \alpha_n = 2\gamma_n.$$

Il résulte de ce qui précède que la suite des nombres

$$\mu_{n,1}, \mu_{n,2}, \dots, \mu_{n,\lambda(n)+1}$$

forme une progression arithmétique à termes positifs dont la raison est égale à $2\gamma_n$, par suite ces nombres sont distincts et le module de la différence de deux quelconques d'entre eux est compris entre $2\gamma_n$ et $2\lambda(n)\gamma_n$. Par conséquent, en tenant compte de ce que nous avons dit plus haut, cette différence restera comprise, pour toutes les valeurs de n , entre les deux nombres $2k$ et $2\lambda(n)k$.

Supposons maintenant que l'indice p vérifie les relations

$$\lambda(n) + 2 \leq p \leq \mu(n)$$

et posons

$$p = \lambda(n) + 1 + q$$

l'angle $\Lambda_{n,\lambda(n)+1+q}$ sera intérieur aux q angles

$$a'_{n,j} O a_{n,j} \quad (j = 1, 2, \dots, q)$$

et aux $\lambda(n) - q$ angles

$$b'_{n,j} O b_{n,j} \quad [j = q + 1, \dots, \lambda(n)];$$

alors nous aurons

$$\mu_{n,\lambda(n)+1+q} = q\alpha_n + [\lambda(n) - q]\beta_n = \mu_{n,1} + 2[\lambda(n) - q]\gamma_n = \mu_{n,\lambda(n)+1-q}.$$

Comme les angles $\Lambda_{n,\lambda(n)+1+q}$ et $\Lambda_{n,\lambda(n)-1+q}$ sont symétriques par rapport à l'axe des quantités réelles, on voit que la fonction $f_n(\gamma)$ converge vers la même limite lorsque γ augmente indéfiniment en restant à l'intérieur d'un angle $\Lambda_{n,p}$ [$p = 2, \dots, \lambda(n)$] ou de son symétrique par rapport à l'axe des quantités réelles.

Soit D_n l'ensemble des points du plan des γ tels que chacun d'eux soit intérieur au sens large à un angle $\Lambda_{n,h}$ [$h = 1, 2, \dots, \mu(n)$]. D'après ce qui précède la fonction $f_n(\gamma)$ sera bornée dans D_n , nous désignerons par η_n le maximum de $|f_n(\gamma)|$ dans D_n .

§. Si nous procédons ainsi pour toutes les valeurs entières et positives de n , nous obtiendrons une infinité dénombrable de fonctions entières $f_n(\gamma)$. Ceci étant, nous pouvons déterminer la suite des nombres positifs $\varphi(n)$, ($n = 1, 2, \dots, ad\ infinitum$) satisfaisant aux conditions suivantes :

- I. La fonction $f(\gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(\gamma)}{\varphi(n)}$ est une fonction entière;
- II. La série à termes positifs $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_n}{\varphi(n)}$ est convergente.

Désignons par (L_1) l'ensemble des demi-droites issues de l'origine et passant par les différents points de l'ensemble E_1 et par (L_2) l'ensemble des demi-droites issues de l'origine et passant par les divers points de l'ensemble E_2 [E_1 ⁽¹⁾ et E_2 étant les ensembles définis au début du n° 4]. Soit L_1 une certaine demi-droite de l'ensemble E_1 , cette demi-droite sera pour chaque valeur de n intérieure à un certain angle $\Lambda_{n,h}$, l'indice h ⁽²⁾ prenant les valeurs

(¹) Nous supposons dans ce qui suit, pour plus de clarté dans l'exposition, que E_1 comprend en outre les extrémités de C_1 .

(²) L'indice h peut varier avec n .

1, 2, ..., $\lambda(n) + 1$. Posons

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_{n,h}}{\varphi(n)},$$

je dis que la fonction $f(y)$ converge vers μ , lorsque y s'éloigne à l'infini suivant la demi-droite L_1 . Soit à cet effet ε un nombre positif arbitrairement petit; les séries à termes positifs

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_{n,h}}{\varphi(n)} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_{1n}}{\varphi(n)}$$

étant convergentes, nous pouvons déterminer un entier p tel que l'on ait

$$(5) \quad \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{\mu_{n,h}}{\varphi(n)} < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{\tau_{1n}}{\varphi(n)} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Le rayon L_1 étant intérieur pour chaque valeur de n à $A_{n,h}$ et par suite à D_n , nous aurons, pour tout point de ce rayon et quel que soit n ,

$$|f_n(y)| < \tau_{1n}.$$

Par conséquent, nous aurons, en tenant compte de la seconde des inégalités (5),

$$(6) \quad \left| \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{f_n(y)}{\varphi(n)} \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ceci étant, nous désignerons par $s_p(y)$ la somme des p premiers termes de la série définissant la fonction $f(y)$ et par s_p la somme des p premiers termes de la série définissant le nombre μ . La demi-droite L_1 étant intérieure aux angles $A_{1,h}, A_{2,h}, \dots, A_{n,h}$ chacune des fonctions $f_n(y)$ ($n = 1, 2, \dots, p$) converge vers la limite $\mu_{n,h}$ quand y s'éloigne à l'infini sur la demi-droite L_1 . Il en résulte donc que la fonction $s_p(y)$ convergera vers s_p quand y s'éloigne à l'infini en suivant le même chemin. On en conclut qu'au nombre positif ε on peut faire correspondre un nombre positif R_ε tel que l'on ait

$$(7) \quad |s_p(y) - s_p| < \frac{\varepsilon}{3}$$

pour tout point y du chemin L_1 dont la distance à l'origine est supérieure à R_ε .

Comme

$$|f(y) - \mu| \leq |f(y) - s_p(y)| + |s_p(y) - s_p| + |s_p - \mu|,$$

on aura donc en tenant compte de (5), (6) et (7)

$$|f(x) - \mu| < \varepsilon,$$

pour tout point de la demi-droite L_1 dont la distance à l'origine est supérieure à R_ε .

Considérons maintenant une demi-droite L_2 de l'ensemble (L_2), que nous supposons être symétrique de la demi-droite L_1 précédemment considérée par rapport à l'axe des quantités réelles. Cette demi-droite L_2 sera pour chaque valeur de n intérieur à un certain angle $A_{n,k}$ symétrique de l'angle $A_{n,h}$ par rapport à l'axe des quantités réelles. Comme d'après le numéro précédent

$$\mu_{n,k} = \mu_{n,h},$$

la fonction $f(x)$ convergera également vers le nombre μ lorsque x augmentera indéfiniment en se déplaçant sur le rayon L_2 .

6. Soient P_1 et P'_1 deux points de la demi-circonférence C_1 appartenant à l'ensemble E_1 , nous dirons que l'arc $P_1 P'_1$ de cette demi-circonférence C_1 est de rang q , s'il existe un nombre entier q tel que l'arc $P_1 P'_1$ ne contienne à son intérieur aucun des arcs exclus de C_1 pendant les $(q - 1)$ premières opérations tandis qu'il contient à son intérieur un arc et un seul exclu à la $q^{\text{ième}}$ opération. Désignons par l_1 la longueur de l'arc $P_1 P'_1$ et supposons que l'un au moins des deux points P_1 et P'_1 ne soit pas extrémité d'un arc contigu à l'ensemble E_1 ; dans ce cas, le rang de l'arc $P_1 P'_1$ sera égal au nombre entier q vérifiant les relations

$$\frac{\pi}{3^{q-1}} > l_1 > \frac{\pi}{3^q}.$$

En effet, la longueur d'un arc exclu à la $n^{\text{ième}}$ opération étant égale à $\frac{\pi}{3^n}$ et les points P_1 et P'_1 appartenant à E_1 , l'arc $P_1 P'_1$ ne renfermera à son intérieur aucun des arcs exclus pendant les $(q - 1)$ premières opérations. Si, d'autre part, nous considérons l'ensemble des arcs exclus pendant les n premières opérations, deux arcs consécutifs quelconques de cet ensemble sont séparés par un arc dont la longueur est égale à $\frac{\pi}{3^n}$, il s'ensuit que $P_1 P'_1$ comprendra à son intérieur un arc exclu à la $q^{\text{ième}}$ opération. Il n'en contiendra d'ailleurs qu'un seul, car dans le cas contraire il en résulterait que $l_1 \geq \frac{\pi}{3^{q-1}}$, ce que nous ne supposons pas.

7. Soient L_1, L'_1 deux demi-droites distinctes de l'ensemble (L_1) ne passant par aucune extrémité d'arcs contigus à E_1 ; désignons par $A_{n,h}$ et $A_{n,h'}$ les deux angles Λ qui, pour une valeur déterminée de n , comprennent respectivement L_1 et L'_1 . Alors, si L'_1 est à droite de L_1 , nous aurons pour chaque valeur de n : $h' \leq h$ et par suite d'après un résultat de la page 155: $\mu_{n,h'} \leq \mu_{n,h}$, puisque les indices h et h' ne prennent que des valeurs appartenant à la suite des nombres $1, 2, \dots, \lambda(n) + 1$.

Les rayons L_1 et L'_1 interceptent sur C_1 un arc $P_1 P'_1$ dont la longueur est différente de zéro et dont les extrémités ne sont pas extrémités d'arcs contigus à E_1 . Par suite (cf. n° 6) le rang de cet arc sera un nombre fini q et nous aurons

$$\begin{aligned} A_{n,h} &= A_{n,h'} \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \dots, (q-1) \\ A_{q,h} &\neq A_{q,h'} \quad \text{avec} \quad h' = h-1 \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \mu_{n,h} &= \mu_{n,h'} \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \dots, (q-1) \\ \mu_{q,h} - \mu_{q,h'} &= 2 \gamma_q \end{aligned}$$

puisque $h' = h-1$ (cf. p. 155).

Désignons par $Q_1 Q'_1$ l'arc exclu de la $q^{\text{ième}}$ opération et intérieur à l'arc $P_1 P'_1$ (Q'_1 étant l'extrémité droite de cet arc et Q_1 son extrémité gauche). Désignons par m le plus petit des rangs des deux arcs non nuls $P_1 Q_1$ et $P'_1 Q'_1$: m sera un nombre fini au moins égal à $q+1$. Nous aurons donc

$$A_{n,h} = A_{n,h'} \quad \text{pour} \quad q < n < m$$

et, par suite, pour ces mêmes valeurs de n

$$\mu_{n,h} = \mu_{n,h'}$$

Pour $n \geq m$ il viendra $A_{n,h} \neq A_{n,h'}$ et la différence $h - h'$ qui pour $n = m$ est au moins égale à 1, n'ira pas en décroissant à partir de $n = m$, de sorte que l'on aura pour ces valeurs de n

$$\mu_{n,h} - \mu_{n,h'} \geq 2 \gamma_n.$$

Ceci étant, désignons par μ' le nombre μ correspondant au rayon L'_1 et considérons la série

$$\mu - \mu' = \sum_{n=q}^{\infty} \frac{\mu_{n,h} - \mu_{n,h'}}{\varphi(n)};$$

d'après ce qui précède, le premier terme de cette série sera positif

et égal à $\frac{2\gamma q}{\varphi(q)}$, tandis que les autres, sauf au plus un nombre fini d'entre eux qui sont nuls, seront positifs. On en conclut que si l'arc $P_1 P'_1$ intercepté par les deux rayons L_1 et L'_1 sur C_1 est de rang q , on a

$$\mu - \mu' \geq \frac{2\gamma q}{\varphi(q)}$$

et par suite que les nombres μ et μ' sont distincts.

Comme les rayons L_1 et L'_1 précédents de l'ensemble (L_1) ont été choisis arbitrairement et comme (L_1) a la puissance du continu, il s'ensuit que l'ensemble (μ_1) des limites distinctes μ correspondant aux divers rayons de (L_1) a également la puissance du continu. L'ensemble (μ_2) des limites distinctes μ_2 correspondant aux divers rayons de l'ensemble (L_2) comprenant, en vertu d'un résultat du n° 5, tous les nombres de l'ensemble (μ_1) , sauf les deux nombres qui correspondent aux deux rayons $O\xi$ et $O\xi'$ ($\xi\xi'$ étant l'axe des quantités réelles), aura également la puissance du continu.

8. Soit M une demi-droite issue de l'origine et passant par le milieu d'un arc exclu de la circonférence C , en procédant d'une manière analogue à celle utilisée au n° 5, on voit que la fonction $f(\gamma)$ converge vers l'infini, lorsque γ s'éloigne à l'infini suivant une demi-droite M .

Comme entre deux demi-droites L , il y a toujours au moins une demi-droite M , il s'ensuit qu'entre deux rayons quelconques le long desquels la fonction $f(\gamma)$ converge vers une limite finie, il y a une infinité de rayons le long desquels la fonction $f(\gamma)$ converge vers l'infini.

9. Désignons par $\gamma(x)$ la fonction multiforme définie par l'équation

$$x = f(\gamma).$$

Comme tout point $x = \mu$ [μ étant un nombre quelconque de l'ensemble (μ_1)] est, d'après une proposition connue, un point singulier transcendant de la fonction $\gamma(x)$, nous pouvons énoncer, en tenant compte du résultat du n° 7, la proposition suivante :

L'ensemble des points singuliers transcendants de la fonction $\gamma(x)$ a effectivement la puissance du continu.

SUR LES PRODUITS DIRECTS;

PAR M. O. SCHMIDT.

Dans le Tome 139 du *Journal de Crelle* M. Remak a démontré plusieurs théorèmes sur les produits directs, dont le principal est le suivant :

Si un groupe fini est représenté de deux manières comme produit direct de facteurs indécomposables (c'est-à-dire qui ne sont plus produits directs), les facteurs seront deux à deux centralement isomorphes.

La démonstration de tous ces théorèmes a été simplifiée par moi avec quelques généralisations dans une Note parue sous le titre *Ueber die Zerlegung endlicher Gruppen in direkte unzerlegbare Faktoren*, dans les *Comptes rendus de la Société mathématique* à Kieff (janvier 1912). En laissant de côté les autres théorèmes de M. Remak, je donnerai plus loin une nouvelle et courte démonstration du théorème principal.

Dans le fascicule III du Tome XL de ce *Bulletin* (p. 219) M. de Séguier s'occupe du même théorème, le trouvant « bien classique ». M. de Séguier donne une démonstration simplifiée sans connaître ma Note; cependant cette démonstration n'est pas tout à fait exacte, car les formules $\mathfrak{A}_i | D_i \equiv G | \Pi_1^n D_k$ (p. 220, ligne 4) et $D_{1,2,\dots,k} = \Pi_1^k D_i$ ($k < n$) (p. 220, ligne 12) ne sont pas vraies dans tous les cas. Soit, par exemple, $\Lambda = \Pi_1^3 \Lambda_i$ le produit direct des groupes de substitutions $\Lambda_1 = \{1, (a, b)\}$, $\Lambda_2 = \{1, (x, \beta)\}$ et $\Lambda_3 = \{1, (x, \gamma)\}$. Prenons le diviseur $G = \{1, (a, b)(x, \beta)(x, \gamma), (a, b)(x, \beta)(x, \gamma)\}$. Il est aisé de voir que, avec les notations de M. de Séguier, $D_1 = D_2 = 1$, $D_3 = \mathfrak{A}_3 = \Lambda_3 = \{1, (x, \gamma)\}$, c'est-à-dire $\mathfrak{A}_3 | D_3 = 1$, tandis que $G | \Pi_1^3 D_3 = G | \Lambda_3$ est d'ordre 2; de même nous avons $D_{12} = \{1, (a, b)(x, \beta)\}$, tandis que $\Pi_1^2 D_i = 1$ ⁽¹⁾.

(1) M. Remak nous a aussi adressé un exemple mettant en défaut la formule $\mathfrak{A}_i | D_i \equiv G | \Pi_1^n D_k$: Soit a_1, a_2, a_3 la base d'un groupe abélien $\mathfrak{A}$ ($a_1^p = 1, a_2^p = 1, a_3^p = 1$, p est un nombre premier quelconque), G le diviseur de $\mathfrak{A}$ contenant tous les éléments $g = a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} a_3^{\alpha_3}$ pour lesquels $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \equiv 0 \pmod{p}$. Pour les éléments de D_1 , il résulte de la congruence précédente et de $\alpha_1 \equiv 0 \pmod{p}$,

Voici une démonstration nouvelle du théorème de M. Remak.
Chaque élément g du groupe

$$(1) \quad G = \mathcal{H}_1 \cdot \mathcal{H}_2 \cdots \mathcal{H}_k$$

(le point désigne le produit direct) est le produit de certains éléments $h_1, h_2, \dots, h_k$ des groupes $\mathcal{H}_i$. Les h_i seront dits les *composants* de g . Il est aisé de voir que, d'après les définitions du produit direct et de l'isomorphisme central :

1° Chaque g peut être représenté *d'une seule* manière comme produit de composants relatifs à la décomposition (1);

2° Si a et b sont deux éléments permutables, chaque composant de a sera permutable à chaque composant de b ;

3° Le central d'un produit direct est le produit direct des centraux des facteurs;

4° Deux groupes centralement isomorphes à un troisième sont centralement isomorphes entre eux.

Soit

$$G = \mathcal{H}_1 \cdot \mathcal{H}_2 \cdots \mathcal{H}_k = \mathcal{Q}_1 \cdot \mathcal{Q}_2 \cdots \mathcal{Q}_l$$

un groupe fini représenté de deux manières différentes comme produit direct de groupes indécomposables. Nous pouvons supposer le théorème de Remak vrai pour les groupes d'ordre moindre que celui de G , car il est évident pour les groupes indécomposables.

D'ailleurs, le théorème est bien connu pour les groupes abéliens; supposons donc G *non abélien*. Si nous réussissons à trouver deux facteurs non abéliens centralement isomorphes, le théorème sera démontré. En effet, soit par exemple $\mathcal{H}_1 \simeq \mathcal{P}_1$ ($\simeq$ étant le signe de l'isomorphisme central), où $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{Q}_1$ ne sont pas abéliens. Alors, si $\mathcal{H}_1^c, \mathcal{Q}_1^c$ sont les centraux de $\mathcal{H}_1, \mathcal{Q}_1$, nous obtenons $\mathcal{H}_1^c \simeq \mathcal{Q}_1^c$ et

$$\mathcal{H}_1^c \cdot \mathcal{H}_2 \cdots \mathcal{H}_k = \mathcal{Q}_1^c \cdot \mathcal{Q}_2 \cdots \mathcal{Q}_l = G',$$

car le composant relatif à $\mathcal{H}_1$ de chaque élément de $\mathcal{Q}_2 \cdot \mathcal{Q}_3 \cdots \mathcal{Q}_l$ doit appartenir à $\mathcal{H}_1^c$, parce que ces éléments sont permutables aux éléments de $\mathcal{Q}_1$, et de même pour $\mathcal{H}_2, \mathcal{Q}_3 \dots \mathcal{Q}_k$. Mais

$\alpha_3 \equiv 0 \pmod{p}$ que $\alpha_1 \equiv 0 \pmod{p}$ ou que $D_1 = 1$. De même $D_2 = 1, D_3 = 1, \prod_1^3 D_i = 1$. L'isomorphisme donnerait $A_i \equiv G$, ce qui est impossible puisque l'ordre de A_i est égal à p et l'ordre de G est égal à p^2 [N. D. L. R.].

comme $\mathcal{H}_1$ n'est pas abélien, $\mathcal{H}_1^c < \mathcal{H}_1$ et par conséquent $\mathcal{G}' < \mathcal{G}$, le théorème est donc supposé vrai pour $\mathcal{G}'$, donc

$$k = l, \quad \mathcal{H}_i \simeq \mathcal{Q}_i \quad (i = 2, 3, \dots, k).$$

Mais nous avons déjà $\mathcal{H}_1 \simeq \mathcal{Q}_1$, le théorème sera ainsi démontré.

Cherchons donc deux facteurs centralement isomorphes non abéliens. Soit $\mathcal{H}_1$ le facteur non abélien d'ordre maximum dans nos représentations (ou l'un d'eux, s'ils sont plusieurs). Deux cas sont à distinguer :

a. $\mathcal{H}_1$ n'est pas le seul groupe non abélien parmi les facteurs de la première décomposition. Soient alors $\mathcal{Q}'_1, \mathcal{Q}'_2, \dots, \mathcal{Q}'_l$ les groupes composés par tous les éléments de $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \dots, \mathcal{Q}_l$ qui sont composants des éléments de $\mathcal{H}_1$. Ajoutons les éléments nécessaires pour obtenir le produit direct des $\mathcal{Q}'_i$. Nous avons évidemment

$$\mathcal{Q}'_1 \cdot \mathcal{Q}'_2 \cdots \mathcal{Q}'_l = \mathcal{H}_1 \cdot \mathcal{H}.$$

Tous les éléments de $\mathcal{H}$ sont permutables aux éléments de $\mathcal{H}_1$ et par conséquent d'après 2° à tous les éléments de $\mathcal{Q}'_1, \mathcal{Q}'_2, \dots, \mathcal{Q}'_l$, c'est-à-dire que $\mathcal{H}$ appartient au central de $\mathcal{H}_1 \cdot \mathcal{H}$. Mais alors, nous avons $\mathcal{H}_1 \cdot \mathcal{H} < \mathcal{G}$, car autrement $\mathcal{H}_1$ serait l'unique facteur non abélien. Le théorème est donc supposé vrai pour $\mathcal{H}_1 \cdot \mathcal{H}$. Le groupe $\mathcal{H}_1$ doit être centralement isomorphe à un facteur indécomposable de $\mathcal{Q}'_1 \cdot \mathcal{Q}'_2 \cdots \mathcal{Q}'_l$, par exemple à un facteur $\mathcal{Q}''_1$ de $\mathcal{Q}'_1$; mais comme $\mathcal{H}_1$ est d'ordre maximum, nous devons avoir $\mathcal{Q}''_1 = \mathcal{Q}'_1 = \mathcal{Q}_1$, $\mathcal{H}_1 \simeq \mathcal{Q}_1$. C'est le résultat qu'il nous fallait chercher.

b. $\mathcal{H}_1$ est le seul groupe non abélien parmi les $\mathcal{H}_i$. Soit $\mathcal{Q}_1$ un facteur non abélien de la seconde décomposition. Formons, comme plus haut, le produit direct des groupes $\mathcal{H}'_1, \mathcal{H}'_2, \dots, \mathcal{H}'_k$ des composants des éléments de $\mathcal{Q}_1$; nous obtenons $\mathcal{H}'_1 \cdot \mathcal{H}'_2 \cdots \mathcal{H}'_k = \mathcal{Q}_1 \cdot \mathcal{X} = \mathcal{X}$. Si $\mathcal{H}'_1 = \mathcal{H}_1$ le théorème est démontré, $\mathcal{H}_1 \simeq \mathcal{Q}_1$, car $\mathcal{H}_1$ est d'ordre maximum et tous les $\mathcal{H}_i$ ($i > 1$) appartiennent au central de $\mathcal{G}$. Si $\mathcal{H}'_1 < \mathcal{H}_1$ nous avons $\mathcal{X} < \mathcal{G}$ et $\mathcal{Q}_1$ doit être centralement isomorphe à un facteur $\mathcal{H}''_1$ et $\mathcal{H}_1$. Mais l'ordre de $\mathcal{H}'_1$ ne peut dépasser l'ordre de $\mathcal{Q}_1$, c'est-à-dire $\mathcal{H}''_1 = \mathcal{H}'_1$, $\mathcal{H}'_1 \simeq \mathcal{Q}_1$. Le même raisonnement peut s'appliquer au lieu de $\mathcal{Q}_1$ au facteur $\mathcal{H}'_i$ de $\mathcal{X}$ et nous obtiendrons le résultat que $\mathcal{H}'_i$ est centra-

lement isomorphe au groupe de ses composants dans $\mathfrak{Q}_1$, c'est-à-dire que $\mathfrak{Q}_1$ même est ce groupe des composants. Chaque élément de $\mathfrak{H}'_1$, excepté l'unité, a ainsi un composant dans $\mathfrak{Q}_1$ différent de l'unité et nous voyons que d'après 1° les groupes $\mathfrak{H}'_1$ et $\mathfrak{Q}_2 \cdot \mathfrak{Q}_3 \cdots \mathfrak{Q}_l$ sont premiers entre eux. Nous pouvons former le produit direct $\mathfrak{H}'_1 \cdot \mathfrak{Q}_2 \cdots \mathfrak{Q}_l$ qui est égal à $\mathfrak{G}$ parce que son ordre est égal à celui de $\mathfrak{Q}_1 \cdot \mathfrak{Q}_2 \cdots \mathfrak{Q}_l = \mathfrak{G}$. Nous sommes parvenus à l'égalité

$$\mathfrak{H}_1 \cdot \mathfrak{H}_2 \cdots \mathfrak{H}_k = \mathfrak{H}'_1 \cdot \mathfrak{Q}_2 \cdots \mathfrak{Q}_l,$$

d'où $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}'_1 \cdot \mathfrak{Q}'$. Le groupe $\mathfrak{H}_1$ étant supposé indécomposable, on doit avoir $\mathfrak{Q}' = 1$, $\mathfrak{H}'_1 = \mathfrak{H}_1$ et par conséquent

$$\mathfrak{H}_1 \simeq \mathfrak{Q}_1.$$

Le théorème est donc démontré dans tous les cas.

SUR LES PRODUITS DIRECTS ET SUR LA STRUCTURE DE LEURS DIVISEURS MAXIMUMS;

PAR M. DE SÉGUIER.

1. Dans une Note précédente ⁽¹⁾ j'ai énoncé un théorème de M. Remak sous la forme suivante :

Soit $\Lambda' = \Pi'_i \Lambda'_i$ un groupe centralement isomorphe à $\Lambda = \Pi_i \Lambda_i$ dans le produit direct de Λ par un groupe abélien quelconque K ($\Lambda K = \Lambda' K$), les Λ_i et les Λ'_i étant des facteurs directs réduits. Alors $n' = n$, et l'on peut établir entre Λ et Λ' une correspondance centrale dans ΛK où chaque Λ'_i correspond centralement à un Λ_i .

⁽¹⁾ *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XL, p. 219-223, 1912. Le lecteur est prié de se reporter à cette Note pour la terminologie et les références. J'ignorais alors le travail de M. Schmidt, *Ueber die Zerlegung endlicher Gruppen in direkte unzerlegbare Faktoren*, paru dans les *Annales de l'Université de Kiev* au commencement de 1912.

Quelques inadvertances s'étant glissées dans ma démonstration ⁽¹⁾, je voudrais aujourd'hui y revenir.

On peut admettre la proposition quel que soit K pour des groupes A et A' d'ordre moindre.

Soit $\mathcal{C}$ une correspondance centrale de A à A' dans AK .

Supposons d'abord qu'un A_i tel que A_1 soit centralement isomorphe dans AK à un A'_i tel que A'_1 , et soit $\bar{A}$ le groupe déduit de A en y remplaçant A_i par A'_i . Il résulte immédiatement des équations de A qu'on obtient une correspondance centrale $\bar{\mathcal{C}}$ de $\bar{A}$ à A' dans AK en remplaçant dans $\mathcal{C}$ chaque élément de A_i par l'élément de A'_i qui lui correspond (par $\mathcal{C}$). Soit $\Pi_1'' a'_i$ (a'_i étant dans A'_i) l'élément de A' qui répond par $\bar{\mathcal{C}}$ à $a'_i \Pi_2'' a_i$ (a_i étant dans A_i) de $\bar{A}$. La considération des éléments où $a'_i = 1$ montre que $\Pi_2'' A_i$ répond, par $\mathcal{C}$ comme par $\bar{\mathcal{C}}$ à $\Pi_2'' A'_i$, et l'on est ramené à des groupes d'ordre inférieur ⁽²⁾.

J'admettrai donc désormais qu'aucun A_i n'est centralement isomorphe dans AK à un A'_i .

On peut de plus admettre qu'aucun des A_i , A'_i n'est abélien. Car soit, par exemple, $A_1 = \{a_1\}$ abélien réduit, donc cyclique d'ordre p^2 (p premier), et supposons qu'à a_1 répond par $\mathcal{C}$ l'élément $\Pi_1'' a'_i$ de A' , a'_i étant dans A'_i et a'_1 , par exemple, d'ordre p^2 . Soit α le correspondant par $\mathcal{C}$ de $\Pi_2'' a'_i$. A $a_1 \alpha^{-1} = \bar{a}_1$ répondra a'_1 . Soit $\bar{A}$ le groupe centralement isomorphe à A dans AK déduit de A en y remplaçant a_1 par $\bar{a}_1$, donc A_1 par $\bar{A}_1 = \{\bar{a}_1\}$. Comme $\bar{A}_1$ est facteur direct de tout diviseur de A qui le contient, $\{a'_1\}$ le sera de A'_1 . Mais A'_1 est réduit. Donc $A'_1 = \{a'_1\}$, et A'_1 est centralement isomorphe dans AK à A_1 .

Désignons maintenant par X_i le groupe répondant à A'_i par $\mathcal{C}$ dans A , et soit $X_{i\rho}$ le constitutif de X_i dans A_ρ . Chaque élément de $X_{i\rho}$ étant permutable à chaque élément de $X_{k\rho}$ (pour $i \neq k$), le central de $X_{i\rho}$ divise $A_{\rho 0}$.

Supposons A'_n d'ordre maximum parmi les A_i , A'_i (et $n > 1$). $X_{n\rho}$ ne peut être égal à A_ρ , quel que soit ρ , car $X_{1\rho}$, dont chaque

⁽¹⁾ Cf. *Bulletin de la Société mathématique de France* (*loc. cit.*).

⁽²⁾ Ces remarques contiennent en même temps les théorèmes accessoires énoncés par M. Remak et par M. Schmidt (*loc. cit.*).

élément est permutable à chaque élément de $X_{n\rho}$, serait dans $\Lambda_{\rho 0}$ quel que soit ρ , et X_1 serait abélien, et par suite aussi Λ'_1 . Donc $\Pi_1^n X_{n\rho} = \mathfrak{X}_n$ est $< \Lambda$, et comme $\Lambda = \Pi_1^n X_i$, $\mathfrak{X}_n$, qui contient X_n , a la forme $X_n Y$, Y étant le constitutif de $\mathfrak{X}_n$ dans $\Pi_1^{n-1} X_i$. Or, $\mathfrak{X}_n$ étant $< \Lambda$, on peut admettre le théorème quand on y remplace Λ par $X_n Y$, Λ' par $\mathfrak{X}_n$, et K par 1. Mais alors X_n devrait être centralement isomorphe à un des X_{ni} tel que X_n , dans $\mathfrak{X}_n$ et par suite dans Λ (le central de $\mathfrak{X}_n$ divise Λ_0). D'ailleurs, Λ'_n étant d'ordre maximum, $X_{nr} = \Lambda_r$. Donc Λ'_n serait centralement isomorphe à Λ_r ⁽¹⁾ contre l'hypothèse.

2. Je ne me suis pas servi ici de la structure des diviseurs maximums de Λ comme j'en avais d'abord eu la pensée. Mais cette structure étant intéressante par elle-même je vais la déterminer.

Soit $G = \Sigma g$ un diviseur de $\Lambda = \Pi_1^n \Lambda_i$, les Λ_i étant facteurs directs; le plus grand commun diviseur de G avec $\Lambda_i \Lambda_k \dots \Lambda_l$ ⁽²⁾; $\mathfrak{A}_{ik\dots l}$ le constitutif de G dans $\Lambda_i \Lambda_k \dots \Lambda_l$; si $g = \Pi_1^n g_i$ étant dans Λ_i , je dirai que g_i est le constitutif de g dans Λ_i (le constitutif de g dans $\Lambda_{ik\dots l}$ est donc $g_i g_k \dots g_l$) et que chaque g_i répond ou est associé à chacun des autres g_i de $\Pi_1^n g_i = g$ et à g dans G ; si les éléments d'une partie P_i de Λ_i répondent dans G aux éléments d'une partie P_k de Λ_k et à ceux d'une partie P de G , je dirai de même que P_i est associé à P_k ou répond à P_k et à P dans G . Pour que G soit normal dans Λ , il faut et suffit que, quels que soient $i, k, \dots, l$, $D_{ik\dots l}$ soit normal dans $\Lambda_i \Lambda_k \dots \Lambda_l$, et que $\mathfrak{A}_{ik\dots l} | D_{ik\dots l}$ divise le central de $\Lambda_i \Lambda_k \dots \Lambda_l | D_{ik\dots l}$. Si donc G est normal dans Λ , et si $\mathfrak{A}_{ik\dots l} = \Lambda_i \Lambda_k \dots \Lambda_l | D_{ik\dots l}$ est abélien.

Si $r(\geq 1)$ est la valeur minima de k pour laquelle un des $\mathfrak{A}_{i_1\dots i_k}$ soit $< \Lambda_{r\dots r}$, je dirai que G est un diviseur de Λ d'espèce r relativement à $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$ (on verra tout à l'heure que si les Λ_i sont réduits et si G est maximum, le nombre r a un sens indépendant du choix de $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$; je dirai donc alors que r

(1) Le raisonnement qui établit l'isomorphisme central de Λ'_n à Λ_r dans le cas où aucun des Λ_i , Λ'_i n'est abélien a déjà été employé par M. Schmidt, qui achève autrement la démonstration.

(2) Les considérations qui suivent doivent remplacer le n° 2 de ma précédente Note. Dans la formule $\Lambda_i | D_i = G | \Pi_1^n D_k$ du n° 1 de cette Note, il faut évidemment mettre $D_i D_{i_1\dots i_{i-1} i+1 \dots n}$ au lieu de $\Pi_1^n D_k$.

Mais n et $n - 1$ sont deux indices quelconques. Donc, si $n \geq 3$, les $A_i | D_i$ sont des g_p et fournissent les facteurs de composition de $G | D_1 \dots D_n$ qui est maximum dans le produit direct des $g_p A_i | D_i$ et d'espèce n relativement aux $A_i | D_i$.

Supposons $D_1 = \dots = D_{n-1} = 1$. Alors G est un $g_{p^{n-1}}$ abélien principal du $g_{p^n} A = A_1 \dots A_n$. Soient a_i un générateur de A_i et $g = \Pi_1^n a_i^{n_i}$ ($n \geq 3$) un élément quelconque de G . Le constitutif de G dans $A_2 \dots A_n$ étant $A_2 \dots A_n$, $x_2, \dots, x_n$ doivent parcourir chacun tous les nombres mod p . Ainsi à chaque système $x_2, \dots, x_n$ répond un seul x_1 , et à chaque x_1 répondent les p^{n-2} systèmes $x_2, \dots, x_n$ des exposants des éléments $\alpha_2^{x_2} \dots \alpha_n^{x_n}$ du $g_{p^{n-2}} D_{2\dots n}$.

D_{n-1n} , d'espèce 2 dans $A_{n-1}A_n$, est de la forme $\{a_{n-1}\alpha_n^x\}$ ($x \not\equiv 0 \pmod p$). En changeant au besoin a_{n-1} en a_{n-1}^{-x} , tout élément de D_{n-1n} sera de la forme $\alpha_{n-1}^{x_{n-1}}\alpha_n^{x_n}$, $x_{n-1} + x_n \equiv 0 \pmod p$. Admettons que, par un changement du générateur a_i de $D_{i\dots n}$ pour $i = n - 1, n - 2, \dots, r + 1$, on ait pu faire en sorte que tout élément de $D_{i\dots n}$ soit de la forme $\alpha_i^{x_i} \dots \alpha_n^{x_n}$ avec $\sum_i^n x_k \equiv 0 \pmod p$, et soit $a_r \alpha_{r+1}^{x_{r+1}} \dots \alpha_n^{x_n}$ un élément de $D_{r\dots n}$. En changeant au besoin a_r en $\alpha_r^{x_r}$ avec la condition $\sum_r^n x_i \equiv 0 \pmod p$, on aura

$$D_{r\dots n} = D_{r+1\dots n} \Sigma_x (\alpha_r^{x_r} \dots \alpha_n^{x_n})^x, \quad x = 0, \dots, p-1,$$

ou

$$D_{r\dots n} = \Sigma \alpha_r^{x_r} \dots \alpha_n^{x_n},$$

la somme étant étendue à toutes les solutions $x_r, \dots, x_n$ de $\sum_r^n x_k \equiv 0 \pmod p$.

En continuant ainsi, on pourra faire en sorte que $G = \Sigma \alpha_1^{x_1} \dots \alpha_n^{x_n}$, la somme étant étendue à toutes les solutions $x_1, \dots, x_n$ de $\sum_1^n x_k \equiv 0 \pmod p$.

En supposant maintenant les D_i quelconques et $A_i = D_i \Sigma a_i^n$ ($x = 0, \dots, p-1$), on peut choisir les a_i de manière que $G = D_1 \dots D_n \Sigma \alpha_1^{x_1} \dots \alpha_n^{x_n}$, la somme étant encore étendue à toutes les solutions $x_1, \dots, x_n$ de $\sum_1^n x_k \equiv 0 \pmod p$ (1).

On voit qu'un groupe d'espèce n relativement à $A_1, \dots, A_n$, pour $n \geq 3$, et maximum dans A , est normal dans A et d'indice premier.

(1) L'exemple donné par M. Remak (*Bulletin de la Soc. math.*, t. XLI, 1913, p. 161, en note) est un cas particulier de la théorie précédente.

Il est clair que, pour $n = 2$ comme pour $n > 2$, un diviseur normal maximum de A d'espèce 2 relativement à A_1, A_2 a un indice premier, puisque cet indice est de l'ordre de $A_1 | D_1 \equiv A_2 | D_2$. Mais, pour $n = 2$, un diviseur de A peut être maximum et d'espèce 2 sans être normal. On le voit en prenant, par exemple, pour $A_i = \Sigma a_i$ ($i = 1, 2$) le groupe de substitutions $(x_k^i, \Sigma a_{kl} x_{kl}^i)$ ($k, l = 1, \dots, \nu$) de déterminant 1 dans un champ de Galois (d'ordre suffisamment élevé), pour D_i le central de A_i , et pour G le groupe $D_2 \Sigma a_1 a_2$, a_2 étant formée avec les x^2 comme a_1 avec les x^1 .

Il résulte de ce qui a été dit que *tout diviseur maximum d'un produit direct A dont l'espèce relativement aux facteurs directs de A est > 2 est normal dans A .*

On remarquera qu'un groupe d'espèce n relativement à $A_1, \dots, A_n$ n'est pas nécessairement maximum dans A . On le voit de suite en considérant les différents homomorphismes qu'on peut établir entre $A_{i_1} \dots A_{i_r}$ et $A_{i_{r+1}} \dots A_{i_n}$ ($E.$, 65). Soit, par exemple, $n = 2$ et $A_1 = \{12, 123\}$, $A_2 = \{45, 456\}$. Pour $D_1 = \{123\}$, $D_2 = \{456\}$, G est un $g_{18} G_1$ d'indice 2 dans A et par suite maximum. Pour $D_1 = D_2 = 1$, G est un $g_6 G_2 < G_1$. G_1 et G_2 sont d'espèce 2 relativement à A_1 et A_2 . De plus G_2 n'est pas normal dans A .

Supposons $n \geq 2$. Soient A_i un g_{p^2} (p premier) abélien principal de générateurs a_i, a'_i , et Γ le $g_{p^{n-1}}$ formé des $a_1^{r_1} \dots a_n^{r_n}$, où $\Sigma_1^n x_i \equiv 0 \pmod{p}$. Il est clair que $\{\Gamma, a'_1, \dots, a'_n\}$ est d'espèce n sans être maximum.

DÉMONSTRATION NOUVELLE D'UN THÉORÈME FONDAMENTAL
SUR LES SUITES DE FONCTIONS MONOGÈNES;

PAR M. ERNST LINDELÖF.

I. Il s'agit du théorème suivant, dont l'origine remonte à Weierstrass ⁽¹⁾ et qui, sous sa forme définitive présentée ci-dessous, a été établi d'abord par M. Vitali ⁽²⁾:

Considérons une suite indéfinie de fonctions monogènes

$$(1) \quad f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$$

qui vérifient les trois conditions suivantes :

a. Elles sont toutes holomorphes à l'intérieur d'un certain domaine connexe T.

b. Elles sont bornées dans leur ensemble dans tout domaine fini T', intérieur au domaine T et n'ayant aucun point commun avec son contour; en d'autres termes, à chaque domaine donné T' jouissant de cette propriété correspond un nombre positif G', tel qu'on ait à l'intérieur et sur le contour du domaine T'

$$|f_n(x)| < G' \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

c. La suite (1) converge vers une limite déterminée, nécessairement finie, en chaque point d'un certain ensemble infini de points E, faisant partie du domaine donné T et admettant au moins un point limite x_0 situé à l'intérieur de ce domaine.

Dans ces conditions on peut affirmer que, à l'intérieur du domaine T, les fonctions (1) tendent vers une fonction monogène $F(x)$, holomorphe dans ce même domaine, et que les dérivées d'un ordre quelconque p des fonctions (1) tendent vers la dérivée correspondante $F^{(p)}(x)$ de la fonction $F(x)$

⁽¹⁾ *Abhandlungen aus der Functionenlehre*, p. 67-101.

⁽²⁾ *Annali di Matematica pura ed applicata*, 3^e série, t. X, 1901, p. 65-81.

De plus, les égalités

$$(2) \quad \lim_{n=\infty} f_n(x) = F(x), \quad \lim_{n=\infty} f_n^{(p)}(x) = F^{(p)}(x) \quad (p = 1, 2, \dots)$$

auront lieu uniformément dans tout domaine tel que T'.

2. Pour la démonstration, nous choisirons d'abord comme domaine T' un cercle C' de centre x_0 dont tous les points soient intérieurs au domaine donné T. Soit C un cercle de même centre que C', mais de plus grand rayon, qui est également tout entier compris à l'intérieur de T. Nous désignerons par R et R' ($< R$) les rayons des cercles C et C'.

En vertu de l'hypothèse a, les fonctions (1) sont développables en séries

$$f_n(x) = a_0^{(n)} + a_1^{(n)}(x - x_0) + \dots + a_\nu^{(n)}(x - x_0)^\nu + \dots$$

qui convergent dans le cercle C et sur sa circonférence. Comme d'autre part, d'après l'hypothèse b, les modules $|f_n(x)|$ sont tous inférieurs à une certaine constante G sur la circonférence C, le théorème bien connu de Cauchy nous donne pour les coefficients de ces séries les inégalités

$$(3) \quad |a_0^{(n)}| < G, \quad |a_1^{(n)}| < \frac{G}{R}, \quad \dots, \quad |a_\nu^{(n)}| < \frac{G}{R^\nu}, \quad \dots \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Cela posé, nous allons d'abord faire voir que les constantes $a_0^{(n)}$ ($n = 1, 2, \dots$) tendent vers une limite déterminée. A cet effet, nous partons de l'égalité

$$f_{n+p}(x) - f_n(x) = (a_0^{(n+p)} - a_0^{(n)}) + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu^{(n+p)} - a_\nu^{(n)})(x - x_0)^\nu,$$

et nous en tirons

$$|a_0^{(n+p)} - a_0^{(n)}| \leq |f_{n+p}(x) - f_n(x)| + \sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu^{(n+p)} - a_\nu^{(n)}|(x - x_0)^\nu,$$

inégalité qui est valable pour $|x - x_0| \leq R$, n et p étant des entiers positifs quelconques. Or on a, d'après (3),

$$|(a_\nu^{(n+p)} - a_\nu^{(n)})| < \frac{2G}{R^\nu},$$

d'où il suit, pour $|x - x_0| < R$,

$$\sum_{v=1}^{\infty} |(a_v^{(n+p)} - a_v^{(n)})(x - x_0)^v| \leq \frac{2G|x - x_0|}{R - |x - x_0|},$$

et l'inégalité précédente peut donc s'écrire

$$(4) \quad |a_0^{(n+p)} - a_0^{(n)}| \leq |f_{n+p}(x) - f_n(x)| + \frac{2G|x - x_0|}{R - |x - x_0|},$$

résultat qui reste valable pour $|x - x_0| < R$, quels que soient les entiers positifs n et p .

Soit maintenant ε un nombre positif fixe, aussi petit qu'on voudra. On pourra choisir d'abord un nombre positif $\Delta (< R)$ tel que

$$\frac{2G|x - x_0|}{R - |x - x_0|} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dès que} \quad |x - x_0| < \Delta,$$

puis, en vertu de l'hypothèse c , on pourra trouver une valeur x' telle que $|x' - x_0| < \Delta$ et que la suite (1) converge pour $x = x'$, ce qui implique l'existence d'un entier positif n_0 tel qu'on ait

$$|f_{n+p}(x') - f_n(x')| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour} \quad n > n_0, p > 0.$$

En faisant dans (4) $x = x'$, nous pouvons donc en conclure

$$|a_0^{(n+p)} - a_0^{(n)}| < \varepsilon \quad \text{dès que} \quad n > n_0, p > 0.$$

Mais cela signifie que les constantes $a_0^{(n)}$ ($n = 1, 2, \dots$) tendent bien vers une limite finie et déterminée, comme nous l'avions avancé. En désignant cette limite par c_0 on aura d'ailleurs, en vertu de (3),

$$|c_0| \leq G.$$

3. Ce point établi, nous allons considérer les fonctions

$$(5) \quad \varphi_n(x) = \frac{f_n(x) - a_0^{(n)}}{|x - x_0|} = a_1^{(n)} + a_2^{(n)}(x - x_0) + \dots \quad (n = 1, 2, \dots).$$

On constate immédiatement qu'elles jouissent pour $|x - x_0| \leq R$ des trois propriétés a , b et c . Elles sont en effet holomorphes pour ces valeurs de x ; d'autre part, on a pour $|x - x_0| = R$

$$|\varphi_n(x)| \leq \frac{|f_n(x)| + |a_0^{(n)}|}{R} < \frac{2G}{R} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

et, d'après un théorème bien connu, ces mêmes inégalités subsistent aussi pour $|x - x_0| < R$, de sorte que les fonctions (5) sont bien bornées dans leur ensemble dans le cercle C; enfin, puisque $\lim a_0^{(n)} = c_0$, les fonctions (5) tendent vers une limite déterminée en chaque point de l'ensemble E distinct du point x_0 .

Nous pouvons donc appliquer le raisonnement du n° 2 aussi aux fonctions (5), et nous en concluons que les constantes

$$a_1^{(n)} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

convergent vers une limite finie et déterminée c_1 , qui, d'après (3), vérifie nécessairement la condition

$$|c_1| \leq \frac{G}{R}.$$

En considérant les fonctions

$$\frac{f_n(x) - a_0^{(n)} - a_1^{(n)}(x - x_0)}{(x - x_0)^2} = a_2^{(n)} + a_3^{(n)}(x - x_0) + \dots,$$

on conclut de même que les constantes $a_2^{(n)} (n = 1, 2, \dots)$ admettent une limite déterminée c_2 de module $\leq \frac{G}{R^2}$, et, en s'appuyant sur le principe d'induction complète, on arrive ainsi à démontrer qu'on a pour toutes les valeurs de l'indice ν

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_\nu^{(n)} = c_\nu,$$

c_ν étant une constante finie assujettie à l'inégalité

$$(7) \quad |c_\nu| \leq \frac{G}{R^\nu}.$$

4. Les inégalités (7) nous montrent que la série

$$(8) \quad F(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots$$

définit une fonction monogène $F(x)$ qui est certainement holomorphe pour $|x - x_0| < R$, c'est-à-dire à l'intérieur du cercle C. D'autre part, nous pouvons conclure des résultats (3), (6) et (7) que la différence $f_n(x) - F(x)$ tend uniformément vers zéro dans le cercle C lorsque n augmente indéfiniment. Écrivons en effet cette

différence sous la forme

$$f_n(x) - F(x) = \sum_{\nu=0}^{k-1} (a_\nu^{(n)} - c_\nu)(x - x_0)^\nu + \sum_{\nu=k}^{\infty} (a_\nu^{(n)} - c_\nu)(x - x_0)^\nu.$$

On a d'après (3) et (7), quels que soient ν et n ,

$$|a_\nu^{(n)} - c_\nu| \leq |a_\nu^{(n)}| + |c_\nu| < \frac{2G}{R^\nu},$$

et dans le cercle C' on aura donc

$$\left| \sum_{\nu=k}^{\infty} (a_\nu^{(n)} - c_\nu)(x - x_0)^\nu \right| < \sum_{\nu=k}^{\infty} 2G \left(\frac{R'}{R} \right)^\nu = \frac{2G \left(\frac{R'}{R} \right)^k}{1 - \frac{R'}{R}}.$$

Puisque $\frac{R'}{R} < 1$, il est dès lors possible de choisir l'entier k assez grand pour que la somme considérée soit inférieure en valeur absolue à $\frac{\varepsilon}{2}$, quel que soit n . D'autre part, d'après (6), la somme finie

$$\sum_{\nu=0}^{k-1} (a_\nu^{(n)} - c_\nu)(x - x_0)^\nu$$

tend uniformément vers zéro dans tout domaine fini lorsque n augmente indéfiniment, et son module est donc inférieur à $\frac{\varepsilon}{2}$ dans le cercle C' dès que n est supérieur à un certain entier n_0 . En somme, on aura donc dans le cercle C'

$$|f_n(x) - F(x)| < \varepsilon \quad \text{dès que} \quad n > n_0,$$

ce qui montre que la différence $f_n(x) - F(x)$ tend uniformément vers zéro dans ce cercle.

En partant de l'égalité

$$f_n^{(p)}(x) - F^{(p)}(x) = \sum_{\nu=p}^{\infty} \nu(\nu-1) \dots (\nu-p+1) (a_\nu^{(n)} - c_\nu)(x - x_0)^{\nu-p},$$

on conclut de même, par un raisonnement de tout point analogue à celui qui précède, que la différence

$$f_n^{(p)}(x) - F^{(p)}(x),$$

quel que soit p , tend uniformément vers zéro dans le cercle C' lorsque n augmente indéfiniment.

Nous avons donc démontré que les égalités (2) ont lieu uniformément dans le cercle C' de centre x_0 .

5. Prenons maintenant à l'intérieur de C' un point quelconque x_1 , et de ce point comme centre construisons un cercle C'_1 dont tous les points soient intérieurs au domaine donné T . La démonstration qui précède nous permet de conclure que, dans ce cercle C'_1 , $f_n(x)$ tend uniformément vers $F_1(x)$ et $f_n^{(p)}(x)$ vers $F_1^{(p)}(x)$ lorsque n augmente indéfiniment, $F_1(x)$ étant une certaine fonction monogène qui est holomorphe dans le cercle en question. Les valeurs de $F_1(x)$ devant coïncider avec celles de $F(x)$ dans l'aire commune aux cercles C' et C'_1 , on voit d'ailleurs que l'une de ces fonctions constitue le prolongement analytique de l'autre.

En poursuivant ce procédé et en s'appuyant sur les définitions mêmes du domaine connexe et de la fonction monogène données par Weierstrass, on arrive à cette conclusion que la fonction monogène $F(x)$, définie par la série (8), est holomorphe à l'intérieur du domaine donné T , et que, d'autre part, les égalités (2) ont lieu uniformément dans un cercle quelconque dont tous les points soient intérieurs à ce domaine. Et puisque chaque domaine fini T' , qui est intérieur au domaine T et n'a aucun point commun avec son contour, peut être couvert tout entier par un nombre fini de tels cercles, il s'ensuit bien que les égalités (2) ont lieu uniformément dans tout domaine jouissant de cette propriété.

C. Q. F. D.

6. Du théorème démontré ci-dessus on peut tirer aisément cette autre proposition :

Étant donnée une suite infinie de fonctions monogènes

$$(9) \quad f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$$

qui sont holomorphes dans un certain domaine connexe T et bornées dans leur ensemble dans chaque domaine fini T' , intérieur au domaine T et n'ayant aucun point commun avec

son contour, on peut toujours de cette suite en extraire une autre qui, à l'intérieur de T , converge vers une fonction monogène holomorphe, et cela uniformément dans tout domaine tel que T' .

Fixons en effet à l'intérieur de T un point quelconque x_0 , et choisissons d'autre part, suivant une loi quelconque, une suite infinie de points

$$(10) \quad x_1, \quad x_2, \quad \dots, \quad x_n, \quad \dots$$

intérieurs à T et ayant x_0 comme point limite.

Nous allons considérer d'abord la suite des valeurs

$$(11) \quad f_1(x_1), \quad f_2(x_1), \quad \dots, \quad f_n(x_1), \quad \dots$$

que prennent les fonctions (9) au point x_1 . Cette suite admet une ou plusieurs valeurs limites, dont l'ensemble est nécessairement fermé. De ces valeurs limites, nous en choisirons une bien déterminée, par exemple la plus petite, ω ; puis nous chercherons dans la suite (11) le premier nombre, soit $f_{p_1}(x_1)$, qui vérifie la condition $|f_{p_1}(x_1) - \omega| < \frac{1}{2}$; ensuite, parmi les nombres qui suivent $f_{p_1}(x_1)$, nous choisirons le premier, soit $f_{p_2}(x_1)$, qui vérifie la condition $|f_{p_2}(x_1) - \omega| < \frac{1}{2^2}$, et ainsi de suite. Nous arrivons ainsi à extraire de la suite donnée (9) une autre suite bien déterminée

$$(12) \quad f_{p_1}(x), \quad f_{p_2}(x), \quad \dots$$

qui tende vers la limite ω pour $x = x_1$.

La fonction $f_{p_1}(x)$ sera la première fonction de la suite cherchée.

Considérons maintenant les valeurs que prennent les fonctions

$$(13) \quad f_{p_1}(x), \quad f_{p_2}(x), \quad \dots$$

pour $x = x_2$. En suivant exactement les mêmes principes que ci-dessus, on arrive à extraire de la suite (13) une autre

$$f_{q_1}(x), \quad f_{q_2}(x), \quad \dots$$

qui tende vers une limite déterminée aussi pour $x = x_2$. Nous choisirons $f_{q_1}(x)$ comme la deuxième fonction de la suite cherchée,

puis nous considérerons les valeurs que prennent les fonctions

$$f_{q_2}(x), f_{q_3}(x), \dots$$

pour $x = x_3$.

En continuant de la sorte et suivant toujours les mêmes principes, on arrive ainsi à une suite *parfaitement déterminée* de fonctions,

$$(14) \quad f_{p_1}(x), f_{q_1}(x), \dots,$$

extraite de la suite donnée (9) et qui tend vers une limite déterminée en chacun des points (10). Mais, en vertu du théorème établi plus haut, on peut alors affirmer que cette suite (14) converge vers une fonction holomorphe dans le domaine donné T, et cela uniformément dans tout domaine intérieur tel que T'. La proposition est donc démontrée.

Jusqu'à présent, on a toujours commencé par établir le théorème du n° 6, puis on en a déduit, par voie indirecte, le théorème du n° 1. Il nous semble que la marche que nous avons suivie ci-dessus est plus simple et plus naturelle ⁽¹⁾.

SUR LES INVOLUTIONS

APPARTENANT A UNE SURFACE DE GENRES $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$;

PAR M. LUCIEN GODEAUX.

Il y a quelques années, MM. Enriques et Severi d'une part ⁽²⁾, MM. Bagnera et De Franchis d'autre part ⁽³⁾, ont montré que les

⁽¹⁾ Pour les démonstrations données antérieurement et pour la bibliographie, voir surtout :

P. MONTEL, *Leçons sur les séries de polynômes à une variable complexe*, p. 20-26;

C. CARATHÉODORY et E. LANDAU, *Beiträge zur Konvergenz von Funktionenfolgen* (*Sitzungsberichte der Kön. Preussischen Akademie der Wissenschaften*, Bd. XXVI, 1911, p. 587-595).

⁽²⁾ *Memoire sur les surfaces hyperelliptiques* (*Acta Mathematica*, t. XXXII et XXXIII, 1909) (Prix Bordin, 1908).

⁽³⁾ *Le superficie algebriche le quali ammettono una rappresentazione*

involutions de genres $p_a = P_4 = 1$ existant sur une surface de Jacobi ou de Picard ($p_a = -1, p_g = P_4 = 1$) ont l'ordre égal à $2^\alpha 3^\beta$ ($\alpha \leq 3, \beta \leq 1$), complétant ainsi les belles recherches de MM. Picard, Humbert et Traynard sur les surfaces hyper-elliptiques. En m'appuyant sur un théorème de M. Enriques, d'après lequel une involution de genres $p_a = P_4 = 1$, existant sur une surface de genres $p_a = P_4 = 1$, est cyclique ou composée avec une involution cyclique, j'ai démontré récemment que l'ordre d'une pareille involution ne peut avoir comme facteurs premiers que 2 et 3 (¹). J'ai remarqué depuis qu'un résultat analogue pouvait s'obtenir pour les involutions de genres $p_a = p_g = 0, P_6 = 1$ existant sur une surface de mêmes genres $p_a = p_g = 0, P_6 = 1$. C'est ce que je me propose d'exposer ici.

Au moyen d'un raisonnement déjà employé une première fois par MM. Enriques et Severi (²), une seconde fois par M. Enriques (³), j'établirai tout d'abord le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Étant donnée sur une surface algébrique une involution I_n , d'ordre n , n'ayant qu'un nombre fini de points de coïncidence, s'il est possible de trouver sur cette surface un système complet $\{C\}$, simple, dépourvu de points-bases, tel que les courbes, transformées des C au moyen de la correspondance $(n-1, n-1)$ définie par I_n , appartiennent à un système continu de dimension supérieure à celle de $\{C\}$, l'involution I_n est cyclique ou composée avec une involution cyclique.*

J'applique ensuite ce théorème aux involutions appartenant à une surface de genres $p_a = p_g = 0, P_6 = 1$, en laissant de côté les involutions rationnelles. En profitant des recherches de M. Enriques sur ces surfaces (⁴), j'établis que :

THÉORÈME II. — *Une involution de genres $p_a = p_g = 0, P_6 = 1$,*

parametrica mediante funzioni iperellittiche di due argomenti (Memorie della Società italiana delle Scienze, 3^e série, t. XV, 1908).

(¹) *Sur les involutions de genres un existant sur une surface de genres un. (Bull. de l'Acad. R. de Belgique, 1913).*

(²) *Loc. cit., t. XXXII, p. 333 et suiv.*

(³) *Sulle trasformazioni razionali delle superficie di genere uno (Rend. R. Accad. di Bologna, mars 1910).*

(⁴) *Sopra le superficie algebriche di bigenere uno (Memorie della Società italiana delle Scienze [detta dei XL], 3^e série, t. XIV, 1906).*

existant sur une surface de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$, est cyclique ou composée avec une involution cyclique.

Considérant le cas particulier où l'ordre d'une pareille involution est un nombre premier p , j'établis que $p = 2$ ou $p = 3$. Par suite :

THÉORÈME III. — *L'ordre d'une involution de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$, existant sur une surface de mêmes genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$, n'admet comme facteurs premiers que 2 et 3.*

J'établis ensuite les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME IV. — *Si sur une surface de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$, il existe une involution d'ordre 2 et de mêmes genres, on peut prendre comme surface représentative de cette involution une surface du sixième ordre passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre et possédant, en outre, quatre points doubles coniques.*

THÉORÈME V. — *Si sur une surface de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$, il existe une involution d'ordre 3 et de mêmes genres, on peut prendre comme surface représentative de l'involution une surface du sixième ordre passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre et possédant, en outre, trois points doubles biplanaires ordinaires.*

1. Soit, sur une surface algébrique F , une involution I_n , d'ordre n , ne possédant qu'un nombre fini (≥ 0) de points de coïncidence. Cette involution I_n détermine, entre les points de la surface F , une correspondance $(n - 1, n - 1)$.

Supposons que, sur la surface F , il soit possible de trouver un système complet $\{C\}$, simple, dépourvu de points-bases, tel que les courbes K , qui correspondent aux courbes C dans la correspondance $(n - 1, n - 1)$ définie par I_n , appartiennent à un système continu complet $\{K\}$, de dimension supérieure à celle de $\{C\}$. Nous allons montrer que, dans ces conditions, supposer que les courbes K sont irréductibles conduit à une absurdité.

Considérons une courbe K_1 du système $\{K\}$ qui ne soit pas la

conjuguée d'une C au moyen de I_n [c'est-à-dire de la transformation $(n-1, n-1)$ définie par I_n]. Soit L la courbe qui correspond à K_1 au moyen de I_n . Pour fixer les idées, supposons qu'un groupe de I_n appartenant à la courbe composée $K_1 + L$ ait exactement k de ses points sur K_1 . On a certainement $k < n-1$, sans quoi la courbe L appartiendrait au système $\{C\}$, alors qu'on a supposé le contraire. La courbe L sera d'ailleurs généralement irréductible.

Faisons varier la courbe K_1 d'une manière continue dans le système $\{K\}$. Lorsque K_1 coïncidera avec une courbe K conjugquée d'une C au moyen de I_n , la courbe L se décomposera, elle se réduira précisément à la courbe $(n-k)K + C$. Mais, d'après une observation faite par MM. Enriques et Severi ⁽¹⁾, une pareille réduction de la courbe L n'est possible que si la courbe C contient les points de coïncidence de I_n . Or, cela n'a pas lieu, en général, puisque le système $\{C\}$ est dépourvu de points-bases et que I_n n'a qu'un nombre fini de points de coïncidences. L'absurdité à laquelle nous sommes parvenus prouve que la courbe K est réductible quelle que soit la courbe C choisie.

Si les courbes K ne sont pas réductibles en $n-1$ courbes, on recommencera le raisonnement précédent sur chaque partie de courbe K sur laquelle se trouvent plusieurs points d'un même groupe de I_n , et l'on parviendra de même à une absurdité.

Il s'ensuit que les courbes K sont réductibles en $n-1$ courbes. Par suite, l'involution I_n est cyclique ou composée avec une involution cyclique.

2. Supposons que la surface F et l'involution I_n soient toutes deux de genres $p_a = p_g = 0$, $P_0 = 1$. Nous allons déduire du théorème I qui vient d'être établi que dans ce cas, I_n est cyclique ou composée avec une involution cyclique; mais, auparavant, nous rappellerons brièvement les principales propriétés d'une surface de genres $p_a = p_g = 0$, $P_0 = 1$, propriétés établies par M. Enriques ⁽²⁾.

⁽¹⁾ *Loc. cit.*, t. XXXII, p. 335.

⁽²⁾ *Sopra le superficie di bigenere uno (loc. cit.)*. — Voir aussi le Mémoire de M. FANO : *Superficie algebriche di genere zero e bigenere uno, e loro casi particolari* (*Rend. Circ. Matem.*, t. XXIX, Palermo, 1910).

Une surface de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$ est dépourvue de courbes $(2i - 1)$ -canoniques, elle possède les courbes $2i$ -canoniques d'ordre zéro. On a donc pour une telle surface

$$p_g = P_3 = P_5 = \dots = P_{2i+1} = 0, \quad P_2 = P_4 = P_6 = \dots = P_{2i} = 1$$

et, de plus, $p_a = 0$, $p^{(1)} = 1$. Un système linéaire complet $|C|$, de genre $\pi > 1$, a le degré $2\pi - 2$ et la dimension $\pi - 1$. Il admet un système adjoint $|C'|$ de mêmes caractères. On a $2C \equiv 2C'$. Si le système est irréductible, il n'admet des points-bases que si ses courbes sont hyperelliptiques, et alors ces points-bases sont simples et au nombre de deux. Il existe toujours un système linéaire de genre 4, de courbes non hyperelliptiques, de sorte que l'on peut prendre comme modèle projectif d'une surface de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$ une surface d'ordre 6 de S_3 passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre ⁽¹⁾.

Revenons à l'involution I_n donnée sur F . Soit Φ une surface représentative de l'involution, c'est-à-dire une surface en correspondance $(1, n)$ avec F , les n points correspondant à un même point de Φ formant un groupe de I_n .

Pour appliquer le théorème I au cas actuel, le premier point à établir est que cette involution ne possède qu'un nombre fini de coïncidences. Supposons qu'elle puisse en avoir une infinité, formant une courbe D . D'après un théorème de M. Enriques ⁽²⁾, la transformée d'une courbe bicanonique de Φ (qui est d'ordre zéro), augmentée de $2D$, donne une courbe bicanonique de F . Si D existe, F aurait une courbe bicanonique d'ordre non nul, ce qui est impossible. Donc, l'involution I_n a au plus un nombre fini de points de coïncidence.

Le second point à établir est l'existence sur F d'un système

⁽¹⁾ Nous ne rappelons ici que les propriétés qui nous sont nécessaires pour la suite, car l'analyse des surfaces de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$ a été poussée très loin par M. Enriques. Ce géomètre a notamment attiré l'attention sur les transformations birationnelles non périodiques de la surface en elle-même. Notons encore ce théorème de M. Fano, d'après lequel le lieu des droites de S_3 appartenant à ∞^1 quadriques d'un réseau sans points-bases, est une congruence d'ordre 3, de classe 7, et de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$.

⁽²⁾ *Ricerche di Geometria sulle superficie algebriche* (*Memorie della R. Accad. di Torino*, 2^e série, t. XLIV, 1893).

complet, simple et sans points-bases, dont la dimension soit inférieure à celle du système complet auquel appartiennent (comme courbes totales) les transformées au moyen de I_n des courbes du premier système. Il est facile de voir que tout système simple de courbes non hyperelliptiques satisfait à ces conditions. Soit, en effet, un système complet (donc linéaire) $|C|$, simple, de courbes non hyperelliptiques, de genre $\pi > 2$. Ce système est donc dépourvu de points-bases. Indiquons par K les courbes transformées des C au moyen de I_n , par ξ le genre de ces courbes. Entre une C et la K correspondante, on a une correspondance $(1, n-1)$; la formule de Zeuthen donne

$$\xi - 1 \geq n(\pi - 1).$$

Considérons le système complet $\{K\}$. Ce système ne sera, en général, pas linéaire, parce que les courbes K pourront avoir des points multiples variables. Les courbes de $\{K\}$ infiniment voisines d'une K générique, découpent sur celle-ci la série caractéristique complète ⁽¹⁾. Or, cette série caractéristique est d'ordre $2\xi - 2$ et de dimension $\xi - 2$. Par suite, le système $\{K\}$ a au moins la dimension $\xi - 1$ et celle-ci est supérieure à la dimension $\pi - 1$ de $|C|$, car $n > 1$.

Le théorème I est donc applicable au cas actuel et l'involution I_n est cyclique ou composée avec une involution cyclique. Le théorème II se trouve donc établi.

3. Nous allons faire voir que, pour démontrer le théorème III, c'est-à-dire que pour démontrer que l'ordre n de I_n n'admet comme facteurs premiers que 2 et 3, il suffit de prouver que si l'on a une involution I_p d'ordre premier p et de genres $p_a = p_g = 0$, $P_0 = 1$ sur une surface également de genres $p_a = p_g = 0$, $P_0 = 1$, p est égal à 2 ou 3.

Posons $n = p_1 p_2 \dots p_\alpha$, les nombres $p_1, p_2, \dots, p_\alpha$ étant premiers. Supposons que l'involution I_n est composée avec une involution cyclique I_r , où $r = p_1 p_2 \dots p_\beta$ ($\beta \leq \alpha$). Soit Φ_β une surface représentative de l'involution I_r . Entre Φ_β et F on a une corres-

⁽¹⁾ ENRIQUES, *Sulla proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari* (Rend. R. Accad. di Bologna, décembre 1904).

pondance $(1, r)$ et entre Φ et Φ_β une correspondance $(1, p_{\beta+1} \dots p_\alpha)$. On en conclut que la surface Φ_β a les genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$, car l'irrégularité, le genre géométrique et les plurigenres d'une surface sont respectivement supérieurs ou égaux à l'irrégularité, au genre géométrique et aux plurigenres d'une involution donnée sur cette surface.

D'après ce que nous avons vu, il existe sur F une transformation birationnelle T , de période r , qui engendre I_r . La transformation T^{p_β} engendre une involution d'ordre $p_1 \dots p_{\beta-1}$, car on a $(T^{p_\beta})^{p_1 \dots p_{\beta-1}} = T^r = 1$. Soit $\Phi_{\beta-1}$ une surface qui représente cette involution. Entre $\Phi_{\beta-1}$ et F , on a une correspondance $(1, p_1 \dots p_{\beta-1})$ et entre Φ_β et $\Phi_{\beta-1}$ une correspondance $(1, p_\beta)$. $\Phi_{\beta-1}$ est donc de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$. En considérant l'involution d'ordre $p_1 \dots p_{\beta-2}$ engendrée par $T^{\beta p - 1 \beta p}$, on trouverait une surface $\Phi_{\beta-2}$ de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$ en correspondance $(1, p_1 \dots p_{\beta-2})$ avec F , $(1, p_{\beta-1})$, avec $\Phi_{\beta-1}$. En continuant de même et en opérant de la même manière avec l'involution d'ordre $\frac{n}{r} = p_{\beta+1} \dots p_\alpha$ existant sur Φ_p , on arrivera à construire une chaîne de surfaces de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$

$$\Phi_0 \equiv F, \Phi_1, \dots, \Phi_p, \dots, \Phi_\alpha \equiv \Phi,$$

telle que, entre Φ_k et Φ_{k-1} , par exemple, on ait une correspondance $(1, p_k)$, p_k étant premier. Si donc nous parvenons à prouver que l'on a $p_k \leq 3$, nous aurons démontré notre théorème III.

4. Soient Φ et F deux surfaces de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$ entre lesquelles il existe une correspondance $(1, p)$, p étant premier. Soit I_p l'involution formée par les groupes de p points de F qui correspondent aux points de Φ . L'involution I_p est cyclique, c'est-à-dire engendrée par une transformation birationnelle T de F en elle-même, de période p ($T^p = 1$).

Nous utiliserons la terminologie suivante :

1° Un système linéaire $|C|$ sera dit *invariant pour* T , ou plus simplement *invariant*, lorsque T transformera une courbe de $|C|$ en une courbe de $|C|$, distincte ou non de la première.

2° Une courbe C sera dite *invariante pour* T , ou tout simple-

ment *invariante*, lorsque T transformera un point de C en un point de C .

On prouve aisément l'existence de systèmes invariants. Soit, en effet, $|C_1|$ un système qui ne soit pas invariant. Les transformations $T, T^2, \dots, T^{p-1}$ changent $|C_1|$ en des systèmes $|C_2|, |C_3|, \dots, |C_p|$. Le système complet

$$|C| = |C_1 + C_2 + \dots + C_p|$$

est invariant pour T , car une courbe C' , transformée d'une courbe C par T , satisfait à la relation fonctionnelle

$$C' \equiv C_2 + C_3 + \dots + C_p + C_1 \equiv C.$$

Le système $|C|$, invariant, ne peut d'ailleurs pas être composé avec l'involution I_p . Supposons, en effet, que cela soit possible. Rapportons projectivement les courbes C , supposées de genre $\pi \geq 3$ et non hyperelliptiques, aux hyperplans d'un espace à $\pi - 1$ dimensions, $S_{\pi-1}$. On obtient une certaine surface Ψ , d'ordre $\frac{1}{p}(2\pi - 2)$, représentative de l'involution et, par suite, de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$. La dimension du système des sections hyperplanes de Ψ est donc, d'une part, égale à $\frac{1}{p}(\pi - 1)$; mais, d'autre part, elle est égale à $\pi - 1$; on aurait donc $p = 1$, ce qui est absurde.

Si, au contraire, le système $|C|$ était formé de courbes hyperelliptiques, il serait composé avec une involution rationnelle de couples de points et un raisonnement simple prouverait que I_p est rationnelle, ce qui est absurde également. Donc :

Un système linéaire complet ne peut être composé avec I_p .

Dans le paragraphe suivant, nous montrerons l'existence de courbes invariantes et en même temps nous construirons un modèle projectif de Φ .

§. Soit $|A|$ un système linéaire invariant, complet, simple, sans points-bases, de genre π et, par conséquent, de degré $2\pi - 2$ et de dimension $\pi - 1$.

Considérons une courbe quelconque A_1 de $|A|$ et soient A_2 ,

$\Lambda_3, \dots, \Lambda_p$ les courbes (également de $|\Lambda|$) en lesquelles $T, T^2, \dots, T^{p-1}$ transforment respectivement Λ_1 . A la courbe $\Lambda_1 + \Lambda_2 + \dots + \Lambda_p$ correspond sur la surface Φ une certaine courbe Γ , birationnellement identique à Λ_1 et, par conséquent, de genre effectif π .

Soit M un point commun aux courbes Λ_1, Λ_i . La transformation T^{p-i+1} fait correspondre à ce point un point M' commun aux courbes Λ_{p-i+2} et Λ_1 . Les points M, M' appartiennent donc à un même groupe de I_p et, par suite, il ne leur correspond qu'un seul point sur Φ . Ce point est situé sur Γ et correspond à deux points de Λ_1 , il est donc double pour Γ . On trouve de la sorte $(p-1)(\pi-1)$ points doubles sur la courbe Γ , correspondant aux groupes de I_p ayant deux de leurs points sur Λ_1 . Le genre virtuel de Γ est donc égal à $(p-1)(\pi-1) + \pi = p(\pi-1) + 1$. Cette courbe Γ détermine un système linéaire $|\Gamma|$ de genre $p(\pi-1) + 1$, de degré $2p(\pi-1)$ et de dimension $p(\pi-1)$.

Aux courbes de $|\Gamma|$ correspondent sur F des courbes invariantes C vérifiant la relation fonctionnelle

$$C \equiv \Lambda_1 + \Lambda_2 + \dots + \Lambda_p \equiv p\Lambda.$$

Les courbes C ont le degré $2p^2(\pi-1)$, le genre $p^2(\pi-1) + 1$, et elles forment un système linéaire $|C|$ de dimension $p(\pi-1)$, c'est-à-dire *incomplet* (ce qui vérifie le théorème trouvé à la fin du paragraphe précédent).

Le système $|\Gamma|$ est simple, car s'il ne l'était pas il en serait de même de $|C|$ et, par suite, de $|\Lambda|$, alors qu'on a supposé $|\Lambda|$ simple.

Le système $|\Gamma|$ est dépourvu de points-bases, car autrement $|C|$ et, par suite, $|\Lambda|$ auraient aussi des points-bases, ce qui est contre l'hypothèse.

Rapportons projectivement les courbes Γ aux hyperplans d'un espace linéaire à $p(\pi-1)$ dimensions. Nous obtenons une surface d'ordre $2p(\pi-1)$, birationnellement identique à Φ , que nous désignerons encore par Φ . A une courbe Λ correspond, sur Φ , la section de cette surface par un hyperplan la touchant en $(p-1)(\pi-1)$ points.

6. Soit P un point de coïncidence de l'involution I_p sur F . Le

point P est changé en lui-même par T , par conséquent le point P , compté p fois, forme un groupe de I_p . Soit P' le point de diramation correspondant sur Φ .

Comment agit la transformation T sur les points infiniment voisins de P ? Nous allons démontrer que :

Si la transformation T laisse invariants les points infiniment voisins de P , on a $p = 2$ et réciproquement ;

Si T échange entre eux les points infiniment voisins de P , on a $p \geq 3$ et réciproquement.

Supposons, en premier lieu, que la transformation T laisse invariant chaque point infiniment voisin de P . Considérons une courbe A'_1 de $|A|$ passant par P . Les transformations $T, T^2, \dots, T^{p-1}$ changent A'_1 en des courbes $A'_2, A'_3, \dots, A'_p$ de $|A|$ touchant A'_1 en P . Nous obtenons ainsi une courbe C particulière, que nous indiquerons par C'_2 ,

$$C'_2 \equiv A'_1 + A'_2 + \dots + A'_p,$$

ayant deux points p -uples infiniment voisins en P .

Soit C''_2 une courbe analogue, construite en partant d'une autre courbe de $|A|$ passant par P . Les courbes C'_2, C''_2 déterminent un système linéaire de courbes C , que nous désignerons par $|C_2|$. Les courbes C_2 ont, en P , un point p -uple à tangentes variables, et ont donc le genre effectif égal à $p^2(\pi - 1) - \frac{1}{2}p(p - 1)$.

Soient Γ_2 les courbes Γ correspondant sur Φ aux courbes C_2 , et ν le degré virtuel du système $|\Gamma_2|$. Entre une courbe Γ_2 et la courbe C_2 correspondante, nous avons une correspondance $(1, p)$ et l'involution γ'_p ainsi déterminée sur C_2 possède, par hypothèse, une coïncidence (nécessairement p -uple, puisque I_p est cyclique) sur chacune des branches de cette courbe, au point infiniment voisin de P . Appliquons la formule de Zeuthen à cette correspondance, nous obtenons

$$p\nu + p(p - 1) = 2p^2(\pi - 1) - p(p - 1),$$

c'est-à-dire

$$\nu = 2p(\pi - 1) - 2(p - 1).$$

Mais le degré effectif du système $|C_2|$ est égal à $2p^2(\pi - 1) - p^2$,

donc le degré effectif de $|\Gamma_2|$ est égal à $2p(\pi - 1) - p$. Le degré effectif d'un système linéaire étant au plus égal à son degré virtuel, on a

$$\nu \geq 2p(\pi - 1) - p.$$

On en déduit $p \leq 2$, c'est-à-dire $p = 2$. Ainsi se trouve démontrée une partie de l'énoncé précédent.

Supposons maintenant que T ne laisse pas invariants les points infiniment voisins de P . Entre ces points, ou, si l'on préfère, entre les tangentes à F en P , on a une correspondance $(p - 1, p - 1)$ possédant deux coïncidences p -uples. T laisse donc invariants deux points infiniment voisins de P , c'est-à-dire deux directions issues de P . Nous désignerons par d_1, d_2 ces directions invariantes.

Considérons une courbe A'_1 de $|A|$, touchant la direction d_1 en P . Les transformations $T, T^2, \dots, T^{p-1}$ changent A'_1 en des courbes $A'_2, A'_3, \dots, A'_p$ touchant également d_1 en P . On obtient donc la courbe

$$C'_2 \equiv A'_1 + A'_2 + \dots + A'_p,$$

courbe C particulière ayant en P deux points p -uples infiniment voisins. On obtiendra une seconde courbe C , soit C''_2 , jouissant de la même propriété, en opérant sur d_2 comme on a opéré sur d_1 . Les courbes C'_2, C''_2 déterminent un système linéaire de courbes C , soit $|C_2|$, ayant en P un point p -uple à tangentes variables.

Indiquons encore par $|\Gamma_2|$ le système des sections hyperplanes Γ de Φ correspondant aux C_2 , par ν le degré virtuel de ce système. Entre une courbe Γ_2 et la C_2 correspondante, on a une correspondance $(1, p)$, mais l'involution γ'_p déterminée ainsi sur C_2 ne possède, cette fois, aucune coïncidence. La formule de Zeuthen donne, par conséquent,

$$p\nu = 2p^2(\pi - 1) - p(p - 1),$$

c'est-à-dire

$$\nu = 2p(\pi - 1) - p(p - 1).$$

Le degré virtuel d'un système linéaire tracé sur une surface de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$ est toujours pair ; par suite, ν est pair et p est impair ($p > 2$). Ainsi se trouve démontrée la seconde et dernière partie de l'énoncé ci-dessus. Cependant, nous montrons que la comparaison du degré effectif de $|\Gamma_2|$ et de son degré

virtuel ν ne conduit pas, comme dans le premier cas, à une limite de p . Le degré effectif de $|\Gamma_2|$ est en effet égal à $2p(\pi - 1) - p$ et l'on a toujours

$$\nu = 2p(\pi - 1) - (p - 1) > 2p(\pi - 1) - p.$$

7. Nous supposerons actuellement $p > 2$ et nous démontrerons que les courbes C passant par P ont généralement, en ce point, un point double dont les branches touchent respectivement les directions d_1, d_2 .

Auparavant, nous montrerons qu'en dehors de ses courbes multiples éventuelles, la surface Φ possède au plus des points doubles non tacnodaux. Supposons en effet que Φ possède, en dehors de ses courbes multiples, un point m -uple. Les sections hyperplanes passant par ce point forment un système linéaire de dimension $p(\pi - 1) - 1$, et, par suite, de genre $p(\pi - 1)$. Or, le genre de ces courbes est égal à $p(\pi - 1) + 1 - \frac{1}{2}m(m - 1)$, par conséquent $\frac{1}{2}m(m - 1) = 1$, c'est-à-dire $m = 2$. Un point multiple de Φ (en dehors des lignes multiples) est certainement double. Ce point double ne peut être tacnodal, c'est-à-dire posséder dans son domaine du premier ordre une droite double. En effet, si cela était possible, les sections hyperplanes de Φ passant par ce point auraient le genre $p(\pi - 1) - 1$, et la dimension du système linéaire qu'elles forment serait aussi $p(\pi - 1) - 1$, ce qui est impossible.

Considérons maintenant les courbes Cassujetties à la seule condition de passer par P . Elles forment un système linéaire de dimension $p(\pi - 1) - 1$, que nous désignerons par $|C_1|$. Soit $|\Gamma_1|$ le système formé par les courbes Γ de Φ correspondant aux C_1 . Les courbes Γ_1 passent donc par P' .

Indiquons par i l'abaissement du genre produit par la singularité que les C_1 ont en général en P . Entre une courbe Γ_1 et la C_1 correspondante, on a une correspondance $(1, p)$ déterminant une involution cyclique γ'_p sur C_1 . Cette γ'_p a certainement des points de coïncidence dans le voisinage de P , sans quoi ce point ne serait pas une coïncidence de I_p . De plus, ces points de coïncidence sont p -uples, puisque γ'_p est cyclique. Indiquons leur nombre par δ .

Supposons que P' soit simple pour Φ et appliquons la formule de Zeuthen à la correspondance existant entre une Γ_1 et la C_1 correspondante. On obtient

$$p \cdot 2p(\pi - 1) + (p - 1)\delta = 2p^2(\pi - 1) - 2i,$$

d'où $\delta = i = 0$, ce qui est impossible. Par suite, P' est multiple pour Φ . D'après ce que nous avons vu, il est double. La formule de Zeuthen donne actuellement

$$\begin{aligned} p[2p(\pi - 1) - 2] + (p - 1)\delta &= 2p^2(\pi - 1) - 2i, \\ \text{d'où} \qquad \qquad \qquad (p - 1)\delta + 2i &= 2p. \end{aligned}$$

p étant impair, $(p - 1)\delta$ est pair, de sorte que deux cas peuvent, *a priori*, se présenter :

$$\begin{aligned} 1^\circ \qquad \qquad \qquad \delta &= 2, \qquad i = 1; \\ 2^\circ \qquad \qquad \qquad \delta &= 1, \qquad i = \frac{1}{2}(p + 1). \end{aligned}$$

Nous allons faire voir que ce second cas conduit à une absurdité. Si $\delta = 1$, $i = \frac{1}{2}(p + 1)$, les courbes C_1 ont en P une multiplicité supérieure à 2, car autrement on aurait $p = 1$. De plus, il y a une de leurs branches qui touche soit d_1 , soit d_2 . Considérons un point qui s'approche indéfiniment de P sur une branche d'une courbe C_1 non tangente à d_1 ou d_2 . Les $p - 1$ points qui complètent le groupe de I_p , dont le point en question fait partie, s'approchent également indéfiniment de P . Ce ne peut d'ailleurs être que sur des branches différentes de C_1 , puisque, en dehors des directions d_1 , d_2 , il n'y a pas de coïncidence infiniment voisine de P . Les courbes C_1 ont donc en P une multiplicité de la forme $1 + \mu p$, μ étant entier. On a donc

$$\frac{1}{2}(p + 1) = \frac{1}{2}\mu p(\mu p + 1),$$

c'est-à-dire $p = 1$. On ne peut donc pas avoir $\delta = p$.

Si $\delta = 2$, les courbes C_1 touchent nécessairement les directions d_1 , d_2 , de sorte que :

Les courbes C passant par P ont généralement en ce point

un point double dont les branches touchent les directions unies issues de P.

8. Nous allons actuellement montrer qu'en un point de diramation, la surface Φ possède un point biplanaire ordinaire et que, de plus, on a $p = 3$ (nous supposons toujours, bien entendu, $p > 2$).

Nous avons déjà établi que le point de diramation P' est double pour Φ . Pour faire voir qu'il n'est pas uniplanaire, il suffit de prouver que les courbes Γ_1 ont généralement en P' un point double à tangentes distinctes. Or, cela est évident, car une courbe C_1 quelconque a en P un point double à tangentes distinctes d_1, d_2 et, sur chacune de ses branches, un point de coïncidence infiniment voisin de P . A ces deux points infiniment voisins de P , comptés chacun p fois, correspondent sur une courbe Γ_1 (correspondant à la C_1 choisie) deux points distincts, situés un sur chaque branche de la courbe. Les courbes Γ_1 ont donc bien, en général, un point double ordinaire en P' , et ce point n'est donc pas uniplanaire pour Φ .

Considérons les courbes C_1 assujetties à toucher en P une direction différente de d_1, d_2 . Soient $\overline{C}_2$ ces courbes. Elles forment un système linéaire $|\overline{C}_2|$ de dimension $p(\pi - 1) - 2$, et ont en P une multiplicité au moins égale à 3.

Lorsqu'un point s'approche indéfiniment de P sur l'une des branches d'une courbe $\overline{C}_2$ (non tangente à d_1 ou d_2 le cas échéant), les $p - 1$ autres points du groupe de I_p déterminé par ce premier point, s'approchent également indéfiniment de P , mais c'est nécessairement sur les branches différentes, puisqu'un point infiniment voisin de P n'est généralement pas invariant pour T . On en conclut que les courbes $\overline{C}_2$ ont, en P , un point multiple d'indice μp , μ étant un entier.

Désignons par $\overline{\Gamma}_2$ les courbes Γ_1 qui correspondent aux courbes $\overline{C}_2$, et par $\overline{\gamma}$ le degré virtuel du système $|\overline{\Gamma}_2|$.

Une courbe $\overline{C}_2$ est de genre $p^2(\pi - 1) - \frac{1}{2}\mu p(\mu p - 1)$, donc la formule de Zeuthen, appliquée à la correspondance existant entre une $\overline{\Gamma}_2$ et la $\overline{C}_2$ correspondante, donne

$$p\overline{\gamma} = 2p^2(\pi - 1) - \mu p(\mu p - 1),$$

c'est-à-dire

$$\bar{v} = 2p(\pi - 1) - \mu(\mu p - 1).$$

La dimension du système $|\bar{\Gamma}_2|$ est donc égale à

$$\frac{1}{2}\bar{v} = p(\pi - 1) - \frac{1}{2}\mu(\mu p - 1).$$

Mais, d'autre part, la dimension *effective* de ce système est égale à celle de $|\bar{C}_2|$, c'est-à-dire à $p(\pi - 1) - 2$. Cette dimension effective peut être inférieure à la première trouvée, car il se peut que les courbes $\bar{\Gamma}_2$ aient des points-bases simples *imposés*. On a donc

$$\frac{1}{2}\bar{v} \geq p(\pi - 1) - 2,$$

c'est-à-dire

$$p(\pi - 1) - \frac{1}{2}\mu(\mu p - 1) \geq p(\pi - 1) - 2.$$

On en déduit

$$p \leq \frac{\mu + 4}{\mu^2},$$

c'est-à-dire $\mu = 1$, $p = 3$ ou 5 .

Les courbes du système $|\bar{C}_2|$ ont donc en P un point p -uple à tangentes variables et ce système coïncide avec le système $|C_2|$ rencontré dans la seconde partie du paragraphe 6.

Nous avons vu que le degré effectif de $|\Gamma_2|$ est égal à $p(\pi - 1) - p$, tandis que son degré virtuel est égal à $2p(\pi - 1) - p + 1$. Par suite, le système $|\Gamma_2|$ possède un point-base simple assigné. Sa dimension effective est donc $p(\pi - 1) - \frac{1}{2}(p - 1) - 1$. Mais, d'autre part, cette dimension est égale à $p(\pi - 1) - 2$, par suite

$$\frac{1}{2}(p - 1) + 1 = 2,$$

ou $p = 3$.

Considérons une courbe C_2 . Sur cette courbe, il y a un groupe de l_p infiniment voisin de P et ayant un point sur chaque branche de C_2 . A ce groupe correspond sur la Γ_2 homologue un seul point infiniment voisin de P' , par suite les Γ_2 ont en P' un point de rebroussement. Le point-base simple de $|\Gamma_2|$ est donc infiniment voisin de P' .

Nous avons ainsi établi que, en P' , Φ a un point double non uniplanaire et qu'il y a un système linéaire de sections hyperplanes de Φ ayant en P' un point de rebroussement. Par suite :

En un point de diramation, Φ' possède un point double biplanaire ordinaire, et l'on a $p = 3$ (si $p > 2$).

9. Reprenons le cas $p = 2$. Nous avons établi que, dans ce cas, T laisse invariants les points infiniment voisins de P .

Considérons les courbes C passant par P et désignons-les par C_1 . En adoptant les mêmes notations que tantôt (§ 7) et en appliquant la formule de Zeuthen comme on l'a fait en cet endroit, on trouve que Φ a un point double en P' et que $\delta = 2$, $i = 1$. Les courbes C_1 ont donc en P un point double à tangentes variables. On voit qu'actuellement les systèmes $|C_1|$ et $|C_2|$ coïncident.

A une courbe C_1 correspond sur Φ une courbe Γ_1 , ayant en P' un point double ordinaire, car aux deux points infiniment voisins de P sur cette C_1 correspondent des points distincts sur Φ , situés un sur chaque branche de la Γ_1 . De plus, la même particularité se présentera en général pour toutes les courbes C_1 . On en conclut que :

Si $p = 2$, la surface Φ possède un point double conique en un point de diramation.

10. Nous allons calculer le nombre x de points de diramation situés sur Φ . Remarquons d'abord qu'un point double conique abaisse la classe de Φ de deux unités, un point double biplanaire ordinaire de trois unités. Nous pourrions donc dire que si entre les surfaces Φ , F nous avons une correspondance $(1, p)$, en un point de diramation, la surface Φ possède une singularité abaissant sa classe de p unités.

Calculons l'invariant de Zeuthen-Segre I de Φ et de F . Nous savons que cet invariant est donné par

$$I = 12p_a + 9 - p^{(1)},$$

donc qu'actuellement il est égal à 8.

Considérons un faisceau de courbes Γ et soit m la classe effective

de Φ . On a, sur cette surface, d'après la formule de M. Segre,

$$I = 8 = m + px - 2p(\pi - 1) - 4p(\pi - 1) - 4.$$

Considérons le faisceau de courbes C correspondant sur F , on a

$$I = 8 = pm + x - 2p^3(\pi - 1) - 4p^2(\pi - 1) - 4.$$

L'élimination de m entre ces deux formules donne

$$12(p - 1) = x(p^2 - 1),$$

d'où

$$x = \frac{12}{p + 1}.$$

Si $p = 2$, on a $x = 4$; si $p = 3$, on trouve $x = 3$. Ainsi se trouvent démontrés les théorèmes IV et V énoncés au début de ce travail, car par l'existence sur Φ d'un système linéaire simple de courbe de genre quatre, dépourvu de points-bases, on pourra transformer Φ en une surface d'ordre six, de S_3 possédant quatre points doubles si $p = 2$, trois points doubles biplanaires si $p = 3$.

ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES ET TRANSCENDANTES DÉPOURVUES DE RACINES RÉELLES;

PAR M. MICHEL PETROVITCH.

I. — ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES A TOUTES LES RACINES IMAGINAIRES.

1. Laguerre s'est à plusieurs reprises ⁽¹⁾ occupé du problème : déterminer une suite de quantités

$$(1) \qquad \omega_0, \quad \omega_1, \quad \omega_2, \quad \dots,$$

⁽¹⁾ *Sur la théorie des équations numériques* (*Journal de Math. pures et appliquées*, 3^e série, t. IX, 1883; *Œuvres*, p. 4-47).

Sur quelques points de la théorie des équations numériques (*Acta mathematica*, t. IV, 1884; *Œuvres*, p. 185-206).

telles que

$$(2) \quad a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = 0$$

étant une équation algébrique *quelconque* à toutes les racines *réelles*, l'équation

$$(3) \quad \omega_0 a_0 + \omega_1 a_1 z + \dots + \omega_n a_n z^n = 0$$

ait également toutes ses racines *réelles*. Il a donné plusieurs solutions particulières du problème, comme le sont, par exemple, les nombres ω_n fonction suivantes de n :

- 1° Polynomes en n n'ayant que des zéros réels négatifs;
- 2° Fonctions entières de n du genre zéro ou un, n'ayant que des zéros réels négatifs;
- 3° Fonctions $e^{-\alpha n^2}$, α étant un nombre réel négatif;
- 4° Produits d'un nombre arbitraire de fonctions 1°, 2°, 3°.

On peut se proposer le problème réciproque : *déterminer des suites (1) telles que (2) étant une équation algébrique quelconque, à toutes les racines IMAGINAIRES, l'équation (3) ait également toutes ses racines IMAGINAIRES.*

J'en trouve la solution simple et assez générale suivante :

Désignons par λ_{kn} l'intégrale définie

$$(4) \quad \lambda_{kn} = \int_{a_k}^{b_k} u_k r_k^n dt,$$

où les limites a_k et b_k sont arbitraires, mais réelles et indépendantes de n ; u_k et r_k sont deux fonctions arbitraires de la variable t , indépendantes de n , réelles dans l'intervalle (a_k, b_k) et u_k gardant un signe invariable dans cet intervalle.

Le produit

$$(5) \quad \omega_n = \lambda_{1n} \lambda_{2n} \dots \lambda_{pn},$$

d'un nombre arbitraire des intégrales λ_{kn} fournit une solution du problème.

Il suffit manifestement de faire voir que

$$(6) \quad \omega_n = \lambda_{kn}$$

en est une solution. Or, dans ce cas, le premier membre de (3) se

laisse mettre sous la forme

$$(7) \quad \int_{a_k}^{b_k} u_k P(r_k x) dt,$$

$P(x)$ étant le premier membre de (2), ce qui démontre d'un coup la proposition, les fonctions u_k et $P(r_k x)$ ne changeant de signe pour aucune valeur réelle de t , comprise entre les limites d'intégration, ni aucune valeur réelle de x .

Dans l'expression de λ_{kn} on dispose des éléments u_k, r_k, a_k, b_k . En les faisant varier, ainsi que les paramètres qui peuvent y figurer, on aura un nombre illimité de suites λ_{kn} , lesquelles, ainsi que leurs produits en nombre quelconque, jouissent de la propriété énoncée et fournissent des suites (1) cherchées.

Voici quelques expressions pouvant jouer le rôle de λ_{kn} :

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a+n} = \int_0^\infty e^{-at} e^{-nt} dt, \\ \frac{\Gamma(a)}{(n+1)^{a+1}} = \int_0^1 \left(\log \frac{1}{t} \right)^a t^n dt, \\ \frac{b-a}{(a+n)(b+n)} = \int_0^\infty (e^{-bt} - e^{-at}) e^{-nt} dt, \\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n = \int_0^\infty e^{-t} t^n dt, \\ \frac{\pi}{2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n+4)} = \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{1}{1+t^2} \right)^2 \left(\frac{1}{1+t^2} \right)^n dt, \\ \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{a+bn}} = \int_0^\infty e^{-at^2} e^{-bnt^2} dt, \end{array} \right.$$

où a et b sont des constantes réelles positives.

2. Dans un travail antérieur (1) j'ai donné les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doivent satisfaire les coefficients a_i d'une équation algébrique

$$(9) \quad a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = 0,$$

(1) Une classe remarquable de séries entières (*Atti del IV Congresso internazionale dei matematici*, Roma, 1908, p. 36-43).

d'un degré *arbitraire* pour jouir des propriétés suivantes :

- 1° Que toutes ses racines soient *réelles*;
- 2° Que si l'on néglige un nombre *arbitraire* de derniers termes dans son premier membre, l'équation restante ait encore toutes ses racines *réelles*.

Ce qui précède fournit la possibilité de former des classes générales d'équations algébriques d'un ordre pair *arbitraire* jouissant des propriétés suivantes, réciproques aux précédentes :

- 1° Que l'équation ait toutes ses racines *imaginaires*;
- 2° Que si l'on néglige dans son premier membre un nombre pair *arbitraire* de derniers termes, l'équation restante ait encore toutes ses racines *imaginaires*.

Telles sont, par exemple, les équations

$$(9') \quad 1 + x + x^2 + \dots + x^{2n} = 0,$$

$$(10) \quad 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \dots + \frac{x^{2n}}{1.2 \dots 2n} = 0.$$

Et d'une manière générale, en appelant *équations* E_{2n} toute équation algébrique jouissant des propriétés 1° et 2°, *toute équation*

$$(11) \quad \omega_0 + \omega_1 x + \dots + \omega_{2n} x^{2n} = 0,$$

où ω_n est une expression (5), est une équation E_{2n} .

On le voit en prenant pour

$$(12) \quad a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = 0$$

l'équation (9). Telles seraient, par exemple, les équations

$$\frac{1}{a} + \frac{x}{a+1} + \dots + \frac{x^{2n}}{a+2n} = 0,$$

$$1 + \frac{x}{2^{a+1}} + \frac{x^2}{3^{a+1}} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n+1)^{a+1}} = 0,$$

$$\frac{1}{ab} + \frac{x}{(a+1)(b+1)} + \dots + \frac{x^{2n}}{(a+2n)(b+2n)} = 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{x}{\sqrt{a+b}} + \dots + \frac{x^{2n}}{\sqrt{a+2nb}} = 0,$$

où a et b sont des constantes réelles positives.

De même : toute équation

$$(13) \quad \omega_0 + \frac{\omega_1}{1}x + \frac{\omega_2}{1 \cdot 2}x^2 + \dots + \frac{\omega_{2n}}{1 \cdot 2 \dots 2n}x^{2n} = 0$$

est une équation E_{2n} . On le voit en prenant pour (12) l'équation (10).

Et d'une manière générale : l'équation

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^{2n} = 0,$$

étant une équation E_{2n} , l'équation

$$(14) \quad \omega_0 a_0 + \omega_1 a_1 x + \dots + \omega_{2n} a_{2n} x^{2n} = 0$$

en est aussi une.

3. Dans le cas où r_k garde un signe invariable pour t variant de a_k à b_k , les équations E_{2n} de la forme

$$(15) \quad \lambda_{k0} + \lambda_{k1}x + \dots + \lambda_{k,2n}x^{2n} = 0,$$

ont une distribution particulière de leurs racines dans le plan de la variable x .

Supposons, pour fixer les idées, que r_k soit positif et désignons par $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$ les intervalles numériques, indépendants des coefficients de l'équation, tous contenus dans l'intervalle de 0 à 2π et tels que pour toute valeur θ contenue dans δ_k le produit

$$(16) \quad \sin \theta \sin 2n\theta$$

soit positif et le produit

$$(17) \quad \sin \theta \sin (2n+1)\theta$$

soit négatif. Alors :

Les arguments des racines de (15) se trouvent toujours en dehors des intervalles $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$

En effet, le premier membre de l'équation (15) se laisse mettre sous la forme

$$(18) \quad \int_{a_k}^{b_k} u_k \frac{1 - (r_k x)^{2n+1}}{1 - r_k x} dt,$$

et sa partie imaginaire pour $x = \varphi e^{\theta i}$ sera

$$(19) \quad \int_{a_k}^{b_k} u_k \frac{\Phi dt}{P^2 + Q^2},$$

où

$$(20) \quad \begin{cases} P = 1 - r_k \rho \cos \theta, \\ Q = r_k \rho \sin \theta. \end{cases}$$

$$\Phi = r_k \rho \sin \theta - (r_k \rho)^{2n+1} \sin(2n+1)\theta + (r_k \rho)^{2n+2} \sin 2n\theta.$$

Cette partie imaginaire ne saurait s'annuler pour aucune valeur positive de ρ lorsque θ est compris dans un des intervalles δ_k , ce qui démontre la proposition.

Dans le cas où r_k est négatif, les intervalles δ_k doivent être remplacés par ceux dans lesquels le produit (16) est *négatif* et le produit (17) *positif*.

II. — ÉQUATIONS TRANSCENDANTES SANS RACINES RÉELLES.

4. Il existe des séries de puissances

$$(21) \quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots,$$

jouissant de cette propriété remarquable d'avoir tous leurs zéros *réels* et que, de plus, le polynome formé d'un nombre arbitraire de leurs premiers termes ait également tous ses zéros *réels*.

J'ai donné dans le travail cité les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doivent satisfaire les coefficients a_i d'une série (21) pour qu'elle jouisse de pareilles propriétés.

Il existe, de même, des séries (21) jouissant de la propriété réciproque à la précédente : *de n'avoir, ni elle-même ni le polynome formé d'un nombre impair arbitraire de ses premiers termes, aucun zéro réel*, la série dans son cercle de convergence, le polynome dans tout le plan de la variable x .

L'exemple le plus simple est fourni par les séries élémentaires

$$(22) \quad 1 + x + x^2 + x^3 + \dots,$$

$$(23) \quad 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \dots$$

En appelant *séries S* les séries pareilles, les suites précédentes

$$(24) \quad \omega_0, \quad \omega_1, \quad \omega_2, \quad \dots$$

fournissent la possibilité d'en former un nombre illimité.

Si

$$(25) \quad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

est une série S, la série

$$(26) \quad a_0 \omega_0 + a_1 \omega_1 x + a_2 \omega_2 x^2 + \dots,$$

dans le cas où elle converge dans une certaine circonférence, en est aussi une.

Car, en partant d'une série S déterminée, par exemple de (22) ou (23), ou, d'une manière générale, de (25), la série

$$(27) \quad \lambda_{k0} - \lambda_{k1} x + \lambda_{k2} x^2 + \dots,$$

où λ_{ku} est une expression (4), se laisse exprimer par l'intégrale définie

$$(28) \quad \int_{a_k}^{b_k} u_k f(r_k x) dt.$$

Comme u_k et $f(r_k x)$ ne s'annulent pour aucune valeur de t comprise entre les limites d'intégration et aucune valeur de x pour laquelle la série $f(r_k x)$ converge et l'intégrale (28) ait un sens, la série (27), et par suite aussi la série (26), sont des séries S.

En désignant par M_k la plus grande valeur absolue que prend la fonction r_k pendant que t varie de a_k à b_k , on a

$$(29) \quad \lambda_{kn} < \lambda_{k0} M_k^n,$$

et par suite la série (27) aura son rayon de convergence au moins égal à

$$(30) \quad \frac{R}{M_k},$$

R désignant le rayon de convergence de (25). Il s'ensuit que le rayon de convergence de la série (26) est au moins égal à

$$(31) \quad \frac{R}{M},$$

où M désigne le produit $M_1 M_2 \dots M_p$ et que son coefficient de x^n est plus petit en valeur absolue que

$$(32) \quad \mu x_n M^n,$$

où α_n désigne la valeur absolue du coefficient a_n , et μ est la constante égale à la valeur absolue de ω_0 . Le module de la série (26), pour toute valeur de x de module ρ plus petit que (31), est inférieur à

$$(33) \quad \mu F(M\rho),$$

où

$$(34) \quad F(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots$$

Ainsi, toute série S de la forme

$$(35) \quad \omega_0 + \omega_1 x + \omega_2 x^2 + \dots$$

a son rayon de convergence au moins égal à $\frac{1}{M}$ et son module inférieur à

$$\frac{\mu}{1 - M\rho};$$

toute série S de la forme

$$(36) \quad \omega_0 + \frac{\omega_1}{1} x + \frac{\omega_2}{1.2} x^2 + \dots$$

converge dans tout le plan de x et a son module inférieur à

$$\mu e^{M\rho}.$$

5. Une limite inférieure des modules des zéros d'une série de Taylor quelconque

$$(37) \quad \varphi(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots$$

est fournie par la valeur

$$(38) \quad \xi = \frac{|A_0|}{\sqrt{N}},$$

où N est la plus petite valeur que prend la fonction

$$(39) \quad v(x) = \frac{1}{x^2} \sum_{n=0}^{\infty} e_n x^{2n},$$

pendant que x varie par valeurs réelles de 0 jusqu'au rayon de convergence de la série (37), les e_n étant des valeurs positives

égales ou supérieures aux carrés de modules des coefficients correspondants A_n ⁽¹⁾.

Pour la série S

$$(40) \quad \omega_0 + \omega_1 x + \omega_2 x^2 + \dots,$$

d'après ce qui précède, on peut prendre

$$(41) \quad e_n = \mu^2 M^{2n};$$

la fonction $\nu(x)$ sera

$$(42) \quad \frac{\mu^2}{(1 - M^2 x^2) x^2},$$

et elle atteint son minimum pour la valeur

$$z = \frac{1}{M\sqrt{2}},$$

inférieure au rayon de convergence $\frac{1}{M}$ de la série (40). Ce minimum étant

$$4\mu^2 M^2,$$

on trouve

$$\xi = \frac{1}{2M}.$$

Aucune série (40) n'a donc des zéros à l'intérieur de la circonférence de rayon $\frac{1}{2M}$ décrite autour de $x = 0$.

Pour les polynômes S_{2n} obtenus en arrêtant la série (40) à son terme de degré $2n$, la fonction $\nu(x)$ sera

$$(43) \quad \nu(x) = \frac{\mu^2}{x^2} \frac{1 - (Mx)^{2n+1}}{1 - M^2 x^2},$$

de sorte qu'une limite inférieure des modules des zéros de S_{2n} est donnée par

$$\frac{\mu}{\sqrt{N}},$$

N étant le minimum de (43).

⁽¹⁾ Bull. de la Soc. math. de France, t. XXIX, 1902.

6. Pour les séries S plus particulières, de la forme

$$(44) \quad \varphi(x) = \lambda_{k0} + \lambda_{k1}x + \lambda_{k2}x^2 + \dots,$$

on peut montrer qu'elles n'ont point de zéros, ni réels ni imaginaires, inférieurs, en module, à la valeur $\frac{1}{M_k}$.

En effet, la série se laisse écrire sous la forme

$$(45) \quad \varphi(x) = \int_{a_k}^{b_k} \frac{u_k}{1 - r_k x} dt,$$

et sa partie réelle pour $x = \rho e^{i\theta}$ sera

$$(46) \quad \int_{a_k}^{b_k} u_k \frac{1 - r_k \rho \cos \theta}{P^2 + Q^2} dt,$$

P et Q étant les valeurs précédentes (20).

La valeur absolue de

$$r_k \rho \cos \theta, \quad \text{pour} \quad \rho < \frac{1}{M_k},$$

étant plus petite que 1, l'intégrale (46), et par suite aussi la fonction $\varphi(Z)$, ne saurait s'annuler pour aucune valeur dont le module serait inférieur à $\frac{1}{M_k}$.

Il s'ensuit que les fonctions

$$\frac{1}{\varphi(x)} \quad \text{et} \quad \log \varphi(x)$$

sont aussi développables en série de puissances convergentes dans la circonférence au moins égale à $\frac{1}{M_k}$.

Telles seraient, par exemple, les séries

$$\begin{aligned} \sum_0^\infty \frac{x^n}{a+n}, & \quad \sum_0^\infty \frac{x^n}{(n+1)^2}, \\ \sum_0^\infty \frac{x^n}{(a+n)(b+n)}, & \quad \sum_0^\infty \frac{x^n}{\sqrt{a+bn}}, \\ \sum_0^\infty \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots (2n+2)} x^n. & \end{aligned}$$

La classe (44) des séries S se présente comme éléments de réduction pour les intégrales définies

$$(47) \quad \int_a^b R(t, x) dt,$$

où R est une fonction rationnelle de x à coefficients fonctions de t .
En désignant par

$$\theta_1(x), \quad \theta_2(x), \quad \theta_3(x), \quad \dots,$$

les diverses intégrales

$$\theta_k(x) = \int_a^b \frac{u_k}{1 - r_k x} dt,$$

jouant le rôle de fractions simples obtenues par la décomposition de la fraction rationnelle $R(t, x)$, l'intégrale (47) se laisse toujours exprimer sous la forme de la somme d'un polynôme en x et d'une combinaison linéaire et homogène de termes

$$\begin{aligned} \theta_1(x), \quad x \frac{d\theta_1}{dx}, \quad x^2 \frac{d^2\theta_1}{dx^2}, \quad \dots, \\ \theta_2(x), \quad x \frac{d\theta_2}{dx}, \quad x^2 \frac{d^2\theta_2}{dx^2}, \quad \dots, \\ \dots, \quad \dots, \quad \dots, \quad \dots, \end{aligned}$$

en nombre limité (¹).

Toutes les fois qu'à une fraction simple correspondent les fonctions u_k et r_k réelles dans l'intervalle (a, b) et u_k gardant un signe invariable dans cet intervalle, la fonction correspondante $\theta_k(x)$ représente une série S de la classe (44). Les séries (44) se présentent donc comme éléments simples pour les intégrales (47).

C'est, par exemple, ainsi que la série

$$\sum_0^\infty \frac{x^n}{\sqrt{a + bn}}$$

joue le rôle d'élément simple pour toute intégrale

$$\int_0^\infty R(t, x) dt,$$

(¹) Bull. de la Soc. math. de France, t. XXXII, 1904.

pour laquelle existe une fraction simple avec

$$u_k = e^{at^2}, \quad r_k = e^{bt^2},$$

a et b étant des constantes positives; que la série

$$\sum_0^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)^a} \quad (a > 0)$$

joue ce rôle pour les intégrales

$$\int_0^1 R(t, x) dt,$$

pour lesquelles existe une fraction simple avec

$$u_k = \log \frac{1}{t}, \quad r_k = t, \quad \dots$$

7. Les séries S de la forme

$$(48) \quad \chi(x) = \lambda_{k0} + \frac{\lambda_{k1}}{1} x + \frac{\lambda_{k2}}{1.2} x^2 + \frac{\lambda_{k3}}{1.2.3} x^3 + \dots$$

sont représentables par des intégrales

$$\int_{a_k}^{b_k} u_k e^{r_k x} dt,$$

et représentent des fonctions *entières* de x qui n'ont pas de zéros réels. Plus généralement, comme la partie réelle de $\chi(x + \beta i)$, qui est

$$\int_{a_k}^{b_k} u_k e^{r_k \alpha} \cos r_k \beta dt,$$

ne s'annule pour aucune valeur de β comprise entre

$$-\frac{\pi}{M_k} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{M_k},$$

la fonction $\chi(x)$ n'a aucun zéro dans la bande comprise dans le plan des x entre les deux droites

$$\beta + \frac{\pi}{M_k} = 0, \quad \beta - \frac{\pi}{M_k} = 0.$$

La série, par exemple

$$(49) \quad \sum_0^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)^{n+1}} = \int_0^{\infty} e^{x t \log \frac{1}{t}} dt,$$

appartenant à la classe (48) n'a pas de zéros dans la bande comprise entre les deux droites

$$\beta + \pi e = 0, \quad \beta - \pi e = 0.$$

Les séries (48) jouissent de propriétés présentant une grande analogie avec celles de la fonction élémentaire e^{ax} et ont fait objet de mes deux Notes ⁽¹⁾ antérieures. Je m'en occuperai aussi dans un travail qui paraîtra prochainement.

SUR LA TRANSFORMATION D'IMSCHENETSKY;

PAR M. J. CLAIRIN.

Je me suis proposé de rechercher s'il existe des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes, dont il soit possible de déduire, à l'aide de transformations de Bäcklund de première espèce, une suite indéfinie d'équations analogues, à moins que l'équation obtenue après un certain nombre d'opérations ne possède deux intégrales intermédiaires du premier ordre relatives au même système de caractéristiques; pour abréger nous désignerons une telle suite par la lettre (L), la plus simple des transformations de Bäcklund de première espèce étant la célèbre transformation de Laplace qui s'applique aux équations linéaires de la manière qui vient d'être dite. Malheureusement il semble très difficile de résoudre la question précédente sans faire aucune hypothèse sur les transformations employées, aussi je considérerai seulement dans ce travail le cas où les variables indépendantes sont

⁽¹⁾ *Sur des transcendentes entières généralisant les fonctions exponentielles et trigonométriques* (C. R. Acad. Sc., t. CLVI, p. 1213); *Séries hypertrigonométriques* (C. R. Acad. Sc., t. CLVI).

conservées ; les résultats qui vont être démontrés ont été énoncés dans une Note communiquée à l'Académie des Sciences le 10 juin 1912.

Nous nous servons des notations ordinaires : x, y désignant deux variables indépendantes, nous représenterons par z une fonction de ces variables, par p, q, r, s, t les dérivées partielles des deux premiers ordres de cette fonction, les mêmes lettres pourvues d'un indice auront des significations analogues, nous rappelons encore qu'une transformation de Bäcklund de première espèce est dite transformation (B_1) ⁽¹⁾.

1. Une équation aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes dérive d'une transformation (B_1) quand elle possède un système de caractéristiques du premier ordre ⁽²⁾, cette transformation (B_1) est d'ailleurs unique ; par conséquent, une suite (L) ne peut être composée que d'équations possédant deux systèmes de caractéristiques du premier ordre, c'est-à-dire d'équations de Monge-Ampère. Une équation de Monge-Ampère qui dérive d'une transformation (B_1) conservant les variables indépendantes est linéaire par rapport aux dérivées secondes r, s, t ⁽³⁾ ; considérons donc une telle équation que nous écrirons sans restreindre la généralité

$$(\epsilon) \quad r + (m + \mu)s + m\mu t + M = 0,$$

en représentant par m, μ, M des fonctions de x, y, z, p, q , les deux systèmes (C) et (Γ) de caractéristiques du premier ordre sont respectivement définis par les équations différentielles

$$dy = m dx, \quad dz = \mu dx.$$

(ϵ) dérive de la transformation

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} z_1 = \varphi(x, y, z, p, q), \\ p_1 + \mu q_1 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + p \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) - \mu \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + q \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + M \frac{\partial \varphi}{\partial p} = 0 \end{array} \right.$$

⁽¹⁾ Pour la théorie générale des transformations de Bäcklund, voir ma Thèse (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3^e série, t. XIX, Suppl., 1903).

⁽²⁾ *Annales de l'École Normale supérieure*, 3^e série, t. XX, 1913, p. 173.

⁽³⁾ GOURSAT, *Leçons sur les équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. II, p. 267 et suiv.

si φ satisfait à l'égalité

$$(2) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial q} - m \frac{\partial \varphi}{\partial p} = 0;$$

pour que cette transformation soit une transformation (B_1) déduite de (C) , il faut et il suffit que le premier membre de la seconde équation (1) satisfasse comme $\varphi(x, y, z, p, q)$ à (2); en posant, pour abréger l'écriture,

$$H(x, y, z, p, q) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + p \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + q \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) - M(x, y, z, p, q) \frac{\partial \varphi}{\partial p},$$

ces conditions s'écrivent

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial \mu}{\partial q} - m \frac{\partial \mu}{\partial p} = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial q} - m \frac{\partial H}{\partial p} = 0. \end{cases}$$

En exprimant que (ε) dérive aussi d'une transformation (B_1) déduite du système (Γ) , on trouve des résultats analogues, en particulier,

$$(4) \quad \frac{\partial m}{\partial q} - \mu \frac{\partial m}{\partial p} = 0.$$

Supposons que m, μ, φ satisfassent aux conditions précédentes (2), (3), (4); les équations (1) définissent une transformation (B_1) , $z_1(x, y)$ est l'intégrale d'une équation (ε_1) aux dérivées partielles du second ordre, il faut que (ε_1) soit comme (ε) une équation de Monge-Ampère linéaire en r_1, s_1, t_1 pour qu'il soit possible de lui appliquer une transformation (B_1) distincte de (1). Si l'on imagine les équations (1) résolues par rapport à z et à l'une de ses dérivées — p par exemple — le système obtenu doit présenter relativement à z, p, q , les mêmes particularités que (1) relativement à z_1, p_1, q_1 ; l'expression trouvée pour z doit être indépendante de q , tandis que l'expression de p doit contenir linéairement cette dérivée : il est facile de vérifier que ces conditions sont nécessaires et suffisantes.

Nous aurons les dérivées premières et secondes de z et p par rapport à q en dérivant deux fois de suite les premiers membres

de (1), il vient

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial q} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial q} + \frac{\partial \varphi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial q} = 0, \\ q_1 \left(\frac{\partial \mu}{\partial q} + \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial q} + \frac{\partial \mu}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial q} \right) - \left(\frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial H}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial q} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial q} \right) = 0 \end{array} \right.$$

et

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q \partial z} \frac{\partial z}{\partial q} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q \partial p} \frac{\partial p}{\partial q} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial p} \frac{\partial z}{\partial q} \frac{\partial p}{\partial q} \\ \quad + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \left(\frac{\partial z}{\partial q} \right)^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2} \left(\frac{\partial p}{\partial q} \right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial^2 z}{\partial q^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial p} \frac{\partial^2 p}{\partial q^2} = 0, \\ q_1 \left[\frac{\partial^2 \mu}{\partial q^2} + 2 \frac{\partial^2 \mu}{\partial q \partial z} \frac{\partial z}{\partial q} + 2 \frac{\partial^2 \mu}{\partial q \partial p} \frac{\partial p}{\partial q} + 2 \frac{\partial^2 \mu}{\partial z \partial p} \frac{\partial z}{\partial q} \frac{\partial p}{\partial q} \right. \\ \quad \left. + \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} \left(\frac{\partial z}{\partial q} \right)^2 + \frac{\partial^2 \mu}{\partial p^2} \left(\frac{\partial p}{\partial q} \right)^2 + \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial^2 z}{\partial q^2} + \frac{\partial \mu}{\partial p} \frac{\partial^2 p}{\partial q^2} \right] \\ \quad - \left[\frac{\partial^2 H}{\partial q^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial z} \frac{\partial z}{\partial q} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} \frac{\partial p}{\partial q} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial z \partial p} \frac{\partial z}{\partial q} \frac{\partial p}{\partial q} \right. \\ \quad \left. + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \left(\frac{\partial z}{\partial q} \right)^2 + \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} \left(\frac{\partial p}{\partial q} \right)^2 + \frac{\partial H}{\partial z} \frac{\partial^2 z}{\partial q^2} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial^2 p}{\partial q^2} \right] = 0. \end{array} \right.$$

En tenant compte de (2) et (3), les équations (5) donnent

$$\frac{\partial z}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial q} = -m,$$

nous allons remplacer dans les premiers membres de (6) ces dérivées par leurs valeurs et $\frac{\partial^2 p}{\partial q^2}$ par 0, nous avons ainsi les équations

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} - 2m \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p \partial q} + m^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial^2 z}{\partial q^2} = 0, \\ & q_1 \left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial q^2} - 2m \frac{\partial^2 \mu}{\partial p \partial q} + m^2 \frac{\partial^2 \mu}{\partial p^2} + \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial^2 z}{\partial q^2} \right) \\ & - \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q^2} - 2m \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} + m^2 \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} + \frac{\partial H}{\partial z} \frac{\partial^2 z}{\partial q^2} \right) = 0; \end{aligned}$$

enfin, en éliminant $\frac{\partial^2 z}{\partial q^2}$ entre ces deux équations, nous trouvons

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} q_1 \left[\frac{\partial^2 \mu}{\partial q^2} - 2m \frac{\partial^2 \mu}{\partial p \partial q} + m^2 \frac{\partial^2 \mu}{\partial p^2} - \frac{\frac{\partial \mu}{\partial z}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} - 2m \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p \partial q} + m^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2} \right) \right] \\ - \left[\frac{\partial^2 H}{\partial q^2} - 2m \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} + m^2 \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} - \frac{\frac{\partial H}{\partial z}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} - 2m \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p \partial q} + m^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2} \right) \right] = 0, \end{array} \right.$$

équation qui exprime évidemment que la fonction de x, y, q, z, p_1, q_1 , obtenue en résolvant (1) par rapport à p , est une fonction linéaire de q , puisque nous avons écrit que la dérivée $\frac{\partial^2 p}{\partial q^2}$ est nulle. La condition (7) se décompose en deux autres que l'on peut mettre sous la forme

$$(8) \quad \frac{\frac{\partial^2 \mu}{\partial q^2} - 2m \frac{\partial^2 \mu}{\partial p \partial q} + m^2 \frac{\partial^2 \mu}{\partial p^2}}{\frac{\partial \mu}{\partial z}} = \frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} - 2m \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p \partial q} + m^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}} = \frac{\frac{\partial^2 H}{\partial q^2} - 2m \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} + m^2 \frac{\partial^2 H}{\partial p^2}}{\frac{\partial H}{\partial z}};$$

d'ailleurs de

$$\frac{\partial \mu}{\partial q} = m \frac{\partial \mu}{\partial p}$$

on déduit

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mu}{\partial q \partial p} &= m \frac{\partial^2 \mu}{\partial p^2} + \frac{\partial m}{\partial p} \frac{\partial \mu}{\partial p}, \\ \frac{\partial^2 \mu}{\partial q^2} &= m \frac{\partial^2 \mu}{\partial p \partial q} + \frac{\partial m}{\partial q} \frac{\partial \mu}{\partial p} = m^2 \frac{\partial^2 \mu}{\partial p^2} + m \frac{\partial m}{\partial p} \frac{\partial \mu}{\partial p} + \frac{\partial m}{\partial q} \frac{\partial \mu}{\partial p} \end{aligned}$$

et l'on a des équations analogues en remplaçant μ par φ ou H .

On peut donc écrire les conditions (8), en tenant compte de (4),

$$(\mu - m) \frac{\frac{\partial m}{\partial p} \frac{\partial \mu}{\partial p}}{\frac{\partial \mu}{\partial z}} = (\mu - m) \frac{\frac{\partial m}{\partial p} \frac{\partial \varphi}{\partial p}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}} = (\mu - m) \frac{\frac{\partial m}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial p}}{\frac{\partial H}{\partial z}}.$$

La fonction $\mu - m$ n'est pas identiquement nulle, par conséquent il vient

$$(9) \quad \frac{\partial m}{\partial p} = 0$$

ou

$$(10) \quad \frac{\frac{\partial \mu}{\partial p}}{\frac{\partial \mu}{\partial z}} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial p}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}} = \frac{\frac{\partial H}{\partial p}}{\frac{\partial H}{\partial z}}.$$

Prenons d'abord le premier cas; de (9) on tire, d'après (4),

$$\frac{\partial m}{\partial q} = 0,$$

m ne dépend que de x, y, z . En raisonnant de même pour la transformation (B_1) de (ε) déduite du système (Γ) , on trouve que μ est également une fonction des variables x, y, z .

Lorsque les expressions de m et μ contiennent seulement les variables indépendantes et la fonction inconnue, les deux transformées de (ε) peuvent donc être aussi des équations de Monge-Ampère ⁽¹⁾ : considérons en particulier (ε_1) , les caractéristiques de (ε_1) sont définies par les équations

$$dy = m dx, \quad dy = \mu dx,$$

dans lesquelles z doit être remplacée par son expression tirée de (1), c'est-à-dire par une fonction de x, y, z_1, p_1, q_1 . D'ailleurs, si (ε) et (ε_1) appartiennent à une suite (L) , (ε_1) présente nécessairement les mêmes particularités que (ε) , le long d'une caractéristique le rapport $\frac{dy}{dx}$ ne dépend ni de p_1 ni de q_1 ; il ne peut en être ainsi que dans le cas où m et μ sont des fonctions de x, y seulement.

Un changement de variables indépendantes qui ne modifie pas le problème dont nous avons indiqué l'énoncé au début de ce travail permet alors de remplacer (ε) par une équation où ne figurent plus les dérivées r, t ; avant de résoudre pour ces équations la question posée, considérons les équations (10) que nous avons laissées de côté dans le développement qui précède.

Avec les équations (2) et (3), le système (10) exprime que de (1) on peut déduire une équation indépendante de z, p, q , (ε) possède alors une intégrale intermédiaire du premier ordre dont l'expression contient une fonction arbitraire : supposons que du système (Γ) de caractéristiques de (ε) on déduise une transformation (B_1) , en raisonnant comme nous venons de le faire, on établira que cette transformation peut remplacer (ε) par une nouvelle équation de Monge-Ampère si l'on a

$$(11) \quad \frac{\partial \mu}{\partial p} = 0$$

ou des équations analogues à (10). Cette dernière hypothèse doit être écartée : (ε) posséderait dans ce cas une seconde intégrale

⁽¹⁾ Cette condition est simplement nécessaire, il est facile de vérifier sur un exemple qu'elle n'est pas suffisante.

intermédiaire du premier ordre dépendant d'une fonction arbitraire, elle différerait par une simple transformation de contact de l'équation

$$s = 0$$

et aucune transformation (B_1) ne permettrait de passer de cette équation à une autre équation du second ordre.

Remarquons de plus que, si (ε) fait partie d'une suite (L) comprenant plus de deux équations du second ordre, on peut raisonner sur une des équations intermédiaires de la suite comme nous avons fait pour (ε) ; on en déduira que cette équation — par conséquent toutes celles de la suite et en particulier (ε) — peut être remplacée sans inconvénient par une équation indépendante de r, t . Le seul cas à examiner est donc celui où (ε) se transforme en une équation (ε_{-1}) telle que le système (Γ_{-1}) de caractéristiques de cette équation qui correspond à (Γ) admette deux invariants du premier ordre.

De (2), (10), (11) on conclut

$$(12) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial q} = \frac{\partial \varphi}{\partial p} = \frac{\partial H}{\partial p} = 0$$

ou

$$(13) \quad \frac{\partial \mu}{\partial z} = 0, \quad \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial p}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}} = \frac{\frac{\partial H}{\partial p}}{\frac{\partial H}{\partial z}}.$$

Les équations (12) ne peuvent être satisfaites par une fonction φ telle que (1) définisse une transformation de Bäcklund; il reste donc seulement à étudier les équations (13). μ satisfaisant aux conditions (3), (11), (13) ne dépend que de x, y ; nous exprimerons ce résultat en disant que le long d'une caractéristique (Γ) de (ε) le rapport $\frac{dy}{dx}$ est une fonction des variables indépendantes. D'après la remarque que nous avons faite un peu plus haut, (ε_{-1}) doit présenter des particularités analogues à celles de (ε) , les systèmes (C_{-1}) et (Γ_{-1}) de caractéristiques de (ε_{-1}) possèdent respectivement des propriétés analogues à celles de (Γ) et (C) . Le long d'une caractéristique (C_{-1}) , le rapport $\frac{dy}{dx}$ ne dépend que de x et y ; ce rap-

port est, d'ailleurs, égal à m ; m est donc comme μ une fonction de x, y ; on arrive à la même conclusion que dans le cas général.

2. Pour qu'une transformation (B_1) qui ne change pas les variables indépendantes soit applicable à une équation aux dérivées partielles du second ordre où ne figurent ni r ni t , il faut et il suffit que cette équation puisse s'écrire

$$(14) \quad s + L(x, y, z, q)p + N(x, y, z, q) = 0,$$

c'est-à-dire soit obtenue en annulant un polynôme du premier degré en s et p ⁽¹⁾; l'équation précédente dérive de la transformation

$$z_1 = \varphi(x, y, z, q), \quad p_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - N(x, y, z, q) \frac{\partial \varphi}{\partial q},$$

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial z} = L(x, y, z, q) \frac{\partial \varphi}{\partial q} \right],$$

généralement appelée transformation d'Imschenetsky, du nom du géomètre qui l'a d'abord signalée; cette transformation est déduite du système (C) de caractéristiques défini par l'équation

$$dx = 0.$$

L'équation (14) ne peut faire partie d'une suite (L) que dans le cas où elle dérive également d'une transformation d'Imschenetsky déduite du second système (Γ) de caractéristiques; il faut donc que le premier membre soit une fonction linéaire de q comme de p ; nous pouvons, d'ailleurs, supposer que ce premier membre ne contient pas de terme en pq ⁽²⁾ et écrire sans restreindre la généralité

$$(\varepsilon) \quad s + \frac{\partial \alpha}{\partial z} p + \frac{\partial \beta}{\partial z} q + \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \gamma = 0,$$

α, β, γ représentant des fonctions de x, y, z .

(1) GOURSAT, *Leçons sur les équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. II, p. 263. Voir aussi ma Thèse, en particulier p. 44.

(2) DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. IV, p. 407 (Note de M. Gosserat).

Les équations

$$(15) \quad z_1 = q + \alpha(x, y, z), \quad p_1 + \frac{\partial \beta}{\partial z} q + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \gamma(x, y, z) = 0$$

définissent la transformation d'Imshenetsky qui correspond au système (C) de caractéristiques; nous les écrirons

$$(15') \quad z_1 = q + \alpha(x, y, z), \quad p_1 + \frac{\partial \beta}{\partial z} z_1 + \theta(x, y, z) = 0,$$

en posant

$$\gamma(x, y, z) + \frac{\partial \beta}{\partial y} - \alpha(x, y, z) \frac{\partial \beta}{\partial z} = \theta(x, y, z).$$

L'équation aux dérivées partielles du second ordre qui définit z_1 est

$$s_1 + \frac{\partial \beta}{\partial z} q_1 + \left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial y \partial z} + q \frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2} \right) z_1 + \frac{\partial \theta}{\partial y} + q \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0;$$

on doit remplacer dans le premier membre z et q par les valeurs tirées des équations (15'), il faut qu'après la substitution ce premier membre soit une fonction linéaire de p_1 pour que l'on puisse appliquer à l'équation une transformation d'Imshenetsky autre que (15'). Exprimons d'abord que le coefficient $\frac{\partial \beta}{\partial z}$ de q_1 est une fonction linéaire de p_1 en écrivant que la dérivée seconde par rapport à p_1 est nulle; il vient

$$(16) \quad \frac{\partial^3 \beta}{\partial z^3} \left(\frac{\partial z}{\partial p_1} \right)^2 + \frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2} \frac{\partial^2 z}{\partial p_1^2} = 0;$$

$\frac{\partial z}{\partial p_1}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial p_1^2}$ se calculent en dérivant la seconde équation (15'), on trouve

$$1 + \left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2} z_1 + \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \frac{\partial z}{\partial p_1} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^3 \beta}{\partial z^3} z_1 + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial z}{\partial p_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2} z_1 + \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \frac{\partial^2 z}{\partial p_1^2} = 0,$$

et, en combinant avec (16), on arrive à

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \frac{\partial^3 \beta}{\partial z^3} \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0.$$

Si $\beta(x, y, z)$ n'est pas une fonction linéaire de z , cette condition exprime qu'il existe entre $\beta(x, y, z)$ et $\theta(x, y, z)$ une rela-

tion telle que

$$\theta(x, y, z) = m(x, y) \frac{\partial \beta}{\partial z} + n(x, y),$$

c'est le cas que nous considérerons d'abord.

Les équations (15') s'écrivent alors

$$z_1 = q + \alpha(x, y, z), \quad p_1 + \frac{\partial \beta}{\partial z} [z_1 + m(x, y)] + n(x, y) = 0;$$

en prenant $z_1 + m(x, y)$ pour fonction inconnue à la place de z_1 , on peut toujours revenir au cas où $m(x, y)$ est identiquement nulle; considérons donc la transformation (1)

$$z_1 = q + \alpha(x, y, z), \quad p_1 + \frac{\partial \beta}{\partial z} z_1 + n(x, y) = 0.$$

L'équation qui définit z_1 est

$$(17) \quad s_1 - \frac{p_1 + n(x, y)}{z_1} q_1 + \left[(z_1 - \alpha) \frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial y \partial z} \right] z_1 + \frac{\partial n}{\partial y} = 0,$$

il faut que $(z_1 - \alpha) \frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial y \partial z}$ soit un polynôme du premier degré en p_1 ; un raisonnement analogue au précédent montre que cette expression doit être une fonction linéaire de $\frac{\partial \beta}{\partial z}$; les coefficients dépendant de x, y, z_1 , ces coefficients seront nécessairement des polynômes du premier degré en z_1 .

En écrivant que les termes en z_1 sont les mêmes on a, soit

$$(18) \quad \frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2} = u(x, y) \left[\frac{\partial \beta}{\partial z} - v(x, y) \right],$$

soit

$$(19) \quad \frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2} = \frac{1}{2} u(x, y).$$

Supposons, d'abord, que $\beta(x, y, z)$ satisfasse à la condition (18), d'où l'on tire

$$\frac{\partial \beta}{\partial z} = \lambda(x, y) e^{u(x, y)z} + v(x, y).$$

(1) Le changement de fonction inconnue modifie les expressions de $\alpha(x, y, z)$ et $n(x, y)$, nous conservons les mêmes lettres pour ne pas multiplier les notations; dans la suite nous ferons souvent de même.

il reste encore à évaluer les termes indépendants de z , on obtient ainsi

$$-\alpha \frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial y \partial z} = \eta(x, y) \frac{\partial \beta}{\partial z} + \xi(x, y);$$

en remplaçant $\frac{\partial \beta}{\partial z}$ par l'expression trouvée et résolvant par rapport à α , il vient

$$\alpha(x, y, z) = \frac{1}{u(x, y)} \frac{\partial u}{\partial y} z + h(x, y) e^{-u(x, y)z} + k(x, y),$$

où h et k désignent deux nouvelles fonctions de x, y ; nous prendrons d'ailleurs simplement

$$\alpha(x, y, z) = \frac{1}{u(x, y)} \frac{\partial u}{\partial y} z + h(x, y) e^{-u(x, y)z},$$

en remarquant qu'il suffit d'ajouter à z une fonction convenablement choisie de x, y pour revenir au cas où $k(x, y)$ est nulle sans modifier la forme des équations de la transformation.

Écrivons à nouveau ces équations

$$\begin{aligned} z_1 &= q + \frac{1}{u(x, y)} \frac{\partial u}{\partial y} z + h(x, y) e^{-u(x, y)z}, \\ p_1 + [\lambda(x, y) e^{u(x, y)z} + v(x, y)] z_1 + n(x, y) &= 0; \end{aligned}$$

nous prendrons maintenant $u(x, y)z$ et $u(x, y)z_1$ comme fonctions inconnues au lieu de z et z_1 , il viendra

$$\begin{aligned} z_1 &= q + h(x, y) e^{-z}, \\ p_1 + [\lambda(x, y) e^z + v(x, y)] z_1 + n(x, y) &= 0, \end{aligned}$$

d'où, pour l'équation qui donne z ,

$$\begin{aligned} (20) \quad s + \frac{d}{dx} [h(x, y) e^{-z}] + [\lambda(x, y) e^z + v(x, y)] q \\ + v(x, y) h(x, y) e^{-z} + \lambda(x, y) h(x, y) + n(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

Nous avons, au commencement de cette étude, exprimé que $\eta(x, y, z)$ — c'est-à-dire $\gamma(x, y, z) + \frac{\partial \beta}{\partial y} - \alpha(x, y, z) \frac{\partial \beta}{\partial z}$ — est une fonction linéaire de $\frac{\partial \beta}{\partial z}$; pour que (ε) appartienne à une suite (L) il faut évidemment que $\gamma(x, y, z) + \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \beta(x, y, z) \frac{\partial \alpha}{\partial z}$ soit de même une fonction linéaire de $\frac{\partial \alpha}{\partial z}$ ou, d'après les valeurs de

$\alpha(x, y, z)$, $\beta(x, y, z)$, $\gamma(x, y, z)$ données par l'équation précédente, que

$$vh e^{-z} + \lambda h + n - \frac{\partial \lambda}{\partial y} e^z - \frac{\partial v}{\partial y} z + (\lambda e^z + v z) h e^{-z}$$

soit une fonction linéaire de e^{-z} . On déduit immédiatement de là

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} = 0, \quad vh = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0;$$

ces conditions entraînent

$$\lambda = X(x), \quad v = 0.$$

L'équation (20) est l'équation de Moutard

$$(21) \quad s + \frac{d}{dx}(h e^{-z}) + \frac{d}{dy}(X e^z) + Xh + n = 0.$$

3. Passons maintenant à l'examen de la condition (19) dont nous tirons

$$(22) \quad \beta(x, y, z) = u(x, y) z^2 + v(x, y) z,$$

en observant que, d'après la forme de (z) , α et β peuvent toujours être modifiées par l'addition d'une fonction quelconque de x, y si γ est également modifiée d'une manière correspondante. Remarquons encore que nous devons supposer dans (22) $u(x, y)$ non identiquement nulle; l'hypothèse que $\beta(x, y, z)$ soit une fonction linéaire de z a été écartée au début et sera étudiée dans le paragraphe suivant.

Le raisonnement qui nous a permis de déterminer $\alpha(x, y, z)$ en écrivant que $\frac{\partial^2 \beta}{\partial y \partial z} + (z_1 - \alpha) \frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2}$ est une fonction linéaire de $\frac{\partial \beta}{\partial z}$ subsiste et montre que l'on peut écrire

$$\alpha(x, y, z) = h(x, y) z + k(x, y).$$

Les équations de la transformation d'Imshenetsky sont

$$z_1 = q + h z + k, \quad p_1 + 2 u z z_1 + v z_1 + n = 0$$

ou plus simplement

$$(23) \quad z_1 = q + h z + k, \quad p_1 + 2 u z z_1 + n = 0,$$

si l'on ajoute à z la fonction $\frac{v}{2u}$.

Développons l'équation à laquelle satisfait $z(x, y)$, de (23), on tire en dérivant et éliminant

$$(24) \quad s + hp + 2uzq + 2uhz^2 + \left(2uk + \frac{\partial h}{\partial x}\right)z + n + \frac{\partial k}{\partial x} = 0;$$

la seconde transformation d'Imshenetsky applicable à (24) est définie par les équations

$$(25) \quad \begin{cases} z_{-1} = p + uz^2, \\ q_{-1} + hp + \left(2uh - \frac{\partial u}{\partial y}\right)z^2 + \left(2uk + \frac{\partial h}{\partial x}\right)z + \frac{\partial k}{\partial x} + n = 0, \end{cases}$$

que nous écrirons

$$(25') \quad z_{-1} = p + uz^2, \quad q_{-1} + hz_{-1} + \left(uh - \frac{\partial u}{\partial y}\right)z^2 + \mu z + \sigma = 0,$$

en posant, pour abréger,

$$2uk + \frac{\partial h}{\partial x} = \mu(x, y), \quad \frac{\partial k}{\partial x} + n = \sigma(x, y);$$

on déduit de là l'équation en z_{-1}

$$(26) \quad \begin{aligned} & s_{-1} + hp_{-1} + \frac{\partial h}{\partial x} z_{-1} + 2 \left(uh - \frac{\partial u}{\partial y}\right) z z_{-1} \\ & + 2u(q_{-1} + hz_{-1} + \sigma)z \\ & - \frac{\frac{\partial}{\partial x} \left(uh - \frac{\partial u}{\partial y}\right)}{uh - \frac{\partial u}{\partial y}} (q_{-1} + hz_{-1} + \mu z + \sigma) \\ & - \frac{\mu u}{uh - \frac{\partial u}{\partial y}} (q_{-1} + hz_{-1} + \mu z + \sigma) + z \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \mu z_{-1} = 0, \end{aligned}$$

à condition de remplacer, partout où il se présente, le carré z^2 par l'expression $-\frac{q_{-1} + hz_{-1} + \mu z + \sigma}{uh - \frac{\partial u}{\partial y}}$ tirée de la seconde équation (25').

Il reste à résoudre cette équation par rapport à z et à porter la valeur trouvée dans le premier membre de (26), on voit immédiatement que ce premier membre ne sera jamais du premier degré en q_{-1} , à moins que la fonction $u(x, y)$ ne soit identiquement nulle, c'est-à-dire à moins que $\beta(x, y, z)$ ne soit une fonction linéaire de z , cas que nous avons laissé de côté et que nous allons examiner maintenant.

4. Si $\beta(x, y, z)$ est une fonction linéaire de z , (ε) peut s'écrire en faisant un changement de notations

$$s + \frac{\partial z}{\partial z} p + m(x, y)q + \gamma(x, y, z) + \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

en remplaçant z par $\rho(x, y)z$, $\rho(x, y)$ satisfaisant à

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} + m\rho = 0,$$

on revient au cas où l'équation ne contient pas de terme en q ; nous écrirons donc maintenant

$$(\varepsilon) \quad s + \frac{\partial z}{\partial z} p + \gamma + \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

et nous considérerons les équations

$$(27) \quad z_1 = q + \alpha(x, y, z), \quad p_1 + \gamma(x, y, z) = 0$$

de la transformation d'Imshenetsky qui fait correspondre (ε) à

$$s_1 + \frac{\partial \gamma}{\partial y} + (z_1 - \alpha) \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0,$$

où z doit être remplacée par la valeur que fournit la seconde équation (27).

Le raisonnement du n° 2 prouverait que $\frac{\partial \gamma}{\partial y} + (z_1 - \alpha) \frac{\partial \gamma}{\partial z}$ doit être une fonction linéaire de γ ; on a d'abord

$$\frac{\partial \gamma}{\partial z} = u(x, y)[\gamma(x, y, z) - v(x, y)]$$

ou

$$\frac{\partial \gamma}{\partial z} = u(x, y).$$

$\gamma(x, y, z)$ est donc égale soit à $\lambda(x, y)e^{u(x, y)z} + v(x, y)$, soit à $u(x, y)z + v(x, y)$, où u , v , λ désignent des fonctions des variables indépendantes.

Posons d'abord

$$\gamma(x, y, z) = \lambda(x, y)e^{u(x, y)z} + v(x, y),$$

puis écrivons que $\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \alpha \frac{\partial \gamma}{\partial z}$ est identique à un polynôme du pre-

mier degré en γ , on tire de là

$$\alpha(x, y, z) = h e^{-uz} + \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial y} z + w(x, y).$$

En remarquant qu'il suffit d'ajouter à z et z_1 des fonctions convenables de x, y et de modifier les expressions de h et λ pour revenir au cas où v et w sont identiquement nulles, nous avons la transformation

$$z_1 = q + \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial y} z + h e^{-uz}, \quad p_1 + \lambda e^{uz} = 0$$

qui conduit à l'équation

$$(28) \quad s + \left(\frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial y} - hu e^{-uz} \right) p + \left(\frac{\partial h}{\partial x} - h \frac{\partial u}{\partial x} z \right) e^{-uz} + \lambda e^{uz} + \frac{\partial^2 \log u}{\partial x \partial y} z = 0.$$

La seconde transformation d'Imschenetsky, applicable à (28), est

$$(29) \quad z_{-1} = p, \quad q_{-1} + \left(\frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial y} - hu e^{-uz} \right) z_{-1} + \left(\frac{\partial h}{\partial x} - h \frac{\partial u}{\partial x} z \right) e^{-uz} + \lambda e^{uz} + \frac{\partial^2 \log u}{\partial x \partial y} z =$$

Écrivons l'équation à laquelle satisfait z_{-1}

$$(30) \quad s_{-1} + \left(\frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial y} - hu e^{-uz} \right) p_{-1} + A(x, y, z_{-1}, q_{-1}) = 0$$

et exprimons que le coefficient de p_{-1} est linéaire en q_{-1} , c'est-à-dire que

$$\frac{\partial^2 (e^{-uz})}{\partial q_{-1}^2} = u e^{-uz} \left[- \frac{\partial^2 z}{\partial q_{-1}^2} + u \left(\frac{\partial z}{\partial q_{-1}} \right)^2 \right] = 0,$$

les dérivées de z étant obtenues en dérivant le premier membre de la deuxième équation (29), il vient ainsi

$$\begin{aligned} & \left[hu^2 e^{-uz} z_{-1} + hu \frac{\partial u}{\partial x} z e^{-uz} + \lambda u e^{uz} - \left(u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} \right) e^{-uz} + \frac{\partial^2 \log u}{\partial x \partial y} \right] \frac{\partial^2 z}{\partial q_{-1}^2} \\ & - \left[hu^3 e^{-uz} z_{-1} + hu^2 \frac{\partial u}{\partial x} z e^{-uz} - \lambda u^2 e^{uz} + \left(u^2 \frac{\partial h}{\partial x} + 2uh \frac{\partial u}{\partial x} \right) e^{-uz} \right] \left(\frac{\partial z}{\partial q_{-1}} \right)^2 = 0 \end{aligned}$$

En combinant les deux dernières équations, on trouve

$$2\lambda u^2 e^{uz} - 2u \frac{\partial (uh)}{\partial x} e^{-uz} + u \frac{\partial^2 \log u}{\partial x \partial y} = 0,$$

condition qui ne saurait être satisfaite sans que l'on eût

$$u\lambda = 0,$$

or aucune des fonctions u , λ ne peut être identiquement nulle ; il faut donc que dans (30) le coefficient de p_{-1} ne contienne pas de terme en e^{-uz} , ce qui exige

$$h = 0.$$

Les équations de la transformation s'écrivent simplement

$$z_{-1} = p, \quad q_{-1} + \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial y} z_{-1} + \lambda e^{uz} + \frac{\partial^2 \log u}{\partial x \partial y} z = 0,$$

et l'équation qui donne z_{-1} est

$$(31) \quad s_{-1} + \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial y} p_{-1} + 2 \frac{\partial^2 \log u}{\partial x \partial y} z_{-1} + \left(u \lambda z_{-1} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} z + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right) e^{uz} + \frac{\partial^3 \log u}{\partial x^2 \partial y} z = 0.$$

Un calcul déjà fait plusieurs fois prouve que cette dernière équation n'est pas bilinéaire en p_{-1} , q_{-1} , à moins que u ne soit une fonction de la seule variable y , il n'y a d'ailleurs pas d'inconvénient à supposer cette fonction égale à l'unité, l'équation (31) prend la forme simple

$$s_{-1} - q_{-1} z_{-1} - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x} q_{-1} = 0.$$

Appliquons-lui la transformation qui a pour équations

$$(32) \quad z_{-2} = p_{-1} - \frac{1}{2} z_{-1}^2 - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x} z_{-1}, \quad q_{-2} + \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial x \partial y} z_{-1} = 0,$$

d'où

$$s_{-2} + \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial x \partial y} p_{-1} + \frac{\partial^3 \log \lambda}{\partial x^2 \partial y} z_{-1} = 0,$$

il est facile de vérifier qu'après substitution à z_{-1} , p_{-1} des valeurs tirées de (32), nous trouvons une équation qui n'est pas bilinéaire en p_{-2} , q_{-2} à moins que

$$\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial x \partial y} = 0,$$

égalité qui exprime que

$$\lambda = X(x) Y(y).$$

L'équation (28) est alors

$$s + XY e^z = 0$$

ou en faisant un changement simple de fonction inconnue

$$(33) \quad s + e^z = 0,$$

on peut transformer cette équation en posant

$$z_1 = q \quad \text{ou} \quad z_{-1} = p,$$

z_1 et z_{-1} satisfont aux équations

$$(34) \quad s_1 = z_1 p_1, \quad s_{-1} = z_{-1} q_{-1},$$

qui possèdent l'une et l'autre une intégrale intermédiaire du premier ordre dépendant d'une fonction arbitraire.

§. Supposons enfin

$$\gamma(x, y, z) = u(x, y)z + v(x, y),$$

u désignant une fonction non identiquement nulle; si nous égalons $\frac{\partial \gamma}{\partial y} - z \frac{\partial \gamma}{\partial z}$ à un polynôme du premier degré en γ , nous trouvons que z est comme γ une fonction linéaire de z , les équations (27) définissent une transformation de Laplace.

Quand γ ne dépend pas de z , on ne peut déterminer z par la méthode précédente; il serait aisé de recommencer des raisonnements et des calculs analogues à ceux qui ont fourni les résultats antérieurs, mais nous indiquerons une solution plus rapide.

Les équations (27) montrent que le système (Γ) de caractéristiques de l'équation (ε) admet deux invariants du premier ordre y et $q + z + \int \gamma dx$: désignons par $\chi(x, y, z, p)$ une fonction telle que

$$(35) \quad z_{-1} = \chi(x, y, z, p)$$

soit l'une des équations de la transformation (B_1) applicable à (ε) et par (z_{-1}) l'équation du second ordre à laquelle satisfait z_{-1} . S'il n'existe pas deux combinaisons intégrables des équations différentielles du système (C_{-1}) des caractéristiques de (ε_{-1}) qui correspond à (C) , on peut répéter pour (z_{-1}) ce que nous avons dit dans les cas déjà étudiés; on trouve que cette équation a l'une des formes indiquées précédemment.

Il reste donc seulement à examiner le cas où (C_{-1}) possède deux

invariants du premier ordre, c'est-à-dire où (C) possède, outre l'invariant x , un invariant du second ordre, (Γ) possédant deux invariants du premier ordre, (ε) est nécessairement une des équations obtenues par M. Goursat dans un Mémoire ⁽¹⁾ où il s'est proposé de rechercher quelques équations intégrables par la méthode de M. Darboux. Parmi ces équations, les seules qui satisfassent aux conditions que nous venons d'énoncer, sans appartenir à l'une des catégories déjà signalées dans le présent travail portent les nos VI et VIII, d'ailleurs la fonction arbitraire que M. Goursat désigne par la lettre f doit être linéaire par rapport à s pour que l'on puisse appliquer aux équations correspondantes une transformation d'Imschenetsky définie par une équation telle que (35).

On trouve ainsi, $X_0(x)$ et $X_1(x)$ représentant des fonctions quelconques de x , les équations

$$s[z - X_1(x)] - pq - q \frac{dX_0}{dx} = 0,$$

$$s[X_0(x) + y] - p + \frac{dX_1}{dx} = 0,$$

qui s'écrivent simplement

$$(36) \quad sz - pq - q = 0,$$

$$(37) \quad (x + y)s - p = 0,$$

si l'on prend pour fonction inconnue $z - X_1$ au lieu de z et pour première variable indépendante X_0 au lieu de x ⁽²⁾.

La transformation

$$z_1 = \frac{z}{q}$$

permet de passer de (36) à

$$z_1 s_1 - p_1 q_1 - p_1 = 0$$

qui n'en diffère que par la permutation des variables indépen-

⁽¹⁾ *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2^e série, t. I. 1899, p. 31. Voir, en particulier, p. 67.

⁽²⁾ Si X_0 était une constante, les équations considérées seraient intégrables par la méthode de Monge; chacun des systèmes de caractéristiques possédant deux invariants du premier ordre, on ne pourrait leur appliquer aucune transformation (B₁).

dantes ; de même la transformation

$$z_1 = (x + y)q - z$$

remplace (37) par

$$(x + y)s_1 - q_1 = 0;$$

il est impossible de poursuivre.

6. En résumé, exception faite pour les équations (36), (37), (33), (34) qui appartiennent à des suites (L) composées de deux ou trois équations ⁽¹⁾, les seules équations qui puissent engendrer une suite (L) sont, avec les équations linéaires, les équations de Moutard ; nous ne nous occuperons pas des équations linéaires qui ont fait l'objet d'un grand nombre de travaux, nous rappellerons seulement comment on déduit d'une équation de Moutard une suite (L) analogue à la suite d'équations linéaires obtenue par l'application répétée de la transformation de Laplace, le calcul n'offre aucune difficulté, nous nous contenterons d'un raisonnement fondé sur la théorie générale des transformations de Bäcklund ⁽²⁾ qui nous fournira l'occasion d'une remarque intéressante.

Reprenons l'équation (21) que nous pouvons écrire, pour abrégé,

$$(21') \quad s + \frac{d}{dx}(h e^{-z}) + e^z q + \frac{\partial l}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial x} = 0,$$

en représentant par a , l des fonctions de x , y et en prenant $z + \log X$ comme fonction inconnue à la place de z .

La transformation

$$(38) \quad \frac{1}{\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = p + e^z + l(x, y), \quad \frac{1}{\xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} = -h e^{-z} + a$$

établit une correspondance entre les intégrales de (21') et les intégrales de l'équation linéaire

$$(39) \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} - a \frac{\partial \xi}{\partial x} - \left(\frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x} + l \right) \frac{\partial \xi}{\partial y} + \left(\frac{a}{h} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial x} + h + al \right) \xi = 0,$$

⁽¹⁾ Les deux cas particuliers du paragraphe précédent ont été omis dans la Note déjà citée des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*.

⁽²⁾ Voir en particulier, dans ma Thèse, les n^{os} 7 et 8.

la fonction

$$\zeta_1 = \frac{\partial \zeta}{\partial y} - a \zeta$$

satisfait à une équation linéaire

$$(40) \quad \frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial x \partial y} - a_1 \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} - b_1 \frac{\partial \zeta_1}{\partial y} + c_1 \zeta_1 = 0.$$

Dans ce qui suit il sera commode de distinguer les deux systèmes de caractéristiques des équations que nous étudierons en indiquant entre parenthèses la variable indépendante qui conserve une valeur constante le long des caractéristiques du système considéré.

L'équation (40) dérive de (39) par une transformation (B_1) déduite du système (x), tandis que (21') dérive de la même équation par une transformation (B_2) également déduite de ce système; de plus, toutes les intégrales de (39) qui correspondent à une intégrale de (21') peuvent être obtenues en multipliant l'une d'entre elles par une constante quelconque ou, pour employer la terminologie de la théorie des groupes, en appliquant à l'une d'entre elles les transformations du groupe engendré par la transformation infinitésimale de contact dont la fonction caractéristique est ζ . A cette transformation infinitésimale de contact correspond pour (40) la transformation ζ_1 qui laisse (40) invariante.

Les équations (21') et (40), qui dérivent de (39) par des transformations de Bäcklund de première et de seconde espèce déduites du même système de caractéristiques, se changent l'une en l'autre par une transformation (B_2): à une intégrale de (40) correspond une intégrale de (21'), tandis qu'à une intégrale de (21') correspondent ∞^1 intégrales de (40). Les intégrales de cette équation qui correspondent à une intégrale de (21') peuvent être obtenues par l'application des transformations du groupe engendré par la transformation ζ_1 ; (21') dérive donc de (40), comme de (39), par une transformation (B_2), mais cette transformation est déduite du système (y) de caractéristiques de (40), tandis que la transformation (38) est déduite du système (x) de caractéristiques de (39).

Imaginons que l'on ait trouvé

$$(41) \quad s_1 + \frac{d}{dx}(h_1 e^{-z_1}) + e^{z_1} q_1 + \frac{\partial l_1}{\partial y} - \frac{\partial a_1}{\partial x} = 0$$

en appliquant à (40) la transformation de Moutard ⁽¹⁾ déduite du système (x), les équations (21') et (41) dérivent de (40) par des transformations (B_2) déduites l'une du système (x), l'autre du système (y) de caractéristiques; de plus, les intégrales de (40) qui correspondent à une intégrale quelconque de (21') ou de (41) sont obtenues à l'aide du même groupe de transformations de contact ⁽²⁾, on en conclut que (21') et (41) sont transformées l'une de l'autre par une transformation (B_1): on pourrait évidemment continuer en considérant la suite de Laplace engendrée par l'équation (39).

7. Le raisonnement précédent est un peu long, mais nous remarquerons qu'il pourrait être répété si, au lieu de la transformation (38), nous avions une autre transformation (B_2), la transformation infinitésimale ζ se trouvant remplacée par une autre transformation infinitésimale de contact qui laisse (39) invariante.

En général l'équation linéaire (39) n'admet que les transformations infinitésimales de contact qui ont 1 et ζ pour fonctions caractéristiques; à ces transformations de contact correspondent les transformations de Lucien Lévy et de Moutard: la première remplace l'équation donnée par une équation également linéaire, la seconde vient d'être étudiée.

Lie a déterminé toutes les équations linéaires qui restent invariantes pour des transformations infinitésimales de contact autres que les précédentes ⁽³⁾, par exemple l'équation

$$(42) \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} + Y(y) \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \zeta = 0$$

et toutes celles de la suite de Laplace qu'elle engendre admettent le groupe des translations parallèles à Ox . De cette dernière équation

⁽¹⁾ Quels que soient les coefficients, une équation linéaire peut toujours être écrite sous une forme semblable à celle de (39): a_1, h_1, l_1 ayant été ainsi déterminés, une transformation analogue à (38) change (40) en (41).

⁽²⁾ Dans le n° 8 de ma Thèse j'ai considéré le cas d'une équation de Monge-Ampère qui ne contient pas z ; le résultat subsiste évidemment pour une équation invariante relativement à une transformation infinitésimale de contact quelconque.

⁽³⁾ *Archiv for Mathematik og Naturvidenskab.*, t. VI, 1881, p. 238.

tion dérive par une transformation (B_2) une équation de Monge-Ampère dont chaque intégrale correspond à ∞^1 intégrales de (42) déduites de l'une quelconque d'entre elles au moyen de translations parallèles à Ox ; en appliquant une transformation analogue à chacune des équations de la suite de Laplace précédente on a une suite (L), mais les variables indépendantes ne sont plus conservées : pour établir ce résultat, il suffirait de répéter le raisonnement du dernier paragraphe en substituant à la transformation infinitésimale ζ la transformation $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$.

J'ai indiqué ⁽¹⁾ la forme des équations transformées de (42) par la méthode qui vient d'être expliquée, les résultats que j'ai obtenus ne laissent d'ailleurs pas d'être un peu compliqués; en recherchant toutes les équations transformées des équations linéaires signalées par Lie à l'aide de transformations (B_2) correspondant aux transformations infinitésimales de contact particulières qui laissent ces équations linéaires invariantes, on trouverait de même des équations qui engendrent des suites (L) : rien ne prouve, du reste, qu'il n'existe pas d'autres moyens de former de telles suites.

Dans un Mémoire récent ⁽²⁾, M^{lle} Louise Petréⁿ remarque ⁽³⁾ que « les transformations d'Imschenetsky sont très peu mentionnées dans la littérature » et estime qu'elles « méritent d'être examinées de plus près »; l'omission que constate M^{lle} Petréⁿ s'explique aisément : en dehors des équations de Moutard dont la théorie se ramène immédiatement à celle des équations linéaires et de quelques équations particulières qu'il est facile d'étudier directement, la transformation d'Imschenetsky ne rend que des services limités, puisqu'il est, en général, impossible de poursuivre en appliquant une méthode semblable à celle qui a été indiquée

⁽¹⁾ *C. R. Acad. Sc.*, 27 juin 1904.

⁽²⁾ Extension de la méthode de Laplace aux équations

$$\sum_{i=0}^{n-1} A_{1,i}(x,y) \frac{\partial^{i+1} z}{\partial x \partial y^i} + \sum_{i=0}^n A_{0,i}(x,y) \frac{\partial^i z}{\partial y^i} = 0$$

(*Lunds Universitets Årsskrift.*, N. F. Afd. 2, Bd. VII, Nr 3, 1911).

⁽³⁾ Page 5, note 2.

par Laplace dans le cas des équations linéaires, l'attention ne s'est donc pas trouvée appelée sur la transformation découverte par Imshenetsky, et, sans approfondir la question, les géomètres ont été amenés à considérer comme vraisemblable que l'étude détaillée de cette transformation ne saurait présenter un très grand intérêt.

SUR LES SIMPLIFICATIONS DU POTENTIEL ÉLASTIQUE DUES A LA SYMÉTRIE CRISTALLINE;

PAR M. R. GARNIER.

1. Soient Σ un système élastique homogène et f son potentiel élastique. On sait que toute symétrie dans la molécule de Σ (symétrie cristalline) entraîne une simplification dans la forme de f : c'est ainsi qu'aux différents groupements cristallins correspondent 11 formes possibles pour f . Inversement, si l'on propose de rechercher *a priori* les différents types de symétrie moléculaire susceptibles de produire des simplifications dans la forme de f , on retrouve précisément les types de symétrie cristalline connus, ainsi que les formes correspondantes du potentiel. Cette belle réciproque est due à M. C. Somigliana qui l'a obtenue ⁽¹⁾ par une méthode analytique. Dans cette Note, je me propose d'établir cette réciproque par des considérations géométriques.

2. Soient Ox , Oy , Oz trois axes de coordonnées rectangulaires, ds^2 et ds_1^2 le carré de l'élément linéaire de Σ avant et après la déformation infiniment petite subie par Σ ; on a

$$ds_1^2 - ds^2 = 2\varepsilon_1 dx^2 + 2\varepsilon_2 dy^2 + 2\varepsilon_3 dz^2 \\ + 2\gamma_1 dy dz + 2\gamma_2 dz dx + 2\gamma_3 dx dy.$$

Le potentiel élastique f , forme quadratique des six composantes de la déformation ε_1 , ε_2 , ε_3 , γ_1 , γ_2 , γ_3 , dépend dans le cas le plus

⁽¹⁾ *Rend. della R. Acc. dei Lincei*, 5^e série, t. III, 1894, 1^{er} semestre, p. 238 et t. IV, 1895, 1^{er} semestre, p. 25; *Ann. di Mat.*, 3^e série, t. VII, 1902, p. 129.

général de 21 coefficients distincts. Supposons que la molécule de Σ se reproduise par une rotation $\overrightarrow{\omega}$, d'amplitude θ , autour d'un axe donné, et examinons la réduction correspondante subie par f . Prenons Ox comme direction de l'axe de rotation, et accentuons toutes les quantités relatives à la molécule de Σ après la rotation ; nous aurons d'abord

$$\begin{aligned} dx' &= \cos \theta \, dx - \sin \theta \, dy, \\ dy' &= \sin \theta \, dx + \cos \theta \, dy, \\ dz' &= dz. \end{aligned}$$

Ecrivons d'abord l'identité

$$ds'^2 - ds'^2 = ds_1^2 - ds^2;$$

il en résulte immédiatement $\epsilon'_3 = \epsilon_3$. De plus, dans le plan xOy , le point M' , de coordonnées γ'_1, γ'_2 , se déduira du point $M(\gamma_1, \gamma_2)$ par une rotation de θ autour de l'origine ; enfin, d'après la théorie des coniques on a $\zeta' = \zeta$, en posant

$$\zeta' = \epsilon'_1 + \epsilon'_2 \quad \text{et} \quad \zeta = \epsilon_1 + \epsilon_2,$$

et, dans le plan xOy , le point N' de coordonnées $\xi' = \epsilon'_1 - \epsilon'_2$, $\eta' = \gamma'_3$ se déduira du point $N(\xi = \epsilon_1 - \epsilon_2, \eta = \gamma_3)$ par une rotation de -2θ autour de l'origine. Or on peut évidemment écrire le potentiel élastique sous la forme

$$\begin{aligned} (1) \quad f &= (\xi, \eta)_2 + (\gamma_1, \gamma_2)_2 + (\zeta, \epsilon_3)_2 \\ &\quad + (\gamma_1, \gamma_2)(\zeta, \epsilon_3) + (\zeta, \epsilon_3)(\xi, \eta) + (\xi, \eta)(\gamma_1, \gamma_2), \end{aligned}$$

en désignant par $(u, v)_2$ une forme quadratique en u, v et par $(u, v)(u_1, v_1)$ une forme bilinéaire aux variables u, v, u_1, v_1 ; et, si f reste invariant par rotation $\overrightarrow{\omega}$, il doit en être de même des six formes qui figurent dans (1). Ainsi, la conique

$$(\xi, \eta)_2 = 1,$$

devant se reproduire en elle-même par $\overrightarrow{\omega}$, est nécessairement un cercle, sauf si $-2\theta = -k\pi$ ou $\theta = \frac{k\pi}{2}$. De même, la conique

$$(\gamma_1, \gamma_2)_2 = 1$$

est un cercle, à moins qu'on n'ait $2\theta = 2k\pi$ ou $\theta = k\pi$. Enfin, aucune condition n'est imposée à la conique

$$(\zeta, \varepsilon_3) = 1.$$

Envisageons maintenant les formes bilinéaires $(\gamma_1, \gamma_2)(\zeta, \varepsilon_3)$ et $(\zeta, \varepsilon_3)(\xi, \eta)$; si leurs coefficients ne sont pas identiquement nuls, les équations

$$(\gamma_1, \gamma_2)(\zeta, \varepsilon_3) = 1 \quad \text{et} \quad (\zeta, \varepsilon_3)(\xi, \eta) = 1$$

(où ζ et ε_3 sont considérées comme des constantes) représentent deux droites; mais ces droites ne peuvent se reproduire par une rotation non identiquement nulle sauf, pour la seconde, si l'on a $\theta = k\pi$. Reste enfin la forme (supposée non identiquement nulle)

$$(2) \quad (\xi, \eta)(\gamma_1, \gamma_2) \equiv (a\gamma_1 + b\gamma_2)\xi + (c\gamma_1 + d\gamma_2)\eta;$$

prenons pour M et N deux points du cercle trigonométrique Γ ; lorsque M décrit Γ , le point P, de coordonnées

$$(3) \quad \begin{cases} x = a\gamma_1 + b\gamma_2, \\ y = c\gamma_1 + d\gamma_2, \end{cases}$$

décrit une ellipse Δ , de centre O. Or quand M varie, les point M et M' décrivent deux divisions homographiques sur Γ , de même P et P' sur Δ . Choisissons N de telle sorte que $\widehat{PON}$ soit droit; l'angle $\widehat{P'ON'}$ devra être droit et l'on aura

$$\widehat{POP'} = \widehat{NON'} = -2\theta;$$

mais ceci exige que les rayons doubles des faisceaux homographiques OP et OP' coïncident avec les droites isotropes issues de O; la conique Δ est donc un cercle de rayon R et l'on a

$$c + di = \varepsilon i(a + bi) \quad (\varepsilon = \pm 1),$$

d'où

$$c = -\varepsilon b, \quad d = \varepsilon a$$

et

$$\widehat{POP'} = \varepsilon\theta.$$

On aura donc

$$\varepsilon\theta = -2\theta + 2k\pi$$

d'où, en supposant $\vec{\omega} \neq 0$,

$$\varepsilon = +1 \quad \text{et} \quad \theta = \frac{2k\pi}{3}.$$

Réciproquement, s'il en est ainsi, l'expression (2), égale à $R \cos \widehat{\text{PON}}$, est évidemment invariante par la rotation $\vec{\omega}$ qui vient d'être définie.

3. De tout ce qui précède résulte immédiatement la conséquence suivante :

Si le potentiel élastique f est invariant par une rotation $\vec{\omega}$, d'amplitude θ , autour d'un axe $\hat{o}$, ou bien on a

$$\theta = \frac{2k\pi}{n},$$

avec $n = 1, 2, 3, 4$, ou bien f est invariant quel que soit θ ; dans ce dernier cas $\hat{o}$ s'appelle un *axe d'isotropie*.

Nous indiquerons plus loin (n° 5) les formes correspondantes du potentiel que nous désignerons par f_n ($n = 2, 3, 4$) ou f_∞ (pour le cas de l'axe d'isotropie).

4. Nous allons rechercher maintenant tous les groupes de rotation G formés par les rotations $\vec{\omega}$ définies au n° 3. Soient $\vec{\omega}$ et $\vec{\omega}'$ deux rotations autour de deux axes OA et OA' , le produit des deux rotations successives $\vec{\omega}$ et $\vec{\omega}'$ est une rotation $\vec{\omega}''$ dont l'axe OA'' et l'amplitude θ'' se déterminent de la façon suivante : appelons A, A', A'' les traces des axes de rotation (dirigés) sur une sphère σ de centre O ; le triangle $AA'A''$ a pour angles $A''AA' = -\frac{\theta}{2}$, $AA'A'' = \frac{\theta'}{2}$, $A'A''A = \pi - \frac{\theta''}{2}$.

Il résulte immédiatement de la construction précédente que si OA et OA' sont deux axes d'isotropie, il en est de même d'un axe quelconque OA'' issu de O ; dans ce cas Σ est dit *isotrope* et nous désignerons son potentiel par f_∞ .

Supposons maintenant que Σ possède un seul axe d'isotropie OA ; et soit OA' un axe d'ordre n ($= 2, 3, 4$). Dans le triangle $AA'A''$ l'angle A' est constant, l'angle en A est variable, tandis que

l'angle en A'' , qui ne peut varier par continuité, est nécessairement constant. Le grand cercle $A'A''$, coupant sous un angle constant les grands cercles issus de A , les rencontre nécessairement à angle droit; par suite, les angles en A' et A'' sont droits, ainsi que les côtés AA' et AA'' . Le corps Σ possède donc un axe d'isotropie OA orthogonal à une infinité d'axes d'ordre 2; et, évidemment, il ne peut posséder d'autres axes de symétrie. Nous désignerons par f_{∞}^2 la forme correspondante de f .

Supposons enfin que Σ n'admette aucun axe d'isotropie: *le groupe G est alors nécessairement fini*. En effet, si les angles θ , θ' , θ'' ne prennent que des valeurs de la forme $\frac{2k\pi}{n}$, les triangles correspondants $AA'A''$, en nombre limité, admettent pour leurs côtés une limite inférieure λ . Mais si G est infini, Σ possède une infinité d'axes de rotation OA dont les traces A sur σ admettent au moins un point d'accumulation, et, par suite, il existe deux de ces traces dont sa distance sphérique est inférieure à λ , ce qui est impossible. Cela étant, puisque le groupe G est fini et ne possède que des rotations d'ordre 2, 3, 4, il coïncide nécessairement avec l'un des groupes suivants (où les formes correspondantes du potentiel sont mises en regard):

- 1° Groupe du dièdre, avec $n = 2, 3, 4$; potentiel: f_n^2 ;
- 2° Groupe du tétraèdre; potentiel: f_2^3 ;
- 3° Groupe de l'octaèdre; potentiel: f_4^3 .

D'ailleurs f_4^3 et f_2^3 coïncident; en effet, dans le cas du tétraèdre Σ admet les droites $x = 0 = y$ et $x = y = z$ comme axes d'ordres 2 et 3 respectivement; f_2^3 est donc une fonction symétrique des deux ensembles ε_i et γ_i qui ne peut renfermer les γ_i au premier degré; on a donc

$$f_3^2 = c_{11} \Sigma \varepsilon_i^2 + 2c_{12} \Sigma \varepsilon_i \varepsilon_j + c_{11} \Sigma \gamma_i^2.$$

Or on peut obtenir le groupe de l'octaèdre en multipliant celui du tétraèdre par une symétrie autour de la droite $x + y = 0 = z$: cette symétrie permute simultanément les indices 1 et 2 des deux ensembles ε_i et γ_i ; elle ne change donc pas f_2^3 et l'on a bien $f_2^3 = f_4^3$.

§. En définitive, s'il existe des symétries moléculaires qui sim-

plifient la forme de f , il ne peut y avoir pour f que dix formes réduites distinctes : ce sont précisément les dix formes auxquelles conduit l'étude des différents groupements cristallins et des corps isotropes, et la correspondance entre les formes réduites et ces groupements se fait de la façon suivante (où f désigne la forme générale du potentiel) :

	Système.		Système.
f	triclinique	f_2^2	rhombique
f_2	monoclinique	f_3^2	rhomboédrique
f_3	rhomboédrique	f_4^2	quadratique
f_4	quadratique	f_4^3	cubique
f_∞	hexagonal	f_∞^2	hexagonal
	f_∞		corps isotropes

6. Il nous reste à énumérer explicitement les différentes formes possibles pour f ; mais ce dernier problème ne présente aucune difficulté. On sait, en effet, que le groupe de l'octaèdre peut être engendré par deux rotations d'ordre 4 (et d'axes distincts). Il suffira donc d'exprimer, dans chacun des dix cas précédents que Σ admet deux axes rectangulaires Oz et Ox comme axes d'ordre 2, 3, 4 ou d'isotropie. Si l'on connaît la forme de f correspondant à une rotation ω d'amplitude θ autour de Oz , une permutation circulaire effectuée sur les indices 1, 2, 3 des variables ε_i et γ_j de f donnera la forme de f correspondant à une rotation de même amplitude autour de Ox . Mais il résulte immédiatement du n° 2 qu'on a

$$\begin{aligned} f_2 &= (\xi, \eta)_2 + (\gamma_1, \gamma_2)_2 + (\zeta, \varepsilon_3)_2 + (\zeta, \varepsilon_3)(\xi, \eta), \\ f_3 &= a(\xi^2 + \gamma^2) + b(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) + (\zeta, \varepsilon_3)_2 + c(-\gamma_2 \xi + \gamma_1 \eta) + d(\gamma_1 \xi + \gamma_2 \eta), \\ f_4 &= (\xi, \eta)_2 + b(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) + (\zeta, \varepsilon_3)_2, \\ f_\infty &= a(\xi^2 + \eta^2) + b(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) + (\zeta, \varepsilon_3)_2. \end{aligned}$$

Soient alors

$$\varepsilon_i = X_i, \quad \gamma_j = X_{j+3} \quad \text{et} \quad c_{hk} = \frac{\partial^2 f}{\partial X_h \partial X_k};$$

on déduit aisément de ce qui précède les relations suivantes qui

caractérisent dans chaque cas la forme de f :

$$\begin{aligned}
 f_2 & \quad c_{14} = c_{15} = c_{24} = c_{25} = c_{34} = c_{35} = c_{46} = c_{56} = 0; \\
 f_3 & \quad \left\{ \begin{aligned} & c_{16} = c_{26} = c_{34} = c_{35} = c_{36} = c_{45} = 0; \\ & c_{11} = c_{22}, \quad c_{13} = c_{23}, \quad c_{14} = -c_{24} = c_{56}, \\ & c_{15} = -c_{25} = -c_{46}, \quad c_{44} = c_{55}, \quad c_{66} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}); \end{aligned} \right. \\
 f_4 & \quad \left\{ \begin{aligned} & c_{14} = c_{15} = c_{24} = c_{25} = c_{34} = c_{35} = c_{36} = c_{45} = c_{46} = c_{56} = 0, \\ & c_{11} = c_{22}, \quad c_{13} = c_{23}, \quad c_{16} = -c_{26}, \quad c_{44} = c_{55}; \end{aligned} \right. \\
 f_\infty, f_\infty^2 & \quad \left\{ \begin{aligned} & c_{14} = c_{15} = c_{16} = c_{24} = c_{25} = c_{26} = c_{34} = c_{35} = c_{36} = c_{45} = c_{46} = c_{56} = 0, \\ & c_{11} = c_{22}, \quad c_{13} = c_{23}, \quad c_{44} = c_{55}, \quad c_{66} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}); \end{aligned} \right. \\
 f_{\frac{2}{2}} & \quad \left\{ \begin{aligned} & c_{14} = c_{15} = c_{16} = c_{24} = c_{25} = c_{26} = c_{34} = c_{35} = c_{36} = c_{45} = c_{46} = c_{56} = 0; \\ & c_{15} = c_{16} = c_{25} = c_{26} = c_{34} = c_{35} = c_{36} = c_{45} = c_{46} = 0, \\ & c_{11} = c_{22}, \quad c_{13} = c_{23}, \\ & c_{14} = -c_{24} = c_{56}, \quad c_{44} = c_{55}, \quad c_{66} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}); \end{aligned} \right. \\
 f_{\frac{2}{3}} & \quad \left\{ \begin{aligned} & c_{14} = c_{15} = c_{16} = c_{24} = c_{25} = c_{26} = c_{34} = c_{35} = c_{36} = c_{45} = c_{46} = c_{56} = 0, \\ & c_{11} = c_{22}, \quad c_{13} = c_{23}, \quad c_{44} = c_{55}; \end{aligned} \right. \\
 f_{\frac{2}{4}} & \quad \left\{ \begin{aligned} & c_{14} = c_{15} = c_{16} = c_{24} = c_{25} = c_{26} = c_{34} = c_{35} = c_{36} = c_{45} = c_{46} = c_{56} = 0, \\ & c_{11} = c_{22}, \quad c_{13} = c_{23}, \quad c_{44} = c_{55}; \end{aligned} \right. \\
 f_{\frac{3}{4}} & \quad \left\{ \begin{aligned} & c_{14} = c_{15} = c_{16} = c_{24} = c_{25} = c_{26} = c_{34} = c_{35} = c_{36} = c_{45} = c_{46} = c_{56} = 0, \\ & c_{11} = c_{22} = c_{33}, \quad c_{12} = c_{13} = c_{23}, \quad c_{44} = c_{55} = c_{66}; \end{aligned} \right. \\
 f_\infty^2 & \quad \left\{ \begin{aligned} & c_{14} = c_{15} = c_{16} = c_{24} = c_{25} = c_{34} = c_{35} = c_{36} = c_{45} = c_{46} = c_{56} = 0, \\ & c_{11} = c_{22} = c_{33}, \quad c_{12} = c_{13} = c_{23}, \quad c_{44} = c_{55} = c_{66} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}). \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

SUR LA FONCTION GAMMA.

PAR M. JACQUES TOUCHARD.

I. Je me propose de démontrer en premier lieu la formule

$$(1) \quad e^x = \frac{1}{2} + \int_0^\infty \frac{xz \, dz}{\Gamma(1+z)} + \frac{x}{\pi} \int_0^\infty e^{-xz} \arctan \frac{\log z}{\pi} \, dz,$$

valable quand P.R. $x > 0$.

On a

$$e^x = \sum_{v=0}^{\infty} f(v),$$

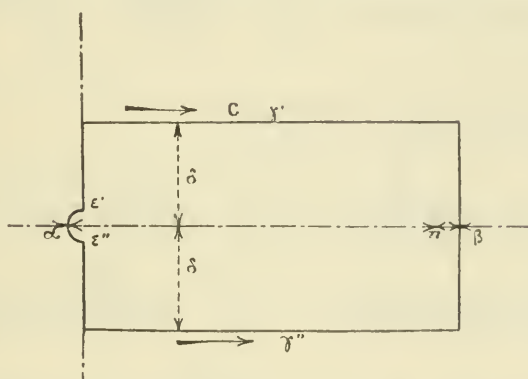
où

$$f(z) = \frac{x^z}{\Gamma(1+z)}.$$

Or, $\pi \cot \pi z$ admettant les pôles 0, 1, 2, ... de résidus 1 et $f(z)$ étant holomorphe, on a

$$\sum_0^n f(\nu) = \oint_C f(z) (\pi \cot \pi z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \pi \cot \pi z f(z) dz.$$

Le contour C est constitué par des droites rectangulaires et par



un demi-cercle de rayon infiniment petit ε , décrit de l'origine comme centre.

L'équation précédente s'écrit

$$\sum_0^n f(\nu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha \varepsilon'' \gamma'' \beta} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha \varepsilon' \gamma' \beta},$$

les intégrales étant prises dans les sens marqués par les flèches.

Suivons une voie tracée par M. Lindelöf (le calcul des résidus, p. 56) et substituons

$$\pi \cot \pi z = \pi i + \frac{2\pi i}{e^{2\pi i z} - 1} \quad \text{dans l'intégrale } \int_{\alpha \varepsilon'' \gamma'' \beta}$$

et

$$\pi \cot \pi z = -\pi i - \frac{2\pi i}{e^{-2\pi i z} - 1} \quad \text{dans l'intégrale } \int_{\alpha \varepsilon' \gamma' \beta}$$

il vient, en remarquant que

$$\begin{aligned} \int_{\alpha \varepsilon' \gamma' \beta} f(z) dz &= \int_{\alpha \varepsilon'' \gamma'' \beta} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z) dz, \\ \sum_0^n f(\nu) &= \int_{\alpha}^{\beta} f(z) dz + \int_{\alpha \varepsilon'' \gamma'' \beta} \frac{f(z) dz}{e^{2\pi i z} - 1} + \int_{\alpha \varepsilon' \gamma' \beta} \frac{f(z) dz}{e^{-2\pi i z} - 1}; \end{aligned}$$

comme

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{x} + h(x),$$

$h(x)$ désignant une fonction holomorphe, il vient

$$\int_{\alpha_{\varepsilon''}} \frac{f(z) dz}{e^{2\pi i z} - 1} = \int_{\alpha_{\varepsilon'}} \frac{f(z) dz}{e^{-2\pi i z} - 1} = \frac{1}{4} f(0) = \frac{1}{4}.$$

On a donc

$$(2) \quad \sum_0^n f(v) = \frac{1}{2} + \int_{\alpha}^{\beta} f(z) dz + i \int_{\varepsilon}^{\delta} \frac{f(zi) dz}{e^{2\pi z} - 1} - i \int_{\varepsilon}^{\delta} \frac{f(-zi) dz}{e^{2\pi z} - 1} + S,$$

S étant la somme des quatre intégrales

$$\begin{aligned} & \int_0^{\beta} \frac{x^{i\delta+t}}{\Gamma(i\delta+t+1)} \frac{dt}{e^{2\pi\delta-2\pi it} - 1} + \int_0^{\beta} \frac{x^{-i\delta+t}}{\Gamma(-i\delta+t+1)} \frac{dt}{e^{2\pi\delta+2\pi it} - 1} \\ & - i \int_0^{\delta} \frac{x^{\beta+it}}{\Gamma(\beta+it+1)} \frac{dt}{e^{2\pi t-2\pi i\beta} - 1} + i \int_0^{\delta} \frac{x^{\beta-it}}{\Gamma(\beta-it+1)} \frac{dt}{e^{2\pi i+2\pi i\beta} - 1}. \end{aligned}$$

Quand on fait croître β et δ indéfiniment, S tend vers zéro. On s'en assure en employant l'expression donnée par Mathias Lerch

$$\text{mod } \Gamma(\tau + it) = \sqrt{2\pi}(\tau^2 + t^2)^{\frac{1}{2}} \left(\tau - \frac{1}{2}\right) e^{-\tau - t \arctan \frac{t}{\tau}} (1 + \varepsilon),$$

où ε est un nombre qui s'annule pour $\tau = +\infty$ ou $t = \pm\infty$.

Faisons donc, dans (2), β et δ infinis; il vient

$$e^x = \frac{1}{2} + \int_0^{\infty} \frac{x^z dz}{\Gamma(1+z)} + i \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{x^{zi}}{\Gamma(1+zi)} \frac{dz}{e^{2\pi z} - 1} - i \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{x^{-zi}}{\Gamma(1-zi)} \frac{dz}{e^{2\pi z} - 1}$$

et, à l'aide de la formule des compléments

$$(3) \quad e^x = \frac{1}{2} + \int_0^{\infty} \frac{x^z dz}{\Gamma(1+z)} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\pi z} dz}{z} \frac{x^{-zi} \Gamma(1+zi) - x^{zi} \Gamma(1-zi)}{2i}.$$

Or

$$\frac{x^{-zi} \Gamma(1+zi) - x^{zi} \Gamma(1-zi)}{2i} = \int_0^{\infty} x e^{-xt} \sin(z \log t) dt.$$

Introduisant cette expression dans l'équation (3) et intervertissant l'ordre des intégrations dans l'intégrale double, on obtient finalement la formule (1) qui, à l'aide d'une intégration par parties,

s'écrit encore

$$e^x = \int_0^\infty \frac{x^z dz}{\Gamma(1+z)} + \int_0^\infty \frac{e^{-xz} dz}{z(\pi^2 + \log^2 z)}.$$

Si l'on retranche de la formule (1) l'équation évidente

$$(4) \quad e^{-x} = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} \int_0^1 e^{-xt} dt + \frac{x}{2} \int_1^\infty e^{-xt} dt,$$

on obtient

$$e^x - e^{-x} = \int_0^\infty \frac{x^z dz}{\Gamma(1+z)} - \frac{x}{\pi} \int_0^\infty e^{-xt} \operatorname{arc tang} \frac{\pi}{\log t} dt.$$

II. Appliquons la même méthode de M. Lindelöf à la série

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} + \frac{x}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} + \frac{x^2}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} + \dots,$$

nous trouverons d'abord

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} + \int_0^\infty \frac{x^z dz}{\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)} \\ &\quad + \frac{\sqrt{x}}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{\pi t} + e^{-\pi t}}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}} e^{-\pi t} dt \int_0^\infty \frac{e^{-xz} dz}{\sqrt{z}} \sin(t \log z). \end{aligned}$$

Intervertissons l'ordre des intégrations et remarquons que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{e^{\pi t} + e^{-\pi t}}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}} e^{-\pi t} \sin at dt &= - \int_0^\infty e^{-\pi t} \sin at dt + 2 \int_0^\infty \frac{\sin at dt}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}} \\ &= - \frac{a}{a^2 + \pi^2} + \frac{1}{2} \frac{e^a - 1}{e^a + 1}, \end{aligned}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} (5) \quad \varphi(x) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} + \int_0^\infty \frac{x^z dz}{\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)} \\ &\quad + \frac{\sqrt{x}}{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-xz} dz}{\sqrt{z}} \frac{z-1}{z+1} - \frac{\sqrt{x}}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-xz} dz}{\sqrt{z}} \frac{\log z}{\pi^2 + \log^2 z}. \end{aligned}$$

Or on prouve aisément, d'une part, que,

$$\frac{\sqrt{x}}{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-xz} dz}{\sqrt{z}} \frac{z-1}{z+1} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} - \sqrt{x} e^x + 2\sqrt{\frac{x}{\pi}} e^x \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt$$

et, d'autre part, que

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} + 2e^x \sqrt{\frac{x}{\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt.$$

L'égalité (5) devient donc

$$(6) \quad e^x = \int_0^\infty \frac{x^{z-\frac{1}{2}} dz}{\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-xz} dz}{\sqrt{z}} \frac{\log z}{\pi^2 + \log^2 z},$$

formule valable tant que P. R. $x > 0$.

III. En remarquant que

$$e^x - \frac{1}{e} = \mathcal{E} x^z \cos \pi z \left[\frac{P(1-z)}{z} \right],$$

où $P(x)$ désigne la fonction de Prym, partie méromorphe de $\Gamma(x)$, on obtient une nouvelle expression de e^x , savoir

$$(7) \quad e^x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2e} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty x^z \sin \pi z \frac{P(1-z)}{z} dz \\ + \frac{x}{\pi} \int_0^{\frac{1}{x}} e^{-xz} \arctan \frac{\log z}{\pi} dz,$$

équation valable quand x est réel et compris entre 0 et 1.

IV. Voici deux conséquences des formules (1) et (6). Si l'on pose

$$e^{e^x} = e \sum_0^\infty a_n \frac{x^n}{n!},$$

on a

$$ea_n = \int_0^\infty \frac{z^n dz}{\Gamma(1+z)} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-x} \frac{\Gamma(n) \sin \left(n \arctan \frac{\pi}{\log x} \right)}{(\pi^2 + \log^2 x)^{\frac{n}{2}+1}} dx$$

et symboliquement

$$e \left(a + \frac{1}{2} \right)^n = \int_0^\infty \frac{z^n dz}{\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)} \\ - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \frac{\Gamma(n+1) \cos \left[(n+1) \arctan \frac{\pi}{\log x} \right]}{(\pi^2 + \log^2 x)^{\frac{n+1}{2}}} dx,$$

formules qu'on peut généraliser.

Les nombres α_n , qui jouissent de propriétés élégantes, se présentent dans la partie holomorphe de $x^p \frac{P(1-x) \pm P(1+x)}{2} \cos \pi x$ et, de ce fait, on peut déduire la formule (7).

V. On peut tirer de l'équation (1), en la différentiant, la formule

$$(8) \quad \int_{-n}^{\infty} \frac{dz}{\Gamma(z)} = e + (-1)^n \int_0^{\infty} \frac{x^n e^{-x} dx}{\pi^2 + \log^2 x},$$

où n est un entier positif ou nul. Je vais généraliser cette formule. Supposons que a désigne un nombre quelconque réel et positif; on a

$$\int_0^a z^y \sin \pi y dy = \frac{z^a}{\pi^2 + \log^2 z} (\sin a \pi \log z - \pi \cos a \pi) + \frac{\pi}{\pi^2 + \log^2 z}.$$

Multiplions par $e^{-z} dz$ et intégrons de 0 à ∞ ; le premier membre devient

$$-\int_{-a}^0 \frac{\pi}{\Gamma(z)} dz,$$

et l'on a

$$(9) \quad \int_{-a}^0 \frac{dz}{\Gamma(z)} = \cos a \pi \int_0^{\infty} \frac{e^{-z} z^a dz}{\pi^2 + \log^2 z} - \frac{\sin a \pi}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-z} z^a \log z dz}{\pi^2 + \log^2 z} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-z} dz}{\pi^2 + \log^2 z}.$$

On trouve de même, $Q(x)$ désignant la fonction holomorphe de Prÿm,

$$(10) \quad \int_a^{\infty} \sin \pi y Q(1-y) dy = \pi \cos a \pi \int_1^{\infty} \frac{e^{-z} z^{-a} dz}{\pi^2 + \log^2 z} + \sin a \pi \int_1^{\infty} \frac{e^{-z} z^{-a} \log z dz}{\pi^2 + \log^2 z}.$$

Cherchons une transformation analogue pour

$$(11) \quad \int_a^{\infty} \sin \pi y P(1-y) dy = - \int_a^{\infty} \frac{\sin \pi y dy}{y-1} + \frac{1}{1} \int_a^{\infty} \frac{\sin \pi y dy}{y-2} - \frac{1}{1.2} \int_a^{\infty} \frac{\sin \pi y dy}{y-3} + \dots$$

On démontre facilement que

$$(12) \left\{ \begin{array}{l} \text{pour } a < n \\ \int_a^\infty \frac{\sin \pi y}{y-n} dy = (-1)^n \pi - \cos \pi a \int_0^\infty \frac{e^{-(n-a)\pi t}}{1+t^2} dt \\ \quad + \sin \pi a \int_0^\infty e^{-(n-a)\pi t} \frac{t dt}{1+t^2}; \\ \text{pour } a = n \\ \int_n^\infty \frac{\sin \pi y}{y-n} dy = (-1)^n \frac{\pi}{2}; \\ \text{pour } a > n \\ \int_a^\infty \frac{\sin \pi y}{y-n} dy = \cos \pi a \int_0^\infty \frac{e^{-(a-n)\pi z}}{1+z^2} dz + \sin \pi a \int_0^\infty \frac{e^{-(a-n)\pi z} z dz}{1+z^2}. \end{array} \right.$$

Supposons d'abord, dans (11), $a = 0$; il vient

$$\int_0^\infty \sin \pi y P(1-y) dy = \pi e + \pi \int_0^1 \frac{e^{-z} dz}{\pi^2 + \log^2 z}.$$

En ajoutant membre à membre avec (10), où l'on a fait $a = 0$, il vient

$$\int_0^\infty \sin \pi y \Gamma(1-y) dy = \pi e + \pi \int_0^\infty \frac{e^{-z} dz}{\pi^2 + \log^2 z}$$

ou bien

$$\int_0^\infty \frac{dz}{\Gamma(z)} = e + \int_0^\infty \frac{e^{-z} dz}{\pi^2 + \log^2 z}.$$

Ajoutant alors à (9), on trouve

$$(13) \int_{-a}^\infty \frac{dz}{\Gamma(z)} = e + \cos a \pi \int_0^\infty \frac{e^{-z} z^a dz}{\pi^2 + \log^2 z} - \frac{\sin a \pi}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-z} z^a \log z dz}{\pi^2 + \log^2 z}.$$

Si a est entier, on retrouve (8).

On déduit de (13)

$$\begin{aligned} \int_{-a}^\infty \frac{dz}{\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)} &= e + \sin a \pi \int_0^\infty \frac{e^{-z} z^a dz}{\sqrt{z}(\pi^2 + \log^2 z)} \\ &\quad + \frac{\cos a \pi}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-z} z^a \log z dz}{\sqrt{z}(\pi^2 + \log^2 z)}. \end{aligned}$$

Le calcul de $\int_a^\infty \frac{dz}{\Gamma(z)}$ se fait ensuite à l'aide des formules (10), (11), (12) et donne le résultat suivant :

Supposons $n < a < n + 1$ et posons

$$\varphi_{n-1}(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!},$$

on a

$$(14) \quad \int_a^\infty \frac{dz}{\Gamma(z)} = e - \varphi_{n-1}(1) + \cos a \pi \int_0^\infty \frac{z^{-a} dz}{\pi^2 + \log^2 z} [e^{-z} - \varphi_{n-1}(-z)] \\ + \frac{\sin a \pi}{\pi} \int_0^\infty \frac{z^{-a} \log z dz}{\pi^2 + \log^2 z} [e^{-z} - \varphi_{n-1}(-z)].$$

Reportons-nous au Mémoire de Cauchy *Sur un nouveau genre d'intégrales* (anciens exercices d'Analyse, 1^{re} année), nous verrons que la formule (14) peut s'écrire

$$\int_a^\infty \frac{dz}{\Gamma(z)} = e - \varphi_{n-1}(1) + \cos a \pi \int_0^\infty \frac{z^{-a} e^{-z} dz}{\pi^2 + \log^2 z} \\ + \frac{\sin a \pi}{\pi} \int_0^\infty \frac{z^{-a} e^{-z} \log z dz}{\pi^2 + \log^2 z},$$

le symbole $\int'$ représentant ce que Cauchy appelle une intégrale extraordinaire. La formule (14) subsiste si a est entier, et l'on a

$$\int_n^\infty \frac{dz}{\Gamma(z)} = e - \varphi_{n-1}(1) + (-1)^n \int_0^\infty \frac{z^{-n} dz}{\pi^2 + \log^2 z} [e^{-z} - \varphi_{n-1}(-z)].$$

VI. On peut généraliser l'équation (13) en cherchant la valeur principale des intégrales

$$\int_{-a}^\infty \frac{\sin b \pi y}{\sin \pi y} \frac{dy}{\Gamma(y)}, \quad \int_{-a}^\infty \frac{\cos b \pi y}{\sin \pi y} \frac{dy}{\Gamma(y)},$$

où b est un nombre réel et positif.

En employant la marche que je viens de suivre au paragraphe V,

ou trouve

$$\begin{aligned}
 (15) \quad & \text{val. pr. } \int_{-a}^{\infty} \frac{\sin b \pi y}{\sin \pi y} \frac{dy}{\Gamma(y)} \\
 &= -e^{-\cos \pi b} \cos(\pi b - \sin \pi b) \\
 &\quad + b \cos \pi b a \int_0^{\infty} \frac{e^{-z} z^a dz}{\pi^2 b^2 + \log^2 z} - \frac{\sin \pi b a}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-z} z^a \log z dz}{\pi^2 b^2 + \log^2 z}, \\
 &\text{val. pr. } \int_{-a}^{\infty} \frac{\cos b \pi y}{\sin \pi y} \frac{dy}{\Gamma(y)} \\
 &= e^{-\cos \pi b} \sin(\pi b - \sin \pi b) \\
 &\quad + b \sin \pi b a \int_0^{\infty} \frac{e^{-z} z^a dz}{\pi^2 b^2 + \log^2 z} + \frac{\cos \pi b a}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-z} z^a \log z dz}{\pi^2 b^2 + \log^2 z},
 \end{aligned}$$

a est un nombre réel positif ou nul.

Quand b est un nombre entier positif, le premier membre de (15) se réduit à

$$\int_{-a}^{\infty} \frac{\sin n \pi y}{\sin \pi y} \frac{dy}{\Gamma(y)},$$

car $\sin n \pi y$ est divisible par $\sin \pi y$.

THÉORIE GÉNÉRALE DES SURFACES ENGENDRÉES PAR UNE HÉLICE CIRCULAIRE;

PAR M. BARRÉ.

INTRODUCTION.

Nous nous proposons, dans les pages suivantes, d'étudier systématiquement les surfaces engendrées par une hélice circulaire dont jusqu'ici on n'a guère, à notre connaissance, poursuivi l'étude que pour la variété formée par les hélicoïdes.

Ce travail comprendra cinq Chapitres. Dans le premier, nous établirons les formules générales de notre théorie; dans le second, nous étudierons les questions afférentes à la répartition des normales à la surface; dans le troisième, nous examinerons quelques problèmes relatifs à la détermination de certaines de ces surfaces par des conditions imposées aux courbures des hélices généra-

trices, tandis que dans le quatrième Chapitre nous envisagerons tout particulièrement des questions relatives à la courbure moyenne et à la courbure totale de ces surfaces. Le cinquième sera constitué par un essai de classification.

Nous rencontrerons au cours de ces études quelques surfaces particulièrement intéressantes dont nous nous réservons d'aborder ultérieurement la monographie détaillée.

CHAPITRE I.

ÉTABLISSEMENT ET PREMIÈRES APPLICATIONS DES FORMULES GÉNÉRALES.

1. Les équations canoniques de l'hélice circulaire sont :

$$(1) \quad \begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = K\varphi \end{cases}$$

Lorsque cette hélice varie en dépendant d'un paramètre, ρ et K sont fonctions d'un paramètre t dont dépend également le déplacement du trièdre de référence. J'appellerai *cercle principal* de l'hélice le cercle défini par les relations $z = 0$, $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$; K n'est autre que le pas réduit de l'hélice. Nous l'appellerons aussi pas linéaire ⁽¹⁾ par opposition au pas angulaire défini dans d'autres Mémoires ⁽²⁾ et égal dans le cas présent à $\frac{K}{\rho}$. Je ne reviendrai pas ici sur l'établissement des formules générales de Géométrie cinématique que j'ai données ailleurs ⁽³⁾; je me bornerai à les appliquer. J'appellerai *trièdre fondamental* le trièdre de référence dont il vient d'être question. Nous supposerons toujours laissé de côté le cas où le plan xOy enveloppe le cercle de l'infini, toutes les formules et la définition même des axes tombant alors en défaut. Dans ces conditions,

⁽¹⁾ Dans ce qui suit, quand il sera question de pas, sans autre mention, il s'agira toujours du pas linéaire K .

⁽²⁾ Cf. *Étude sur le déplacement d'une hélice de forme variable* (Bulletin de la Société mathématique de France, t. XXXVII, 1909); *Contribution à la théorie des hélices* (Revue du Génie militaire, 2^e semestre, 1910).

⁽³⁾ Cf. *Applications de la Géométrie cinématique à l'étude des surfaces engendrées par une courbe variable* (Journal de l'École Polytechnique, 1912).

on peut faire $q = 0$, dans les formules générales du déplacement, l'hélice étant toujours représentée par les équations (1) (1).

Les formules générales donnant les composantes du déplacement élémentaire absolu sur les trois axes mobiles d'un point de l'hélice de coordonner x, y, z sont :

$$(2) \quad \begin{cases} \delta x = -\rho \sin \varphi d\varphi + \mathcal{L} dt, \\ \delta y = \rho \cos \varphi d\varphi + \mathcal{M} dt, \\ \delta z = K d\varphi + \mathcal{N} dt, \end{cases}$$

avec

$$(3) \quad \begin{cases} \mathcal{L} = u + qz - ry + \rho' \cos \varphi, \\ \mathcal{M} = v + rx - pz + \rho' \sin \varphi, \\ \mathcal{N} = w + py - qx + K' \varphi, \end{cases}$$

formules dans lesquelles x, y et z sont données en fonction de ρ et de φ par les relations (1) et les lettres accentuées représentent des dérivées par rapport à la variable indépendante, de telle sorte que

$$(4) \quad \begin{cases} \mathcal{L} = u + qK\varphi - r\rho \sin \varphi + \rho' \cos \varphi, \\ \mathcal{M} = v - pK\varphi + r\rho \cos \varphi + \rho' \sin \varphi, \\ \mathcal{N} = w + K'\varphi + \rho(p \sin \varphi - q \cos \varphi). \end{cases}$$

L'élément linéaire de la surface est donné par la formule

$$(5) \quad \delta s^2 = E dt^2 + 2F dt d\varphi + G d\varphi^2,$$

dans laquelle on pose

$$(6) \quad \begin{cases} E = \mathcal{L}^2 + \mathcal{M}^2 + \mathcal{N}^2 \\ \quad = \varphi^2 [(p^2 + q^2)K^2 + K'^2] \\ \quad \quad - 2\varphi [K r \rho (q \sin \varphi + p \cos \varphi) \\ \quad \quad \quad + (p \sin \varphi - q \cos \varphi)(K\rho' - K'\rho) + K(pv - qu) - wK'] \\ \quad \quad + u^2 + v^2 + w^2 + \rho'^2 + 2\rho'(u \cos \varphi + v \sin \varphi) \\ \quad \quad + \rho^2[r^2 + (p \sin \varphi - q \cos \varphi)^2] \\ \quad \quad - 2\rho[r(u \sin \varphi - v \cos \varphi) - w(p \sin \varphi - q \cos \varphi)], \\ F = -\rho(\mathcal{L} \sin \varphi - \mathcal{M} \cos \varphi) + K \mathcal{N} \\ \quad = K\varphi[K' - \rho(q \sin \varphi + p \cos \varphi)] \\ \quad \quad + wK + \rho[K(p \sin \varphi - q \cos \varphi) - u \sin \varphi + v \cos \varphi + r\rho], \\ G = K^2 + \rho^2. \end{cases}$$

Dans certains calculs il y a avantage à mettre en évidence

(1) Cf. *Applications, etc.*, n° 2.

les fonctions

$$L = \mathfrak{M} \cos \varphi - \mathfrak{L} \sin \varphi, \quad M = \mathfrak{L} \cos \varphi + \mathfrak{M} \sin \varphi.$$

Aussi reprendrons-nous l'exposé des formules précédentes en y introduisant ces fonctions. En développant et posant pour la symétrie des notations $N = \mathfrak{N}$, on trouve les expressions

$$(10) \quad \begin{cases} L = -u \sin \varphi + v \cos \varphi + r \rho - K \varphi (q \sin \varphi + p \cos \varphi), \\ M = u \cos \varphi + v \sin \varphi + \rho' + K \varphi (q \cos \varphi - p \sin \varphi), \\ N = w + \rho (p \sin \varphi - q \cos \varphi) + K' \varphi, \end{cases}$$

$$(11) \quad \begin{aligned} KL - N\rho &= -\varphi [K^2 (q \sin \varphi + p \cos \varphi) + K' \rho] + \cos \varphi (Kv + q\rho^2) \\ &\quad - \sin \varphi (Ku + p\rho^2) + \rho (Kr - w). \end{aligned}$$

Les formules du déplacement élémentaire d'un point de l'hélice génératrice deviennent avec ces notations

$$(11) \quad \begin{cases} \delta x = M \cos \varphi dt - (\rho d\varphi + L dt) \sin \varphi, \\ \delta y = M \sin \varphi dt + (\rho d\varphi + L dt) \cos \varphi, \\ \delta z = N dt + K d\varphi. \end{cases}$$

L'élément linéaire prend la forme

$$(12) \quad \delta s^2 = M^2 dt^2 + (\rho d\varphi + L dt)^2 + (N dt + K d\varphi)^2$$

ou la forme (5) en posant

$$(13) \quad E = L^2 + M^2 + N^2, \quad F = L\rho + KN, \quad G = K^2 + \rho^2.$$

La formule (12) conduit aussi à la suivante :

$$(14) \quad \begin{aligned} (\rho^2 + K^2) \delta s^2 &= [(\rho^2 + K^2) M^2 + (KL - N\rho)^2] dt^2 \\ &\quad + [(\rho^2 + K^2) d\varphi + (L\rho + KN) dt]^2, \end{aligned}$$

qui met immédiatement en évidence l'équation différentielle des trajectoires orthogonales des génératrices

$$(15) \quad (\rho^2 + K^2) d\varphi + (L\rho + KN) dt = 0.$$

2. NORMALE ET PLAN TANGENT. — On obtient les paramètres directeurs A, B, C de la normale en un point de la surface en écrivant que cette droite est perpendiculaire aux deux déplace-

ments correspondant à $d\varphi = 0$ et $dt = 0$; on a ainsi :

$$(16) \quad \begin{cases} A = \rho \mathfrak{T} \cos \varphi - K \mathfrak{N} = -KM \sin \varphi - (KL - N\rho) \cos \varphi, \\ B = \rho \mathfrak{T} \sin \varphi + K \mathfrak{L} = KM \cos \varphi - (KL - N\rho) \sin \varphi, \\ C = -\rho (\mathfrak{L} \cos \varphi + \mathfrak{N} \sin \varphi) = -\rho M. \end{cases}$$

Nous poserons

$$(17) \quad H = +\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \sqrt{EG - F^2},$$

d'où

$$(18) \quad \begin{aligned} H^2 &= M^2(\rho^2 + K^2) + (KL - N\rho)^2 \\ &= [\rho \mathfrak{T} - K(\mathfrak{N} \cos \varphi - \mathfrak{L} \sin \varphi)]^2 + (\rho^2 + K^2)(\mathfrak{L} \cos \varphi + \mathfrak{N} \sin \varphi)^2. \end{aligned}$$

Angle de la normale à la surface avec le plan osculateur de la génératrice. — Les cosinus directeurs de la normale à la surface ont pour expressions

$$(19) \quad \lambda = \frac{A}{H}, \quad \mu = \frac{B}{H}, \quad \gamma = \frac{C}{H}.$$

Ceux de la normale principale sont évidemment : $-\cos \varphi$, $-\sin \varphi$, 0, en adoptant une fois pour toutes le signe + devant H et, en désignant par ϖ l'angle de la normale principale de la génératrice avec la normale à la surface :

$$(20) \quad \cos \varpi = \frac{-\mathfrak{T}\rho + K(\mathfrak{N} \cos \varphi - \mathfrak{L} \sin \varphi)}{\sqrt{[-\mathfrak{T}\rho + K(\mathfrak{N} \cos \varphi - \mathfrak{L} \sin \varphi)]^2 + (\rho^2 + K^2)(\mathfrak{L} \cos \varphi + \mathfrak{N} \sin \varphi)^2}}$$

ou

$$(21) \quad \cos \varpi = \frac{KL - N\rho}{[KL - N\rho]^2 + M^2(\rho^2 + K^2)}^{\frac{1}{2}}.$$

On a d'ailleurs, au signe près,

$$(22) \quad \tan \varpi = (\rho^2 + K^2)^{\frac{1}{2}} \frac{M}{KL - N\rho}.$$

Cet angle, si l'on veut préciser la signification du signe adopté pour son cosinus, est celui de la demi-droite de paramètres directeurs A, B, C avec la direction de la normale principale dirigée vers le centre de courbure de la courbe.

On remarque que l'équation

$$KL - N\rho = 0$$

définit sur la surface le lieu des points où la génératrice touche l'une des asymptotiques.

En effet, c'est le lieu des points pour lesquels $\cos \varpi$ est nul.

3. THÉOREME I. — *Le cylindre circulaire droit est la seule surface dont une famille de géodésiques soit constituée par des hélices circulaires.*

Pour qu'une génératrice déterminée soit une géodésique, il faut et il suffit qu'en chacun de ses points on ait

$$\cos^2 \varpi = 1,$$

c'est-à-dire

$$(\rho^2 + K^2)M^2 = 0,$$

et, si on laisse de côté, ce que nous ferons systématiquement dans ce qui suit, la solution $\rho^2 + K^2 = 0$ qui conduit à une ligne de longueur nulle, on est amené à écrire que l'équation

$$M \equiv u \cos \varphi + v \sin \varphi + \rho' + K \varphi (q \cos \varphi - p \sin \varphi) = 0$$

est vérifiée pour toute valeur de φ .

Si l'on suppose $K \neq 0$ (c'est-à-dire que la génératrice considérée ne soit pas un cercle), on obtient immédiatement les conditions

$$(23) \quad u = v = \rho' = q = p = 0.$$

Si, comme l'indique l'énoncé, ces relations doivent être vérifiées pour toutes les hélices génératrices, les équations (23) devront être vérifiées pour toutes valeurs de t et la surface engendrée sera visiblement un cylindre droit.

Ceci suppose essentiellement que l'on n'ait pas $K(t) \equiv 0$, c'est-à-dire que la surface ne dégénère pas en une surface cerclée. On pourrait étudier ce cas et l'on trouverait les surfaces canaux ⁽¹⁾.

(1) Nous laisserons ici de côté l'étude des surfaces cerclées qui rentreraient comme cas particulier dans celle des surfaces hélicoïdes; nous signalerons à leur sujet la Thèse de M. Demartres, *Sur les surfaces à génératrices circulaires* (*Annales de l'École Normale*, 3^e série, t. II, p. 123), et un second Mémoire du même auteur inséré dans les *Annales de l'École Normale*, 3^e série, t. IV, p. 145.

On est ainsi amené dès à présent à faire une remarque très importante et qui sera utile dans tout le cours de cette étude :

Dans les problèmes de ce genre, nous supposerons essentiellement que K n'est pas nul, c'est-à-dire que l'hélice étudiée n'est pas un cercle, sauf mention expresse du contraire. Si donc on envisage une propriété qui doit être réalisée pour certaines hélices de la famille étudiée, il peut y avoir exception aux conclusions énoncées pour les génératrices dégénérées en cercles correspondant aux racines de l'équation $K(t) = 0$, et une étude spéciale s'impose si l'on désire savoir si ces génératrices particulières répondent à la question.

S'il existe une ou plusieurs valeurs du paramètre t pour lesquelles les équations (23) soient vérifiées sans pourtant être identiques, on est conduit au théorème suivant :

THÉORÈME II. — *Si dans le mouvement d'une hélice circulaire, pour une position de celle-ci correspondant à une variation nulle du rayon du cercle principal de la génératrice, le mouvement du trièdre fondamental admet comme axe hélicoïdal instantané l'axe de l'hélice correspondante, celle-ci est une géodésique de la surface. Ces conditions suffisantes sont aussi nécessaires.*

REMARQUES. — I. Si l'on observe que la présence d'un plan de base stationnaire nécessitée par les conditions $p = q = 0$ permet d'introduire pour la génératrice correspondante la relation $r = 0$ ⁽¹⁾, on est amené à un énoncé un peu différent du théorème II :

Si dans le mouvement d'une hélice circulaire, pour une position de celle-ci correspondant à une variation nulle du rayon du cercle principal, le mouvement élémentaire du trièdre fondamental se réduit à une translation suivant l'axe de

(1) Pour la démonstration de ce fait et des divers résultats généraux rappelés dans ce travail, voir par exemple notre *Mémoire Application de la Géométrie cinématique à la théorie des surfaces engendrées par une courbe variable* (*Journal de l'École Polytechnique*, 1912).

l'hélice considérée, celle-ci est une géodésique de la surface. Ces conditions suffisantes sont aussi nécessaires;

Si une génératrice est une géodésique, la variation du rayon de son cercle principal est nulle et l'on peut lui associer un trièdre de référence fondamental dont le mouvement élémentaire dans la position considérée se réduise à une translation.

II. La propriété qui fait l'objet du théorème I est presque évidente géométriquement si l'on observe que la surface en question doit être l'enveloppe du cylindre principal de la génératrice, ce qui ne peut arriver que si la surface enveloppe coïncide avec l'enveloppée, la caractéristique d'un cylindre circulaire ne pouvant être une hélice circulaire si elle est bien déterminée.

4. CONDITIONS POUR QU'UNE HÉLICE GÉNÉRATRICE SOIT ASYMPTOTIQUE. SURFACE DONT TOUTES LES GÉNÉRATRICES SONT ASYMPTOTIQUES. — Pour qu'une génératrice déterminée soit une asymptotique de la surface, il faut et il suffit que, pour tous les points de cette génératrice, $\cos \varpi$ soit nul, ce qui s'exprime par la condition

$$KL - N\rho = 0.$$

En se reportant à l'expression [formule(11)] de $KL - N\rho$, on doit donc écrire que l'équation

$$-\varphi[K^2(q \sin \varphi + p \cos \varphi) + K'\rho] + \cos \varphi(Kv + q\rho^2) - \sin \varphi(Ku + p\rho^2) + \rho(Kv - w) = 0$$

est vérifiée pour toute valeur de φ , d'où l'on tire, comme dans la question précédente, le résultat suivant : Une génératrice asymptotique est caractérisée par les relations

$$(24) \quad p = q = r = K' = 0, \quad u = v = w = 0.$$

On peut alors énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME III. — *La condition nécessaire et suffisante, pour qu'une hélice génératrice soit une asymptotique de la surface qu'elle engendre en l'une de ses positions, est que son axe et son pas soient stationnaires et qu'on puisse lui associer un trièdre fondamental tel que le plan de son cercle principal soit également stationnaire dans la position considérée.*

Dans le cas où les relations sont vérifiées quel que soit t , le pas est constant, le trièdre fondamental correspondant est fixe et les équations de la surface par rapport à ces axes se réduisent à

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = K_0 \varphi,$$

en désignant par K_0 la valeur constante du pas, notation que nous adopterons dans tous les cas analogues.

On reconnaît les équations de l'hélicoïde gauche minimum; donc :

THÉORÈME IV. — *L'hélicoïde gauche à plan directeur est la seule surface à génératrices hélices circulaires dont celles-ci forment une famille d'asymptotiques.*

§. AUTRES FORMULES RELATIVES A LA NORMALE A LA SURFACE. ÉLÉMENTS GÉOMÉTRIQUES DIVERS. — Les cosinus directeurs de la normale sont donnés par les formules déjà signalées :

$$(19) \quad \lambda = \frac{A}{H}, \quad \mu = \frac{B}{H}, \quad \nu = \frac{C}{H}.$$

On peut poser

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{KM}{H} = -\sin V \sin W, \\ \frac{KL - \rho N}{H} = -\sin V \cos W, \\ \frac{\rho M}{H} = \cos V. \end{array} \right.$$

On voit immédiatement que $\cos V = -\nu$. Donc :

V n'est autre que le supplément de l'angle précédemment défini du plan tangent en un point avec le plan de base de la génératrice correspondante.

L'angle W est défini par la relation

$$(26) \quad \text{tang } W = \frac{KM}{KL - \rho N}.$$

Cet angle W est lié aux éléments géométriques V et ϖ par l'une ou l'autre des relations

$$(27) \quad \text{tang } W = \frac{K}{\rho} \frac{\cos V}{\cos \varpi} = K_1 \frac{\cos V}{\cos \varpi} \quad \text{ou} \quad \sin W = -K_1 \cot V,$$

formules dans lesquelles K_1 représente le pas angulaire de la courbe.

Expressions nouvelles de λ , μ et ν . — En développant les valeurs de A, B, C données par le second groupe de formules (16) et y remplaçant les éléments qui y figurent par leurs expressions en V et W , on trouve les formules suivantes :

$$(28) \quad \lambda = \sin V \cos(\varphi - W), \quad \mu = \sin V \sin(\varphi - W), \quad \nu = -\cos V.$$

6. VARIATION DES PARAMÈTRES DIRECTEURS ET DES COSINUS DIRECTEURS. — 1° Ces variations des paramètres directeurs sont données par les formules générales dont je me borne à écrire la première :

$$(29) \quad \delta A = \frac{\partial A}{\partial \varphi} d\varphi + \left(\frac{\partial A}{\partial t} + q C - r B \right) dt,$$

expressions dans lesquelles on remplacera A, B, C par leurs valeurs données par l'un ou l'autre des groupes (16).

Le développement de ces calculs ne présente pas d'intérêt spécial pour le moment et n'offre aucune difficulté.

2° *Variations des cosinus directeurs.* — On obtient immédiatement

$$(30) \quad \begin{cases} d\lambda = -\sin V \sin(\varphi - W)(d\varphi - dW) + \cos V \cos(\varphi - W) dV, \\ d\mu = \sin V \cos(\varphi - W), \\ d\nu = \sin V dV \end{cases}$$

et, en posant,

$$(31) \quad \begin{cases} -d\psi = d\varphi - dW + r dt + \cot V [p \cos(\varphi - W) + q \sin(\varphi - W)] dt, \\ d\chi = dV + [p \sin(\varphi - W) - q \cos(\varphi - W)] dt, \end{cases}$$

on trouve, par substitution dans les formules générales du déplacement, des valeurs de $d\lambda, \dots$, données par les formules (30) :

$$(32) \quad \begin{cases} \delta\lambda = \sin V \sin(\varphi - W) d\psi + \cos V \cos(\varphi - W) d\chi, \\ \delta\mu = -\sin V \cos(\varphi - W) d\psi + \cos V \sin(\varphi - W) d\chi, \\ \delta\nu = \sin V d\chi. \end{cases}$$

Soit $d\omega$ l'arc de l'indicatrice des normales correspondant à un

déplacement quelconque, on obtient immédiatement la formule

$$(33) \quad d\omega^2 = d\chi^2 + \sin^2 V d\psi^2.$$

Lorsque dans les formules de ce numéro et du précédent, on suppose K égal à zéro, elles se simplifient considérablement et l'on obtient les formules données par M. Demartres dans son *Mémoire sur les surfaces cerclées* (*Annales de l'École Normale supérieure*, mai 1885).

L'examen de la formule (33) montre que $d\chi$ n'est autre que la variation de l'angle du plan tangent avec un plan fixe qui, à l'origine, coïnciderait avec le plan de base de l'hélice sur laquelle se trouve l'origine du déplacement; $d\psi$ serait l'angle des plans menés par l'axe de l'hélice en question parallèlement aux deux normales infiniment voisines, ou, ce qui revient au même, l'angle élémentaire dont doit tourner, dans le plan xOy fixe et coïncidant à l'origine avec le plan de base de l'hélice précédente, la trace du plan tangent sur ce plan.

Dans un *Mémoire* inséré dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* (1907), je rappelais l'attention sur un élément proposé par M. Demartres en 1887, la flexion.

De ce qui précède on déduit sans difficulté pour expression de la flexion $\mathcal{F}$ d'un déplacement par rapport au plan de base de la génératrice de son origine :

$$(33) \quad \mathcal{F} = \frac{1}{\sin^2 V} \frac{dz}{d\psi}.$$

7. Dans la surface cerclée l'angle W devient nul identiquement; il en est de même dans les cylindres droits et dans ces deux cas seulement. Cela résulte immédiatement de ce que $\tan W$ devant être nulle, le produit KM doit être identiquement nul.

Proposons-nous maintenant de chercher s'il existe des surfaces pour lesquelles l'angle W réponde à l'une des conditions suivantes :

- I. Rester constant lorsqu'on se déplace sur une hélice génératrice tout en pouvant varier d'une génératrice à une autre.
- II. Rester constant sur toute la surface.

Les deux parties peuvent se traiter en même temps, la deuxième

étant un cas particulier de la première; nous écrirons que

$$\tan W$$

se réduit à une fonction de t , $f(t)$; dans le cas où f est une simple constante on aura la solution de la deuxième partie.

Nous devons donc écrire qu'il existe une fonction $f(t)$ telle qu'on ait identiquement

$$(34) \quad KM - f(t) [KL - \rho N] \equiv 0.$$

En égalant à zéro la fonction trigonométrique coefficient du terme en φ dans le premier membre de cette identité, on doit exprimer que la fonction linéaire en $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$,

$$K^2(q \cos \varphi - p \sin \varphi) + f(t) [K^2(p \cos \varphi + q \sin \varphi) + K' \rho]$$

est identiquement nulle; d'où les trois relations

$$(35) \quad \begin{cases} K^2(q + fp) = 0, \\ K^2(fq - p) = 0, \\ fK' = 0. \end{cases}$$

Outre les solutions $K = 0$, ou $f = M = 0$ qui donnent des surfaces cerclées ou des hélices engendrant un cylindre droit, on trouve finalement (1)

$$(35 \text{ bis}) \quad p = q = K' = 0.$$

La surface est à plan directeur et ses génératrices sont à pas constant.

Le terme trigonométrique du premier membre de l'équation (34) se réduit alors à

$$f \rho \omega + K_0 u \cos \varphi + K_0 v \sin \varphi + K_0 \rho' + f(t) K_0 (u \sin \varphi - v \cos \varphi).$$

(1) On laisse de côté le cas de $f = \pm i$. Dans cette hypothèse spéciale l'angle W ne serait plus bien défini par sa tangente. D'ailleurs, en effectuant les calculs, on trouve des surfaces engendrées par des hélices imaginaires dont le pas est constant, dont le plan de base conserve une direction fixe et dont le lieu du centre du cercle principal est enveloppé par un des plans passant par l'axe de l'hélice et l'une des asymptotes du cercle principal. En réalité, si $f = \pm i$, les équations (35) admettraient la solution $p^2 + q^2 = 0$ qui est à rejeter en dehors du cas où $p = q = 0$.

En écrivant qu'il est identiquement nul et laissant de côté les cas déjà cités, on trouve

$$(36) \quad u = v = 0, \quad K_0 \rho' + f \rho \omega = 0.$$

Donc l'axe de l'hélice et son pas linéaire sont fixes. Il est évident que ces conditions caractérisent les hélicoïdes.

Nous pouvons aussi le vérifier en remarquant que les équations de la surface, par rapport à des axes fixes évidents, sont

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = F(t) + K_0 \varphi,$$

relations dans lesquelles on a

$$F = \int \omega \, dt.$$

On peut d'ailleurs les écrire en prenant ρ pour variable indépendante, car supposer ρ fixe conduirait à un cylindre droit, engendré par des hélices parallèles, ce qui rentre dans un cas déjà étudié et plus général. L'hélicoïde pourra donc être déterminé par les équations

$$(37) \quad x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = F(\rho) + K_0 \varphi,$$

la fonction $F(\rho)$ devant satisfaire à la dernière équation (36), qui est la dernière condition du problème. Ce qui montre qu'à une forme $f(\rho)$ donnée correspondra toujours une surface répondant à la question, la fonction F étant déterminée par l'équation différentielle

$$K_0 + \rho f(\rho) \frac{dF}{d\rho} = 0$$

ou

$$F = -K_0 \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho f(\rho)},$$

la limite ρ_0 étant d'ailleurs arbitraire. Son indétermination n'équivaut d'ailleurs qu'à une translation des axes.

Les surfaces répondant à la question sont [outre les cylindres pour lesquels la fonction $f(t)$ se réduit à zéro] des hélicoïdes. A une fonction $f(\rho)$ donnée correspond une famille d'hélicoïdes de pas arbitraire et définie par les équations (37) dans

lesquelles on fera

$$F(\rho) = -K_0 \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho f(\rho)}.$$

Si $f(t)$ se réduit à une constante a non nulle, on trouve

$$F = \frac{K_0}{a} \text{Log } b\rho \quad (b \text{ const.})$$

Donc :

Les surfaces pour lesquelles l'angle W est constant et différent de zéro ou de $\frac{\pi}{2}$ sont des hélicoïdes ayant pour méridienne une logarithmique.

Dans ce qui précède on a laissé de côté le cas de $W = \frac{\pi}{2}$ correspondant à $f(t)$ infini. On voit directement que ce cas correspond à l'identité

$$KL - N\rho \equiv 0.$$

La surface pour laquelle W est constamment droit est la surface de vis à filet carré.

8. THÉORÈME V. — *Les hélicoïdes et les cylindres droits ⁽¹⁾ sont les seules surfaces engendrées par une hélice circulaire telle que le plan tangent en chaque point d'une génératrice quelconque fasse un angle constant avec le plan de base de la génératrice considérée, angle dont la valeur dépend d'ailleurs en général de la génératrice considérée.*

Pour exprimer que l'angle V ne dépend que de la génératrice, nous écrirons que $\frac{1}{\cos^2 V}$ est fonction de t seul, et en se reportant à la dernière des formules (25) que l'expression

$$K^2 + \rho^2 + \left(\frac{KL - \rho N}{M} \right)^2,$$

et plus simplement que $\frac{KL - \rho N}{M}$ est fonction de t .

(¹) Bien que le cylindre droit puisse être considéré comme cas limite de l'hélicoïde, il y a lieu d'en faire mention, ces surfaces pouvant être considérées comme résultant du mouvement d'une hélice à pas variable. Cette remarque s'applique dans des questions analogues.

Comme $\frac{KL - \rho N}{M}$ ne dépend que de t en même temps que

$$\frac{KL - \rho M}{KM},$$

on retombe sur les calculs rencontrés dans la question précédente : on trouve les hélicoïdes ou les cylindres (pour lesquels $V = \frac{\pi}{2}$).

Si l'on veut que l'angle V soit le même sur la surface, il résulte de là que, hors le cas des cylindres pour lesquels $V = \frac{\pi}{2}$, on trouve les hélicoïdes développables. Donc :

COROLLAIRE. — *L'hélicoïde développable est la seule surface pour laquelle le plan tangent en chaque point fasse avec le plan de base de la génératrice correspondante un angle non droit constant sur toute la surface.*

Des calculs développés dans le n° 7 on déduit aussi sans difficulté la proposition suivante :

THÉORÈME VI. — *L'angle ϖ formé par le plan osculateur à l'hélice génératrice avec la normale à la surface ne reste constant, le long d'une même génératrice, que dans les deux cas suivants :*

1° *Dans les hélicoïdes* (1);

2° *Dans les surfaces à plan directeur et à pas constant engendrées par une hélice imaginaire dont l'axe décrit un plan isotrope et pour lesquelles $w\rho + k_0 i \rho' = 0$.*

REMARQUES. — 1° Dans ce dernier cas, l'angle ϖ est donné par la formule

$$\text{tang } \varpi = \frac{(\rho^2 + K_0^2)^{\frac{1}{2}}}{K_0 i}.$$

2° Dans ces deux séries de surfaces l'hélice génératrice est un cercle géodésique (cf. Chap. III).

(1) Cette première série a été donnée par M. Demartres dans une Note suivant son Mémoire *Détermination des surfaces (W) à lignes de courbure isothermes*, inséré dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2° série, t. IV.

9. COMPOSANTES D'UN DÉPLACEMENT SUIVANT LA GÉNÉRATRICE ET SA TRAJECTOIRE ORTHOGONALE. COSINUS DIRECTEURS DU DÉPLACEMENT PAR RAPPORT AUX AXES DU TRIÈDRE FONDAMENTAL MOBILE. — Soit i l'inclinaison du déplacement sur la génératrice. La considération de la formule (14) donne immédiatement

$$(38) \quad \begin{cases} ds \cos i = (\rho^2 + K^2)^{\frac{1}{2}} d\varphi + (L\rho + KN)(\rho^2 + K^2)^{-\frac{1}{2}} dt, \\ ds \sin i = H(\rho^2 + K^2)^{-\frac{1}{2}} dt, \end{cases}$$

d'où l'on tire les suivantes :

$$(39) \quad \begin{cases} dt = \frac{\sin i}{H} (\rho^2 + K^2)^{\frac{1}{2}} ds, \\ d\varphi = \frac{(\rho^2 + K^2)^{-\frac{1}{2}}}{H} [H \cos i - (L\rho + KN) \sin i] ds. \end{cases}$$

Si l'on se reporte aux formules générales (11), on obtient, en appelant α , β , γ les cosinus directeurs du déplacement,

$$\alpha ds = M \cos \varphi dt - (\rho d\varphi + L dt) \sin \varphi$$

et les deux analogues. En remplaçant dans ces formules dt et $d\varphi$ par leurs valeurs tirées des relations (39) on en déduit

$$(40) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{(\rho^2 + K^2)^{\frac{1}{2}}}{\rho} \cos \varphi \cos V \sin i - \sin \varphi \left[\frac{\rho \cos i}{(\rho^2 + K^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{K \sin i \sin V \cos W}{(\rho^2 + K^2)^{\frac{1}{2}}} \right], \\ \beta = \frac{(\rho^2 + K^2)^{\frac{1}{2}}}{\rho} \sin \varphi \cos V \sin i + \cos \varphi \left[\frac{\rho \cos i}{(\rho^2 + K^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{K \sin i \sin V \cos W}{(\rho^2 + K^2)^{\frac{1}{2}}} \right], \\ \gamma = \frac{K \cos i}{(\rho^2 + K^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\rho}{(\rho^2 + K^2)^{\frac{1}{2}}} \sin i \sin V \cos W. \end{cases}$$

Des formules (39) on tire pour expression de $\frac{d\psi}{ds}$ et de $\frac{d\chi}{ds}$:

$$(41) \quad \begin{cases} \frac{d\psi}{ds} = \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi} - 1 \right) (\rho^2 + K^2)^{-\frac{1}{2}} \cos i - \frac{\sin i}{H(\rho^2 + K^2)^{\frac{1}{2}}} \\ \quad \times \left\{ (\rho^2 + K^2) \left[r + \cot V (p \cos \overline{\varphi - W} + q \sin \overline{\varphi - W}) - \frac{\partial W}{\partial t} \right] \right. \\ \quad \left. + \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi} - 1 \right) (L\rho + KN) \right\}, \\ \frac{d\chi}{ds} = \frac{\partial V}{\partial \varphi} (\rho^2 + K^2)^{-\frac{1}{2}} \cos i + \frac{\sin i}{H(\rho^2 + K^2)} \\ \quad \times \left[(\rho^2 + K^2) \left(\frac{\partial V}{\partial t} + p \sin \overline{\varphi - W} - q \cos \overline{\varphi - W} \right) - (L\rho + KN) \right]. \end{cases}$$

Ces développements trouveront leur emploi dans les calculs ci-après.

10. EXPRESSION GÉNÉRALE DE LA COURBURE NORMALE. — On sait que la courbure normale d'un élément est donnée par l'expression

$$\frac{\alpha \delta \lambda + \beta \delta \mu + \gamma \delta \nu}{ds}.$$

Si, pour abréger, on pose

$$(42) \quad P = \frac{(K^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}}}{\rho}, \quad Q = \frac{\rho \cos i}{(\rho^2 + K^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{K \sin i \sin V \cos W}{(\rho^2 + K^2)^{\frac{1}{2}}},$$

on obtient :

$$(43) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = P \cos \varphi \cos V \sin i - Q \sin \varphi, \quad \beta = P \sin \varphi \cos V \sin i + Q \cos \varphi, \\ \gamma = \frac{K}{P \rho} \cos i + \frac{1}{P} \sin i \sin V \cos W. \end{array} \right.$$

En employant ces formules, on trouve pour expression de la courbure normale $\frac{1}{R_n}$

$$(44) \quad \begin{aligned} \frac{1}{R_n} = \frac{d\chi}{ds} & \left[\frac{\sin i \cos W}{P} (\sin^2 V + P^2 \cos^2 V) \right. \\ & \left. + \frac{K \sin V \cos i}{P \rho} - Q \cos V \sin W \right] \\ & - \frac{d\psi}{ds} [P \sin i \sin V \cos V \sin W + Q \sin V \cos W], \end{aligned}$$

formule dans laquelle il faudrait remplacer $\frac{d\psi}{ds}$ et $\frac{d\chi}{ds}$ par leurs valeurs tirées des formules (41). On obtient ainsi

$$\frac{1}{R_n} = \mathfrak{A} \cos^2 i + 2 \mathfrak{B} \sin i \cos i + \mathfrak{C} \sin^2 i.$$

Étant donnée la complication des calculs, il est sans intérêt d'expliciter les expressions de $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$ qui sont évidemment des fonctions de $\sin \varphi$, $\cos \varphi$, L , N , V et W .

11. EXPRESSION DE LA TORSION GÉODÉSIQUE. — Soit $\frac{1}{T_g}$ la torsion géodésique. Nous aurons

$$\frac{1}{T_g} = - \frac{dT_g}{ds}$$

en prenant

$$dT_g = \Sigma \alpha (\mu \delta \nu - \nu \delta \mu).$$

Or on déduit sans difficulté des expressions (28) et (32) les formules suivantes :

$$(45) \quad \begin{cases} \mu \delta \nu - \nu \delta \mu = -\sin V \cos V \cos(\varphi - W) d\psi + \sin(\varphi - W) d\chi, \\ \nu \delta \lambda - \lambda \delta \nu = -\sin V \cos V \sin(\varphi - W) d\psi - \cos(\varphi - W) d\chi, \\ \lambda \delta \mu - \mu \delta \lambda = -\sin^2 V d\psi, \end{cases}$$

d'où l'on tire, tous calculs faits après remplacement de α , β et γ par leurs valeurs (43),

$$(46) \quad \frac{1}{T_g} = \frac{1}{T} - \frac{d\varpi}{ds} \\ = \frac{d\psi}{ds} \frac{\sin V \left\{ \rho \cos i (K \sin V - \rho \cos V \sin W) + \sin i \cos W (\rho^2 + \rho K \sin V \cos V \sin W + K^2 \cos^2 V) \right\}}{\rho (\rho^2 + K^2)^{\frac{1}{2}}} \\ + \frac{d\chi}{ds} [Q \cos W + P \sin i \cos V \sin W].$$

Les formules (45) et (46) donnent lieu à une remarque déjà faite : elles se simplifient considérablement lorsqu'on y fait $K = 0$, et se réduisent alors aux formules données par M. Demartres dans son Mémoire déjà cité.

12. ÉQUATION DES LIGNES ASYMPTOTIQUES ET DES LIGNES DE COURBURE. — On en aurait une forme en écrivant suivant le cas que $\frac{1}{R_n}$ ou que $\frac{1}{T_g}$ est nul. Nous nous servirons de ce procédé dans une question relative aux lignes de courbure (Chap. III, n° 6, corollaire). On peut encore les écrire :

$$(47) \quad \delta A \delta x + \delta B \delta y + \delta C \delta z = 0,$$

pour les asymptotiques, et

$$(48) \quad \begin{vmatrix} \delta x & \delta y & \delta z \\ \delta A & \delta B & \delta C \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0,$$

pour les lignes de courbure.

13. COURBURE GÉODÉSIQUE, LIGNES GÉODÉSIQUES. — En se reportant aux formules données dans notre Mémoire déjà cité (*Applications de la Géométrie cinématique*, etc.), on trouve pour expression de la courbure géodésique la formule suivante :

$$(49) \quad \frac{H\sqrt{G}}{\rho_g} = \cos i \left[\frac{\partial F}{\partial \varphi} - (KK' + \rho\rho') + H \frac{\partial i}{\partial \varphi} \right] + \sin i \left(\frac{\partial H}{\partial \varphi} + G \frac{\partial i}{\partial t} - F \frac{\partial i}{\partial \varphi} \right),$$

qui devient facilement

$$(50) \quad \frac{1}{\rho_g} = \frac{di}{ds} + \frac{1}{H} \frac{d\varphi}{ds} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi} - KK' - \rho\rho' \right) + \frac{1}{GH} \frac{dt}{ds} \left[F \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi} - KK' - \rho\rho' \right) + H \frac{\partial H}{\partial \varphi} \right],$$

en tenant compte de ce que

$$(51) \quad \cos i = \frac{d}{ds} \sqrt{G} + \frac{F}{\sqrt{G}} \frac{dt}{ds}, \quad \sin i = \frac{H}{\sqrt{G}} \frac{dt}{ds}.$$

L'équation des lignes géodésiques peut s'obtenir facilement en écrivant la relation $\frac{1}{\rho_g} = 0$, sous l'une ou l'autre des formes précédentes.

14. CONDITION POUR QU'UNE FAMILLE D'HÉLICES CIRCULAIRES MOBILES AIT UNE ENVELOPPE. — En appliquant les résultats du Mémoire précité on trouve que :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille d'hélices circulaires mobiles ait une enveloppe est que les équations

$$(53) \quad KL - \rho N = 0, \quad M = 0$$

admettent une solution commune

$$(54) \quad \mathcal{F}(\varphi, t) = 0.$$

A chaque solution de cette forme correspond une courbe tangente aux diverses génératrices. Leur ensemble constitue l'arête de rebroussement de la surface.

13. REMARQUE. — Je me borne à signaler ce fait presque évident :

Le cylindre circulaire droit est la seule surface algébrique sur laquelle on puisse placer une hélice circulaire.

CHAPITRE II.

RÉPARTITION DES NORMALES AUX DIVERS POINTS D'UNE MÊME GÉNÉRATRICE. POINTS CENTRAUX DE PREMIÈRE ESPÈCE ET DE DEUXIÈME ESPÈCE. LIGNES DE STRICTION. SURFACE POUR LESQUELLES CES DEUX LIGNES COÏNCIDENT. PARAMÈTRE DE DISTRIBUTION. SURFACE POUR LESQUELLES LES NORMALES AUX DIVERS POINTS DE CHAQUE GÉNÉRATRICE RENCONTRENT UNE MÊME DROITE.

1. DÉFINITION. — *Quand l'hélice génératrice conserve une direction d'axe invariable, je dirai que la surface est à plan directeur d'hélices ou simplement (quand aucune confusion n'est à craindre) à plan directeur.*

2. ANGLE DU PLAN TANGENT AVEC LE PLAN DE BASE. — Si l'on se reporte au n° 5 du Chapitre précédent, on voit que cet angle peut être considéré comme égal à V . En réalité, avec les conventions qui ont été adoptées dans ce numéro, c'est son supplément; mais, comme dans ce qui suit, il sera surtout utile de considérer la détermination de l'angle de ces deux plans comprise entre zéro et $\frac{\pi}{2}$, rien n'empêche de la prendre pour l'angle V lui-même, considéré comme défini par la détermination positive de la tangente (1) donnée par la formule

$$(1) \quad \tan^2 V = \frac{K^2}{\rho^2} + \frac{(KL - \rho N)^2}{\rho^2 M^2}.$$

Nous désignerons par la notation (V) l'angle ainsi défini.

La considération de la formule (25) du Chapitre précédent conduit immédiatement au théorème suivant :

THÉORÈME I. — *L'angle (V) du plan tangent en un point d'une génératrice avec le plan de base de celle-ci n'est jamais*

(1) Dans le cas des éléments imaginaires on peut faire intervenir la convention suivante : on prendra, pour K la détermination correspondant à une partie réelle positive et celle correspondant à un coefficient positif dans le cas d'une imaginaire pure.

nul. Il a un minimum absolu donné par la formule

$$\text{tang}(V) = \left| \frac{K}{\rho} \right|$$

obtenu pour les points de la génératrice considérée dont les coordonnées satisfont à la relation

$$KL - N\rho = 0,$$

sauf exception possible pour ceux de ces points dont les coordonnées vérifieraient aussi la relation

$$M = 0.$$

REMARQUE. — Les points d'une génératrice présentant un caractère exceptionnel dans le théorème précédent sont ceux où la génératrice rencontre la génératrice infiniment voisine lorsque ce fait se présente.

En ces points, tang V se présente sous forme indéterminée.

DÉFINITION. — *J'appelle points centraux de première espèce les points d'une génératrice définis par la relation*

$$(2) \quad KL - N\rho = 0.$$

Quand la génératrice varie, ils engendrent les diverses branches de la ligne de striction de première espèce.

Ces points sont donc ceux correspondant au minimum de (V) et ceux satisfaisant aux deux relations $KL - N\rho = 0$, $M = 0$. Ces derniers sont en général isolés; dans le cas où ils forment une arête de rebroussement de la surface, cette courbe devra donc être considérée comme faisant partie de la ligne de striction. Ce sont d'ailleurs, dans un cas comme dans l'autre, des points singuliers de la surface ou tout au moins de la définition de celle-ci par le système de génératrices choisi.

REMARQUE. — Nous avons été conduit aux définitions précédentes par une analogie évidente avec les surfaces réglées; toutefois, faut-il remarquer que dans celles-ci V sera constamment égal à $\frac{\pi}{2}$ et l'angle intéressant est celui du plan tangent avec le plan

central. Sa considération ne paraît pas susceptible d'une extension intéressante au cas des surfaces hélicées. Nous ferons remarquer également que l'étude de l'angle V que nous venons de définir se présente utilement dans le cas des surfaces cerclées. Les résultats correspondants ont été développés par M. Demartres dans le *Mémoire* déjà cité. On peut également étendre à ces surfaces (il suffit de faire $K = 0$ dans nos formules) la considération des points centraux et de la ligne de striction de première espèce ([cf. notre *Mémoire Sur une propriété des surfaces cerclées* (*Bulletin de la Soc. mathém. de France*, t XXXVI, 1908, p. 58)]).

3. Revenons aux conséquences de la formule (1). Remarquons qu'on peut écrire

$$KL - \rho N = -\varphi [K^2(q \sin \varphi + p \cos \varphi) + K' \rho] + (KL - \rho N)_T,$$

en désignant par la notation $(KL - \rho N)_T$ la partie de l'expression étudiée qui ne contient que des termes trigonométriques. De même,

$$\rho M = \rho K \varphi (q \cos \varphi - p \sin \varphi) + \rho M_T.$$

Que devient l'angle (V) quand le point considéré s'éloigne indéfiniment sur la génératrice, c'est-à-dire quand φ croît indéfiniment?

Faisons croître φ indéfiniment de la manière suivante.

Nous poserons

$$\varphi = \varphi_0 + 2n\pi,$$

où n est un nombre entier croissant indéfiniment (autrement dit, nous prenons les points qui s'éloignent sur l'hélice génératrice en restant sur une même génératrice de son cylindre principal). Le premier terme de $\tan^2 V$ est évidemment invariable pour un déplacement sur une génératrice; quant au second, il a pour valeur

$$\frac{[K^2(q \sin \varphi_0 + p \cos \varphi_0) + K' \rho]^2 (\varphi_0 + 2n\pi) + \text{const.}}{[(\varphi_0 + 2n\pi) K \rho (q \cos \varphi_0 - p \sin \varphi_0) + \text{const.}]^2}.$$

Les termes simplement trigonométriques des fonctions

$$KL - \rho N \quad \text{et} \quad \rho M$$

conservent une valeur fixe pour la variation imposée à φ .

Lorsque n croît indéfiniment, l'expression précédente tend vers une limite définie par l'expression

$$(3) \quad \left[\frac{K^2(q \sin \varphi_0 + p \cos \varphi_0) + K' \rho}{K \rho (q \cos \varphi_0 - p \sin \varphi_0)} \right]^2.$$

Mais cette expression a une valeur qui, en général, dépend essentiellement de la valeur φ_0 choisie. Donc :

En général, l'angle du plan tangent et du plan de base d'une génératrice n'a pas de limite déterminée quand le point de contact s'éloigne indéfiniment sur cette génératrice.

Cette conclusion pourra être en défaut si le coefficient (3) est indépendant de φ_0 , c'est-à-dire si le quotient

$$\frac{K^2(q \sin \varphi + p \cos \varphi + K' \rho)}{(q \cos \varphi - p \sin \varphi) K \rho}$$

se réduit à une simple fonction de t que nous désignerons par $\lambda(t)$.

On sera donc conduit à écrire l'identité en φ

$$K^2(q \sin \varphi + p \cos \varphi) + K' \rho - \rho K \lambda (q \cos \varphi - p \sin \varphi) = 0,$$

équivalente aux trois suivantes :

$$(4) \quad \begin{cases} qK + p\rho\lambda = 0, \\ -q\rho\lambda + pK = 0, \\ K' = 0. \end{cases}$$

Dans tous les cas, la variation du pas doit être nulle.

Les deux premières équations conduisent aux relations

$$p = q = 0$$

tant que le déterminant de ces quantités

$$K^2 + \lambda^2 \rho^2$$

n'est pas nul. Laissons de côté le dernier cas qui ne convient qu'à des génératrices imaginaires tout à fait particulières (¹).

On a donc

$$p = q = 0.$$

(¹) On vérifie que dans ce cas le plan de base est à caractéristique isotrope.

Mais alors le dénominateur de l'expression (3) est identiquement nul et nos calculs sont en défaut. D'ailleurs ici la relation $K' = 0$ montre que $\tan V$ se réduit à une fonction trigonométrique de φ . Nous étudierons ce cas ultérieurement.

Ainsi qu'il vient d'être dit, l'analyse précédente laisse de côté le cas où le dénominateur de (3) serait nul. Si le numérateur n'est pas nul en même temps, $\tan V$ croît indéfiniment et V a pour limite $\frac{\pi}{2}$ quand le point s'éloigne indéfiniment.

Ce fait se présente quand

$$p = q = 0, \quad \text{avec} \quad K' \neq 0.$$

Donc dans ce cas l'angle V a une limite $\frac{\pi}{2}$ quand le point de contact s'éloigne indéfiniment. Ce cas se présente en particulier pour la génératrice quelconque ($K' \neq 0$) d'une surface à plan directeur d'hélice à pas variable.

Il ne nous reste plus qu'à envisager le cas où l'on a à la fois

$$p = q = K' = 0.$$

Dans cette hypothèse, la partie de $\tan^2 V$ qui dépend de φ se réduit à l'expression

$$\left[\frac{K_0(u \sin \varphi - v \cos \varphi) + \rho w}{\rho(u \cos \varphi + v \sin \varphi + \rho')} \right]^2.$$

Lorsque φ croît indéfiniment, cette expression ne tend en général vers aucune limite déterminée. Si l'on cherche dans quel cas exceptionnel le contraire se présente, on est conduit à des conditions développées aux n^{os} 7 et 8 du Chapitre précédent; nous y exprimions que pour chaque génératrice l'angle V était constant. Si ces conditions sont vérifiées, non pour toute valeur de t , mais seulement pour certaines de ces valeurs, on trouve le résultat suivant :

Si pour une génératrice à plan de base et à pas stationnaire, l'angle (V) tend vers une limite quand φ croît indéfiniment, il est constant sur toute cette génératrice. Si l'on fait abstraction du cas des génératrices imaginaires satisfaisant à la condition $u^2 + v^2 = 0$ que je me dispense d'interpréter, le plan

de base se meut normalement au lieu du centre du cercle principal. Cette valeur sera $\frac{\pi}{2}$ si, en outre, la variation du rayon de ce cercle est nulle.

Ces divers résultats sont résumés dans le théorème suivant :

THÉORÈME II. — *En général, l'angle (V) ne tend pas vers une limite déterminée quand le point de contact du plan tangent considéré s'éloigne indéfiniment sur l'hélice génératrice.*

Il y a exception et cet angle devient droit si le point décrit une génératrice dont le plan de base soit stationnaire en direction et dont le pas ait au même instant une variation différente de zéro.

Si le pas était stationnaire en même temps que la direction du plan de base, l'angle (V) n'aurait pas de limite dans ces conditions, à moins que l'axe de l'hélice ne fût au même instant tangent au lieu du centre du cercle principal : mais dans ce dernier cas l'angle V serait constant sur toute la génératrice (¹). Cette valeur constante serait un droit dans le cas où la variation du rayon du cercle principal serait nulle au même moment.

COROLLAIRE. — *Pour toute surface à plan directeur d'hélice à pas variable, l'angle V du plan tangent en un point d'une génératrice avec le plan directeur tend vers un droit lorsque le point de contact s'éloigne indéfiniment sur la génératrice [sauf pour quelques génératrices exceptionnelles correspondant à des valeurs de t annulant la fonction $K'(t)$].*

4. DÉTERMINATION DES POINTS CENTRAUX DE PREMIÈRE ESPÈCE. — Ils sont donnés par l'équation

$$KL - N\rho = 0,$$

qui, étant transcendante, ne peut être résolue en général.

(¹) Sa valeur serait donnée par la formule

$$\log^2 V = \frac{K^2}{\rho^2} + \frac{w^2}{\rho'^2}.$$

Si toutefois la surface est donnée numériquement, on peut, en se fixant la valeur numérique de t correspondant à une génératrice, avoir recours à une résolution graphique fondée sur l'emploi simultané d'une spirale et d'une courbe du quatrième degré facile à construire.

La ligne de striction de première espèce se déduit de la résolution précédente lorsqu'on la fait pour une suite de valeurs de t .

Nous nous bornerons à chercher dans quel cas cette équation devient algébrique. Ceci peut se présenter dans trois cas :

- 1° φ subsiste dans l'équation sans les lignes trigonométriques ;
- 2° φ ne figure dans l'équation que par les lignes trigonométriques ;
- 3° L'équation se décompose en deux facteurs de la nature de ceux définis ci-dessus. Les deux premiers cas peuvent être considérés comme cas particuliers du troisième.

1° L'équation ne doit pas contenir les lignes de l'arc φ . On doit alors avoir

$$p = q = u = v = 0;$$

nous pouvons de plus faire alors $r = 0$ et, si cette condition est vérifiée pour toutes les génératrices, en rapportant la surface à des axes fixes définis dans le n° 7 du Chapitre précédent, ses équations deviennent

$$(5) \quad x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = f(\rho) + K(\rho)\varphi,$$

dans lesquelles $f(\rho)$ et $K(\rho)$ désignent des fonctions de φ d'ailleurs arbitraires (1).

Nous donnerons à ces surfaces remarquables, généralisation immédiate des hélicoïdes, le nom d'HÉLICOÏDES DE SECONDE ESPÈCE.

Elles jouent un rôle considérable dans diverses questions.

(1) En vérité, ces formules laissent de côté le cas où ρ serait constant et où il faudrait écrire

$$x = \rho_0 \cos \varphi, \quad y = \rho_0 \sin \varphi, \quad z = f(t) + k(t)\varphi.$$

Cette surface est un cylindre droit, cas limite évident des surfaces signalées.

Si f et K sont des fonctions du premier degré de φ , on aura des SURFACES DE VIS DE DEUXIÈME ESPÈCE. L'étude complète de ces surfaces nous entraînerait trop en dehors des limites du travail actuel et nous nous réserverons d'y revenir d'une façon spéciale.

La ligne de striction de première espèce de ces surfaces est définie par l'équation

$$\varphi = -\frac{f'}{K'},$$

f' et K' désignant les dérivées des fonctions f et K par rapport à φ . [Si la surface se réduisait à un cylindre, (voir la note, page 267), elle serait indéterminée.] On voit que, sur chaque hélice génératrice, il y a un point central et un seul. Dans le cas des hélicoïdes ordinaires, ce point est rejeté à l'infini, sauf dans le cas de la surface de vis à filet carré où il est indéterminé. Ces résultats s'expliquent facilement ⁽¹⁾. Enfin signalons la formule qui donne $\tan^2 V$ pour ces surfaces ; c'est la suivante :

$$(6) \quad \tan^2 V = \frac{K^2}{\rho^2} + (K'\varphi + \omega)^2.$$

2° φ ne figure que par ses lignes trigonométriques. Les conditions correspondantes sont ici

$$p = q = K' = 0.$$

Si la propriété est vraie pour toutes les génératrices, c'est-à-dire si les relations précédentes sont identiques, on obtient la classe très intéressante des surfaces à plan directeur et pas constant qui comprennent également, comme cas particulier, les hélicoïdes. Sur chaque génératrice les points centraux forment deux suites de points équidistants répartis sur deux génératrices du cylindre principal correspondant.

3° Cette hypothèse ne conduit à aucun résultat nouveau.

§. PLUS COURTE DISTANCE DE DEUX GÉNÉRATRICES INFINIMENT

(1) Sur les hélicoïdes, $\tan V$ est constant quand le point considéré décrit une génératrice. De plus, cette fonction ne se réduit à $\frac{K^2}{\rho^2}$ que dans le cas de la surface de vis à filet carré. Considérée comme définissant un minimum, la ligne de striction d'un hélicoïde quelconque serait indéterminée. Nous préférons conserver entièrement la définition du texte par l'équation $KL - N\rho = 0$.

VOISINES. — En se reportant au n° 9 de notre Mémoire, *Applications de la géométrie cinématique*, etc., on trouve que les points d'une génératrice, dont la distance à la génératrice infiniment voisine soit minima, maxima ou stationnaire, sont donnés par la relation

$$(7) \quad (KL - N\rho) \frac{\partial}{\partial \varphi} (KL - N\rho) + (\rho^2 + K^2) M \frac{\partial M}{\partial \varphi} = 0,$$

équivalente lorsque H n'est pas nul, c'est-à-dire sauf sur des génératrices isolées, en dehors du cas de la développable isotrope définie par $H \equiv 0$, à l'équation

$$(8) \quad \frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0.$$

DÉFINITION. — *J'appelle point central de seconde espèce d'une génératrice tout point de celle-ci dont les coordonnées curvilignes, t, φ vérifient l'équation (7). Lorsque la génératrice varie, ces points décrivent les diverses branches de la ligne de striction de seconde espèce de la surface.*

6. Si les équations

$$KL - N\rho = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0,$$

admettent une solution commune, $\mathcal{F}(t, \varphi) = 0$, cette solution définit une branche commune aux deux lignes de striction. Je ne m'arrêterai pas à chercher la condition correspondante qui est compliquée et je me bornerai sur ce sujet à la résolution des questions suivantes :

PROBLÈME. — *Déterminer les surfaces telles que la ligne de striction de première espèce appartienne complètement à la ligne de striction de deuxième espèce.*

Pour qu'une surface réponde à la question, il faut et il suffit que toute solution de l'équation correspondante

$$(9) \quad KL - N\rho = 0$$

appartienne à l'équation (7) ou, en laissant de côté le cas des

hélices isotropes, à l'équation

$$(10) \quad M \frac{\partial M}{\partial \varphi} = 0.$$

Supposons d'abord que les solutions de l'équation

$$K^2(q \sin \varphi + p \cos \varphi) + K' \rho = 0$$

ne satisfassent pas à l'équation (9). (L'hypothèse contraire ne peut se présenter que lorsque $KL - N\rho$ se décompose, cas dont nous ferons une étude spéciale.)

On peut alors tirer de l'équation (9) l'angle φ en fonction de ses lignes trigonométriques et porter le résultat dans l'équation (10). L'opération est très simple, l'équation (9) étant linéaire en φ , et le résultat obtenu est une équation (A) qui ne contient plus que $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$ et doit néanmoins admettre toutes les solutions de l'équation transcendante (9). Ceci ne peut avoir lieu que si le premier membre de l'équation (9) se décompose en un produit d'une fonction linéaire en φ par une fonction simplement trigonométrique de l'angle φ , à moins toutefois que (A) ne se réduise à une identité. Le cas où $KL - N\rho$ ne contient pas les lignes trigonométriques ou, au contraire, ne renferme que celles-ci peut d'ailleurs être considéré comme cas limite de la décomposition. Nous commencerons par étudier particulièrement ces deux hypothèses. Notre étude comprendra donc les paragraphes suivants : I. L'équation (9) ne contient pas les lignes de φ ou contient ces lignes seulement; II. L'équation (A) est identique; III. L'équation (9) se décompose.

I. *Premier cas.* — Le premier membre de l'équation (9) ne contient *pas de ligne trigonométrique*. Nous avons vu précédemment que les *surfaces correspondantes étaient des HÉLICOÏDES DE DEUXIÈME ESPÈCE*.

Pour ces surfaces, il y a un point central de deuxième espèce et un seul sur chaque génératrice; il est défini par la relation ⁽¹⁾

$$\varphi = -\frac{f'}{K'}.$$

⁽¹⁾ Exception faite des hélicoïdes ordinaires où les calculs sont en défaut. Voir plus loin la remarque spéciale à ce cas.

Donc :

Les lignes de striction des deux espèces coïncident dans ces surfaces.

Deuxième cas. — Le premier membre de l'équation (9) est dépourvu de terme non trigonométrique. On voit facilement que cette hypothèse correspond aux surfaces de plan directeur dont le pas de la génératrice est constant; cette équation se réduit à la suivante :

$$(11) \quad Ku \sin \varphi - Kv \cos \varphi + w \rho = 0.$$

D'ailleurs on a ici

$$M = u \cos \varphi + v \sin \varphi + \rho', \quad \frac{\partial M}{\partial \varphi} = -u \sin \varphi + v \cos \varphi.$$

Deux cas peuvent se présenter :

a. $w = 0$; alors l'équation (11) ne diffère pas de l'équation

$$\frac{\partial M}{\partial \varphi} = 0,$$

tous les points de première espèce sont de seconde espèce. Ces surfaces possèdent en outre des points de deuxième espèce répartis en deux séries sur chaque génératrice, séries données par l'équation

$$(12) \quad u \cos \varphi + v \sin \varphi + \rho' \left(\frac{\rho^2 + K^2}{\rho^2} \right) = 0.$$

Il ne pourra y avoir coïncidence complète que si les équations (11) et (12) ont mêmes solutions, c'est-à-dire si

$$(13) \quad \frac{u}{v} = -\frac{v}{u} = \frac{\rho'}{0},$$

en laissant de côté les hélices isotropes.

Les relations (13) donnent

$$u = v = 0$$

ou

$$u^2 + v^2 = 0, \quad \text{avec} \quad \rho' = 0.$$

La première solution conduit aux surfaces de vis à filet carré ⁽¹⁾, elle appartient aussi comme cas limite à la série précédente.

La deuxième solution donne des surfaces engendrées par une hélice indéformable munie d'un plan directeur et dont l'axe décrit un plan isotrope perpendiculaire à ce plan directeur. Dans les énoncés qui termineront cette étude, nous ferons abstraction de cette surface spéciale ⁽²⁾.

b. $\omega \neq 0$; alors une racine de l'équation (11) n'annule jamais l'équation $\frac{\partial M}{\partial \varphi} = 0$. Il faut donc que ces racines satisfassent toutes à l'équation $M = 0$, c'est-à-dire à

$$u \cos \varphi + v \sin \varphi + \rho' = 0.$$

Ceci ne peut arriver que si l'on a

$$(14) \quad \frac{u}{v} = -\frac{\rho}{u} = \frac{\rho'}{\frac{u\rho}{K}};$$

étant laissée de côté la surface à génératrices imaginaires satisfaisant à la relation $u^2 + v^2 = 0$, sans que u et v ne soient nuls, on doit avoir

$$u = v = 0,$$

et la deuxième relation (13) est satisfaite d'elle-même. Les surfaces obtenues sont les hélicoïdes. On vérifie que l'équation fondamentale qui détermine les points centraux de deuxième espèce se réduit à une identité. Ce fait s'explique facilement : en effet, pour ces surfaces, les trajectoires orthogonales des hélices génératrices étant des géodésiques, le point central de deuxième espèce sur chaque génératrice est évidemment indéterminé.

II. *L'équation (A) est identique.* Le résultat de la substitution de la valeur tirée de l'équation (9) pour l'arc φ en fonction de $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$ ne peut s'annuler identiquement que si l'un de ses facteurs M ou $\frac{\partial M}{\partial \varphi}$ s'annule identiquement. Donc deux cas à consi-

⁽¹⁾ Pour cette surface, on voit que les équations (9) et (10) se réduisent à des identités.

⁽²⁾ Cette surface appartient à une série déjà rencontrée (cf. n° 3).

dérer: 1° Le résultat de la substitution dans M est identiquement nul;
2° le résultat de la substitution dans $\frac{\partial M}{\partial \varphi}$ est identiquement nul.

1° Le résultat dans M est identiquement nul. En effectuant les calculs on trouve, après avoir rendu entier le résultat de la substitution, un polynome du second degré en $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$ dans lequel :

$$\begin{aligned} \text{coefficient de } \cos^2 \varphi &= K^2 p u + K q (\rho^2 q + K v), \\ \text{» } \sin^2 \varphi &= K^2 v q + K p (\rho^2 p + K u), \\ \text{» } \sin \varphi \cos \varphi &= 2 K \rho^2 p q. \end{aligned}$$

D'où les deux relations (K étant $\neq 0$) suivantes obtenues en écrivant l'égalité entre eux des termes carrés et à zéro du terme rectangle

$$p^2 = q^2, \quad p q = 0,$$

égalités qui donnent de suite $p = q = 0$. La surface doit être à plan directeur. On peut pour simplifier les calculs faire $r = 0$. Mais alors l'équation (9) se réduit à

$$(15) \quad \varphi K' \rho + K u \sin \varphi - K v \cos \varphi + \rho \omega = 0,$$

et l'équation $M = 0$ à

$$(16) \quad u \cos \varphi + v \sin \varphi + \rho' = 0.$$

Pour que cette dernière soit vérifiée par toute racine de l'équation (15), celle-ci ne pouvant visiblement se décomposer sans se réduire à une fonction linéaire ou trigonométrique de φ , on devra avoir soit $u = v = \rho' = 0$, ce qui donne un cylindre droit, soit $K' = 0$ avec $-\frac{u}{v} = +\frac{\rho'}{u} = \frac{\rho \omega}{K}$ et l'on trouve une surface à géné-

ratrices imaginaires déjà définie, à moins qu'on n'ait $u = v = 0$. De nouveau on obtient les hélicoïdes. En résumé, l'hypothèse actuelle ne conduit à aucune surface nouvelle.

Nous passerons à la suivante :

2° Le résultat de la substitution dans $\frac{\partial M}{\partial \varphi}$ est identiquement nul. En rendant entière l'identité à écrire on est conduit à la condition

$$\begin{aligned} (17) \quad [K^2(q \sin \varphi + p \cos \varphi) + K' \rho] [(K q + v) \cos \varphi - (K p + u) \sin \varphi] \\ - K(p \cos \varphi + q \sin \varphi) [(K v + q \rho^2) \cos \varphi \\ - (K u + p \rho^2) \sin \varphi + r \rho K - \rho \omega] = 0. \end{aligned}$$

La considération des termes du second degré en $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$ dans cette équation dépourvue de terme indépendant donne les conditions

$$(18) \quad (K^2 - \rho^2)pq = 0 \quad \text{et} \quad (K^2 - \rho^2)(q^2 - p^2) = 0.$$

On aura donc deux cas principaux : 1° $K^2 - \rho^2$ n'est pas nul nécessairement ; 2° on fait $K^2 = \rho^2$.

1° Si l'on ne prend par $K^2 - \rho^2 = 0$, les équations (18) donnent

$$p = q = 0.$$

La surface correspondante est à plan directeur. La considération des termes du premier degré en $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$ donne les équations

$$K'u = 0, \quad K'v = 0,$$

qui peuvent être réalisées soit par les conditions

$$u = v = 0,$$

pour lesquelles la surface se réduit aux surfaces hélicoïdales de deuxième espèce, et l'on sait que ces surfaces satisfont en effet à la question, soit par $K' = 0$. Mais alors nos calculs ne sont plus légitimes, car, en vertu des conditions $p = q = K' = 0$, le coefficient de φ dans $KL - N\rho$ est identiquement nul. La question a été étudiée précédemment par un procédé direct.

Nous sommes donc amenés à rechercher les résultats auxquels conduit la deuxième hypothèse.

2° On prend

$$K^2 = \rho^2 \quad \text{ou} \quad K = \varepsilon \rho \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

Les trois termes du second degré disparaissent alors sans autre condition. En écrivant que les termes du premier degré s'évanouissent également, on obtient les conditions

$$(19) \quad \begin{cases} \rho'(\nu + q\rho\varepsilon) - p(r\rho^2\varepsilon - \rho w) = 0, \\ \rho'(u + p\rho\varepsilon) + q(r\rho^2\varepsilon - \rho w) = 0, \end{cases}$$

qui, jointes à la condition

$$(20) \quad K = \varepsilon \rho \quad (\varepsilon = \pm 1),$$

sont nécessaires et suffisantes pour la résolution de la question.

Toute solution $p^2 + q^2 = 0$ sans que p et q soient nuls étant à rejeter, nous pouvons prendre pour Ox une parallèle à la caractéristique du plan de base, ainsi qu'il a été dit, ce qui revient à faire

$$q = 0.$$

Les équations (19) se simplifient et deviennent

$$(19 \text{ bis}) \quad \begin{cases} \rho'v - p(r\rho^2\varepsilon - \rho w) = 0, \\ \rho'(u + p\rho\varepsilon) = 0. \end{cases}$$

La seconde équation (19 bis) conduit à deux systèmes de solutions

$$\rho' = 0 \quad \text{ou} \quad u + p\rho\varepsilon = 0.$$

Donc deux séries d'études :

α . On prend $\rho' = 0$; le rayon du cercle principal est constant, soit $\rho = \rho_0$. Mais $K = K_0 = \varepsilon\rho_0$. Le pas est constant : la génératrice est indéformable.

La première équation (19 bis) devient alors

$$p(r\rho_0\varepsilon - w) = 0,$$

qui conduit à deux groupes de solutions. Nous remarquerons de suite que le premier correspondant à $p = 0$ est à rejeter, car on se trouverait dans le cas où $p = q = K' = 0$ et où les calculs actuels sont en défaut. Ce cas a fait l'objet d'une étude spéciale.

Il reste finalement la condition

$$w = r\rho_0\varepsilon.$$

En résumé, nous trouvons une solution caractérisée par les conditions

$$(21) \quad q = 0, \quad \rho = \rho_0, \quad K = K_0 = \varepsilon\rho_0 \quad (\varepsilon = \pm 1), \quad w = r\rho_0\varepsilon.$$

Ces surfaces peuvent être définies géométriquement comme il suit :

Surface engendrée par une hélice de grandeur constante, inclinée à 45° sur son plan de base dont l'axe décrit une surface réglée absolument quelconque, mais dont le trièdre principal possède un mouvement déterminé par la dernière équation.

tion (21); sa rotation élémentaire autour de l'axe de l'hélice génératrice est à chaque instant égale au quotient de la composante suivant cet axe de la translation élémentaire par le pas linéaire de la génératrice (1).

Les deux équations $KL - \rho N = 0$ et $\frac{\partial M}{\partial \varphi} = 0$ se réduisent l'une et l'autre à la seule équation

$$(22) \quad \varphi K_0 p \cos \varphi + (K_0 p + u) \sin \varphi - v \cos \varphi = 0.$$

Nous allons chercher maintenant si tout point central de deuxième espèce est un point de première espèce.

Remarquons qu'on a identiquement

$$KL - N\rho \equiv K_0 \frac{\partial M}{\partial \varphi};$$

l'équation caractéristique (9) des points de deuxième espèce devient ici

$$(22 \text{ bis}) \quad \frac{\partial M}{\partial \varphi} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} (KL - N\rho) + 2 K_0 M \right] = 0.$$

Nous pouvons laisser de côté la solution $\frac{\partial M}{\partial \varphi} = 0$ de cette équation. Elle conduit en effet aux points qui viennent d'être envisagés. L'équation (22 bis) pourra ainsi être remplacée par la suivante

$$(22 \text{ ter}) \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} (KL - N\rho) + 2 K_0 M = 0,$$

qui, développée, prend la forme

$$(23) \quad \varphi K_0 p \sin \varphi - v \sin \varphi + \cos \varphi (2 K_0 p - u) = 0.$$

Toute solution de (23) doit être solution de (22); ceci exige, comme on l'a déjà dit, que le résultat de l'élimination de φ

(1) Comme exemple simple d'une classe de ces surfaces, on peut citer celles qui sont engendrées par l'hélice ci-dessus définie, liée à un trièdre dont le sommet décrit une courbe quelconque tracée sur un cylindre arbitraire dont Ox est la génératrice et Oz la normale. Si la directrice est une hélice circulaire, cette surface est un hélicoïde doublement hélicé et dont les deux systèmes d'hélices circulaires génératrices peuvent être considérés comme satisfaisant à la question actuelle.

entre (23) et (22) considérées comme équations du premier degré en φ soit identiquement nul, à moins toutefois que $\sin \varphi$ ne soit en facteur dans l'équation (23). La première condition est, en divisant par $K_0 p$ (que nous ne supposons pas nul, puisqu'on aurait alors $p = q = K' = 0$),

$$(23 \text{ bis}) \quad \cos \varphi [\cos \varphi (2 K_0 p - u) - v \sin \varphi] \\ - \sin \varphi [(K_0 p + u) \sin \varphi - v \cos \varphi] \equiv 0,$$

équivalente à

$$p = u = 0.$$

La première condition est contraire à notre hypothèse. On ne peut avec elle supposer $p \neq 0$.

Il reste à voir ce qui arrive si $\sin \varphi$ est en facteur dans l'équation (23). Cette équation se réduit alors à la suivante

$$(23 \text{ ter}) \quad \sin \varphi (\varphi K_0 p - v) = 0,$$

avec la condition

$$2 K_0 p = u.$$

Mais toutes les solutions de $\sin \varphi = 0$ ne peuvent convenir à l'équation (22), tant que le terme de celle-ci contenant φ ne disparaît pas. On devrait avoir encore $p = 0$. Donc :

Les séries de surfaces étudiées ne possèdent pas de types à coïncidence complète des lignes de striction.

Mais les équations (19 bis) conduisent encore à une autre série de solutions :

$$(\beta) \quad u + p \varphi \varepsilon = 0.$$

Ici, ρ' n'étant pas nul (¹), prenons φ comme variable indépendante. En tenant compte de la première équation (19 bis), on est conduit aux conditions de définition

$$K = \varepsilon \rho, \quad u = -p \varphi \varepsilon, \quad v = p \rho (r \varphi \varepsilon - w), \quad q = 0.$$

Il semble que la surface correspondante doive satisfaire au problème. Mais ici on se trouve précisément dans un cas exceptionnel signalé tout au début de cette étude; le coefficient de φ est

(¹) Sauf pour un cas limite dont il sera question ultérieurement.

en facteur dans $KL - N\rho$ qui se réduit au produit

$$(\varphi - r\rho + \varepsilon w)(p\rho \cos \varphi + \varepsilon).$$

Voyons alors directement ce qui se passe :

$$\frac{\partial M}{\partial \varphi} \quad \text{se réduit à} \quad \cos \varphi (r\rho \varepsilon - w - \varepsilon \varphi),$$

qui admet bien les racines de $KL - N\rho$ correspondant au facteur

$$\varphi - r\rho + w\varepsilon.$$

Il reste à vérifier si les racines de l'autre facteur de $KL - N\rho$ annulent le produit $M \frac{\partial M}{\partial \varphi}$. D'après ce que nous venons de voir, elles ne peuvent annuler toutes $\frac{\partial M}{\partial \varphi}$, car elles n'annulent pas $\cos \varphi$, et le deuxième facteur de $\frac{\partial M}{\partial \varphi}$ n'a qu'un seul zéro.

Reste à comparer avec M . Si φ_0 est une racine de l'équation

$$p\rho \cos \varphi + \varepsilon = 0,$$

il en est de même de $\varphi_0 + 2n\pi$ où n est un entier arbitraire. Cette simple remarque montre que, si tous les zéros de $p\rho \cos \varphi + \varepsilon$ conviennent à M : 1° ou bien le terme en φ de cette équation doit disparaître, ce qui exige $p = 0$. Mais alors $p = q = u = v = 0$. Nous retrouvons les surfaces hélicoïdales de deuxième espèce; 2° ou bien M possède $\sin \varphi$ en facteur, ce qui exige $u = \rho' = 0$ et par suite $p = 0$ et $v = 0$. On trouve encore le cylindre droit.

Si l'on fait abstraction des surfaces hélicoïdales de seconde espèce et de leurs variétés, on voit que *les surfaces de cette série ne répondent pas à la question. Elles ont néanmoins une particularité intéressante : la ligne de striction de première espèce se décompose en deux courbes, l'une donnant un point sur chaque génératrice appartient à la ligne de striction de seconde espèce, l'autre qui ne lui appartient pas, au moins entièrement, rencontre chaque génératrice en une infinité de points équidistants sur deux génératrices du cylindre principal de l'hélice en question.* Nous désignerons ces surfaces sous le nom de surfaces Ξ .

Remarque. — Dans cette dernière étude, on a laissé de côté le cas de $\rho' = 0$. Si l'on suppose à la fois $u = -p\rho\varepsilon$ et $\rho' = 0$, on obtient une surface solution de la question, qui n'est autre qu'un cas particulier de la série précédente et dont les caractéristiques sont

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho = \rho_0, \quad q = 0, \quad u = -p\rho_0\varepsilon, \quad w = r\rho_0\varepsilon, \\ K_0 = \varepsilon\rho_0. \end{array} \right.$$

L'interprétation géométrique de ce résultat est très intéressante, mais nous aurons l'occasion d'y revenir dans nos études monographiques.

III. Il ne nous reste plus qu'à étudier le cas où $KL - N\rho$ se décompose en deux facteurs de la forme

$$(A\varphi + B)\mathcal{F}_T(\varphi),$$

en désignant par A et B des fonctions de t seul et par $\mathcal{F}_T(\varphi)$ une fonction trigonométrique de φ .

En écrivant l'identité

$$KL - N\rho \equiv (A\varphi + B)\mathcal{F}_T(\varphi)$$

ou les identités équivalentes

$$A\mathcal{F}_T = \alpha_T, \quad \dots,$$

α_T désignant la fonction trigonométrique facteur de φ dans $KL - N\rho$;

$$B\mathcal{F}_T = \beta_T, \quad \dots,$$

β_T désignant le terme simplement trigonométrique de $KL - N\rho$, et en éliminant $\mathcal{F}_T$ on obtient la condition

$$A\beta_T - B\alpha_T \equiv 0.$$

Si on la développe, on trouve sans peine qu'une pareille identité entraîne les relations suivantes :

$$(25) \quad \frac{Ku + p\rho^2}{K^2q} = \frac{-(Kv + q\rho^2)}{K^2p} = \frac{w - rK}{K'\rho}.$$

Introduisons la simplification $q = 0$, nous trouvons

$$p = K' = 0, \quad \dots,$$

cas déjà étudié, ou

$$(26) \quad \begin{cases} Ku + p\rho^2 = 0, \\ \frac{v - Kr}{K'} = -\frac{v}{Kp}. \end{cases}$$

Dans ces conditions, l'équation $KL - N\rho = 0$ se réduit à la suivante

$$(27) \quad \left(\varphi - \frac{v}{Kp}\right)(K^2p \cos \varphi + K'\rho) = 0,$$

et $M = 0$ ne pourra admettre toutes les racines du deuxième facteur du premier membre de (27) que :

1° Si M se décompose, ce qui exige $u = \rho' = 0$ et, en vertu des équations (26),

$$p = 0 \quad \text{et} \quad v = 0 \quad \text{ou} \quad K' = 0.$$

On est ainsi conduit à un cylindre droit ou à la solution déjà envisagée

$$p = q = K' = 0.$$

2° Si M n'a pas de terme en φ . On retombe encore sur des solutions rencontrées; sauf ce cas, si M admet une des racines φ_0 de l'équation

$$(27 \text{ bis}) \quad pK^2 \cos \varphi + K'\rho = 0,$$

elle ne peut admettre que cette seule racine de la série $\varphi_0 + 2n\pi$, φ étant donnée d'une façon unique en fonction de $\sin \varphi$ et de $\cos \varphi$ par l'équation $M = 0$. Reste à voir si les autres racines de (27 bis) n'annulent pas $\frac{\partial M}{\partial \varphi}$. On retrouve encore des solutions déjà rencontrées en observant qu'on doit avoir

$$u + Kp = 0,$$

condition qui, jointe à la première équation (26), donne $K^2 = \rho^2$.

Le problème posé est donc résolu; toutefois, avant d'en résumer la solution, j'introduirai la considération d'une série de surfaces qui, sans être des solutions de la question actuelle, s'y rattachent de très près et jouent un rôle considérable dans nos théories.

Retour sur l'étude des surfaces à plan directeur et à pas

constant. — Si l'on exprime que, pour ces surfaces, les équations $KL - N\rho$ et $M = 0$ ont une branche commune (sans exiger que toute la ligne de première espèce soit comprise dans celle de deuxième), autrement dit que les hélices génératrices aient une enveloppe, on trouve la condition

$$(28) \quad u^2 + v^2 = \rho'^2 + \frac{\rho^2 \omega^2}{K_0^2},$$

qui définit une série de surfaces auxquelles nous donnerons le nom de surfaces (Γ).

Remarque. — Il est à peine besoin de faire remarquer que l'étude précédente s'applique immédiatement au cas où, au lieu de rechercher les coïncidences de points centraux sur toutes les génératrices, c'est-à-dire la communauté de branches de lignes de striction, on voudrait trouver si sur quelque génératrice les conditions demandées sont réalisées. Les équations de condition trouvées, au lieu d'être des relations fonctionnelles en t exprimeraient simplement qu'il existe une ou plusieurs valeurs de t , y satisfaisant. Je me dispenserai d'énoncer les interprétations à donner dans ce cas. Nous en avons déjà rencontré des exemples antérieurement et nous retrouverons ultérieurement les mêmes considérations. Cette remarque étant faite une fois pour toutes, je me dispenserai d'y revenir lorsque l'énoncé complet des propriétés des génératrices spéciales trouvées ne paraîtra pas présenter un intérêt suffisant pour être exposé. Dans tous les résultats précédents on suppose, bien entendu, que la génératrice n'est pas un cercle, c'est-à-dire qu'on fait abstraction des valeurs particulières de t racines de la fonction $K(t)$.

RÉSUMÉ DE L'ÉTUDE PRÉCÉDENTE.

Tout d'abord, nous trouvons *comme seule surface, dont la ligne de striction de première espèce appartienne tout entière à celle de seconde espèce, les surfaces appartenant aux trois séries suivantes :*

1° *Les hélicoïdes de seconde espèce.* — En outre, pour ces surfaces, les lignes de striction des deux espèces coïncident complètement.

2° *Les surfaces à plan directeur et à pas constant définies par la condition $w = 0$.* — Ces surfaces, que nous désignerons par le nom de *surfaces* (Φ), *dérivent géométriquement de la surface de vis à filet carré* en faisant subir à chacune des asymptotiques de celle-ci une translation parallèle au plan directeur, mais de loi quelconque. Pas de surface à coïncidence complète, sauf l'hélicoïde gauche à plan directeur. Leur ligne de striction de deuxième espèce contient, outre celle de première, la branche définie par l'équation $u \cos \varphi + v \sin \varphi + \rho' \left(\frac{\rho^2 + K^2}{\rho^2} \right) = 0$. Parmi ces surfaces, qui forment une classe très intéressante, on peut signaler les surfaces réglées dérivées de l'hélicoïde gauche minimum par une translation rectiligne de ses génératrices, dont l'amplitude est proportionnelle au rayon du cercle principal de l'hélice asymptotique déplacée.

3° *Surfaces engendrées par une hélice de forme invariable inclinée à 45° sur la direction de son axe et dont le mouvement est tel que la rotation élémentaire autour de son axe est égale au quotient de la composante de la translation suivant celui-ci divisée par le pas linéaire de la génératrice.* — Je les appellerai *surfaces* (Ψ). A signaler la classe spéciale de ces surfaces correspondant à un plan de base parallèle à une direction fixe. Pas de coïncidence complète s'il n'y a pas de plan directeur. Dans ce dernier cas, d'ailleurs, on retombe sur une série précédente.

La ligne de striction de seconde espèce de ces surfaces comporte, outre celle de première, la branche définie par l'équation

$$K_0 \varphi (q \cos \varphi - p \sin \varphi) - [(2qK_0 - v) \sin \varphi + (2pK_0 - u) \cos \varphi] = 0.$$

Outre ces trois séries de surfaces répondant au problème proposé, l'étude précédente met en évidence deux autres classes :

4° *Les surfaces à pas linéaire variable égal au rayon.*

5° *Les surfaces Γ ou à plan directeur, pas constant et arête de rebroussement définies analytiquement par la condition complémentaire*

$$u^2 + v^2 = \rho'^2 + \frac{w^2 \rho^2}{K_0^2}.$$

Parmi celles-ci nous désignerons sous le nom de *surfaces* (C)

celles qui correspondent à $\omega = 0$, c'est-à-dire appartiennent aussi à la classe des surfaces Φ . Elles sont définies par les deux conditions complémentaires

$$u^2 + v^2 = \rho'^2, \quad \omega = 0.$$

La dernière a déjà été interprétée géométriquement. La première s'interprète ainsi : Le cylindre principal reste osculateur à un cylindre fixe.

7. L'étude précédente met immédiatement en évidence le théorème suivant :

THÉORÈME III. — *Les hélicoïdes de seconde espèce sont les seules surfaces dont les lignes de striction coïncident complètement.*

La condition de compatibilité des équations

$$M = 0, \quad KL - N\rho = 0,$$

étant la condition nécessaire et suffisante pour que l'hélice génératrice ait une enveloppe, il s'ensuit immédiatement, d'après les calculs précédents, la propriété suivante :

THÉORÈME IV. — *Si l'hélice génératrice admet une enveloppe, celle-ci est une branche commune aux lignes de striction des deux espèces.*

8. On peut se poser le problème inverse de celui traité au n° 6, c'est-à-dire chercher les surfaces telles que toute la ligne de striction de deuxième espèce appartienne à celle de première espèce. On obtient le résultat suivant :

THÉORÈME V. — *Les surfaces à coïncidence complète, hélicoïdes de seconde espèce, sont les seules pour lesquelles la ligne de striction de première espèce contienne toutes les branches de celle de seconde espèce.*

Démonstration. — La ligne de striction de seconde espèce

étant définie par l'équation

$$(29) \quad (KL - N\rho) \frac{\partial}{\partial \varphi} (KL - N\rho) + (\rho^2 + k^2) M \frac{\partial M}{\partial \varphi} = 0,$$

toute solution de cette équation doit satisfaire à la relation

$$(30) \quad KL - N\rho = 0,$$

qui définit la ligne de première espèce.

Premier cas. — $p = q = K' = 0$. Les équations (29) et (30) sont réductibles à une forme algébrique; en exprimant les lignes trigonométriques en fonction de $\tan \frac{\varphi}{2}$, l'équation (29) rendue entière se présente comme étant du quatrième degré en $\tan \frac{\varphi}{2}$ et l'équation (30) conduit à une équation du deuxième degré en $\tan \frac{\varphi}{2}$. Si donc l'équation (29) n'a d'autres solutions que celles de l'équation (30), cela exige que les équations aient une racine commune. Celle-ci doit évidemment appartenir à l'équation

$$M \frac{\partial M}{\partial \varphi} = 0,$$

de telle sorte qu'on est amené à résoudre les deux problèmes suivants :

Chercher s'il existe, parmi les surfaces correspondant aux conditions $p = q = K' = 0$, un groupe tel que les équations

$$M = 0 \quad \text{et} \quad KL - N\rho = 0$$

ou bien

$$\frac{\partial M}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{et} \quad KL - N\rho = 0$$

aient une racine commune.

La première série est constituée par les surfaces Γ . Je ne m'arrêterai pas à démontrer que leur ligne de striction de seconde espèce n'est pas comprise entièrement dans celle de première espèce.

La seconde série conduit aux seules surfaces Φ . On sait que, sauf pour l'hélicoïde gauche minimum, la ligne de striction de seconde espèce a, sur ces surfaces, des branches distinctes de celle de première espèce.

Deuxième cas. — Le premier membre de l'équation (29) se décompose et prend la forme suivante dans laquelle A, B, C désignent des fonctions de t :

$$(31) \quad (A\varphi^2 + B\varphi + C)(\text{fonct. trig. de } \varphi) = 0.$$

En calculant le terme en φ^2 du premier membre de l'équation (29), on trouve pour expression de la fonction trigonométrique entre parenthèses, au facteur K^2 près, le produit

$$(32) \quad (q \cos \varphi - p \sin \varphi) [K' \rho - \rho^2 (q \sin \varphi + p \cos \varphi)].$$

Mais l'équation (29) admet des solutions périodiques puisqu'elle se décompose en deux facteurs dont l'un trigonométrique. Il faut donc que $KL - N\rho$ admette des solutions de période 2π et par suite soit sans terme transcendant, cas étudié précédemment, ou se décompose. S'il en est ainsi, son facteur trigonométrique sera évidemment

$$K' \rho + K^2 (p \cos \varphi + q \sin \varphi).$$

Pour que toutes les racines du produit (32) soient racines de l'équation

$$KL - N\rho = 0$$

et, par suite, de l'équation

$$K' \rho + K^2 (p \cos \varphi + q \sin \varphi) = 0,$$

il faudrait qu'on ait

$$K' = 0, \quad p^2 + q^2 = 0,$$

d'où, en écartant le cas d'un plan de base enveloppant le cercle de l'infini,

$$p = q = K' = 0,$$

Mais alors le terme en φ^2 n'existant plus dans le premier membre de l'équation (29), nos calculs sont en défaut. L'étude du cas correspondant à ces dernières conditions est la première que nous ayons traitée dans la question actuelle.

La même observation s'applique si l'on a simplement

$$p = q = 0.$$

Si l'on veut exprimer que $KL - N\rho$ se décompose dans ce cas,

condition toujours nécessaire, on est conduit à écrire

$$K = \nu = 0.$$

En réalité, $KL - N\rho$ ne contient plus de terme trigonométrique. C'est un cas limite de la décomposition. Les surfaces correspondant aux conditions

$$p = q = u = \nu = 0$$

ne sont autres que les hélicoïdes de seconde espèce. Elles sont à coïncidence complète et satisfont par là même à la question actuelle.

3° *Cas général.* — Soit φ_0 une solution de l'équation (29); si on la porte dans l'équation (30), elle doit y satisfaire par hypothèse. Donc φ_0 peut être exprimée en fonction de $\sin \varphi_0$ et $\cos \varphi_0$ au moyen de l'équation (30), du premier degré en φ_0 . Le résultat porté dans l'équation (29) est une équation algébrique en $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$ qui doit être vérifiée pour $\varphi = \varphi_0$. Soit (A_1) cette équation. La racine φ_0 étant une racine quelconque de l'équation (30), on voit que l'équation trigonométrique (A_1) doit être satisfaite par toute racine de l'équation transcendante (29), ceci exige que celle-ci se décompose, hypothèse qui vient d'être étudiée, ou que l'équation (A_1) soit identique. Or, on voit que (A_1) a été formée comme le (A) du n° 6, à cela près qu'on a substitué dans

$$(KL - N\rho) \frac{\partial}{\partial \varphi} (KL - N\rho) + (\rho' + K^2) M \frac{\partial M}{\partial \varphi},$$

au lieu de substituer dans

$$M \frac{\partial M}{\partial \varphi}.$$

Mais si l'on observe que la première partie de la formule contenant en facteur $KL - N\rho$ s'annule identiquement par la substitution déduite de l'équation (30), on voit que l'équation (A_1) n'est autre que l'équation (A) . Les surfaces en question appartiendront donc au groupe des surfaces dont tous les points de première espèce coïncident avec des points de seconde espèce et, comme elles doivent appartenir au groupe inverse, elles appartiennent, si elles existent, au groupe des surfaces à coïncidence complète.

Ce raisonnement pourrait se trouver en défaut si la substitution précédemment définie n'était plus légitime, ce qui, hors le cas de $p = q = K' = 0$, ne peut se présenter que si $KL - N\varphi$ se décompose.

Mais alors, par hypothèse, l'équation (29) ne peut avoir que deux séries de racines : d'une part, une racine correspondant au facteur algébrique en φ , et, d'autre part, des racines périodiques correspondant au facteur trigonométrique de $KL - N\varphi$. Ceci exige que le premier membre de l'équation (29) se décompose sous la forme (31), ou soit débarrassé de termes transcendants, ce qui est un cas limite de cette forme. Cette étude a été faite et a conduit aux seuls hélicoïdes de seconde espèce.

9. DÉFINITION. — Soit $K_1 = \frac{K}{\rho}$ le pas angulaire de l'hélice génératrice.

L'angle V est donné par la formule

$$(33) \quad \text{tang}^2 V = K_1^2 + \left(\frac{LK - \rho N}{\rho M} \right)^2;$$

si l'on pose

$$(34) \quad K_1 = \text{tang} V_1, \quad \frac{LK - \rho N}{\rho M} = \text{tang} U,$$

on obtient

$$(35) \quad \text{tang}^2 V = \text{tang}^2 V_1 + \text{tang}^2 U.$$

On remarquera que l'angle U est lié simplement à divers éléments géométriques déjà définis par les relations

$$(36) \quad \text{tang} U = -\text{tang} V \cos W, \quad \text{tang} U \text{ tang} W = K_1.$$

J'appelle PARAMÈTRE DE DISTRIBUTION EN UN POINT D'UNE GÉNÉRATRICE l'expression (1)

$$(37) \quad \frac{\partial \text{tang} U}{\partial \varphi}.$$

(1) On est conduit à cette définition par une analogie évidente avec les surfaces réglées. Dans celles-ci, en effet, si V désigne l'angle du plan tangent en un point d'une génératrice avec le plan central de celle-ci, ω le paramètre de distribution de cette génératrice et ρ l'abscisse du point de contact comptée sur la génératrice

10. On est conduit immédiatement à se poser la question suivante :

Existe-t-il des surfaces où cette fonction ait la même valeur en tous les points de chacune des génératrices ainsi que cela se passe pour la quantité analogue dans les surfaces réglées?

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'il existe une fonction $f(t)$ vérifiant l'égalité

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{LK - \rho N}{\rho M} \right) = f(t),$$

ou encore

$$(38) \quad LK - \rho N = [\varphi f(t) + \psi(t)] \rho M,$$

$\psi(t)$ désignant une fonction arbitraire de t introduite par intégration.

Les deux membres de l'équation (38) sont des polynômes en φ , $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$, mais dans le deuxième membre existe un terme en φ^2

$$\varphi^2 \rho K f(t) (q \cos \varphi - p \sin \varphi),$$

tandis que dans le premier membre il n'en existe pas, d'où

$$f(t) = 0 \quad \text{ou} \quad p = q = 0.$$

La condition $f(t) = 0$ conduit à $\tan U = \text{const.}$ et par suite $\tan V = \text{const.}$ le long d'une génératrice. Les surfaces correspondantes se réduisent aux hélicoïdes.

Reste la condition $p = q = 0$. Rien n'empêche de faire $r = 0$.

à partir du point central, on a

$$\tan V = \frac{\rho}{\varpi},$$

ou, sur la génératrice,

$$d \tan V = \frac{1}{\varpi} d\rho,$$

ou

$$\varpi = \frac{d\rho}{d \tan V} = \frac{1}{\frac{d \tan V}{d\rho}}.$$

qu'on peut écrire

$$\varpi = \frac{1}{\frac{\partial \tan V}{\partial \rho}}.$$

Cette formule met en évidence l'analogie annoncée.

L'identité (38) devient :

$$(39) \quad \varphi K' \rho + K u \sin \varphi - K v \cos \varphi + \rho \omega \\ = -\rho f(t)(u \cos \varphi + v \sin \varphi + \rho')\varphi - \rho \psi(t)(u \cos \varphi + v \sin \varphi + \rho').$$

L'identification des deux membres donne

$$u = v = \rho K' + f \rho \rho' = 0, \quad \rho \omega = -f(t) \rho'.$$

Si l'on suppose ρ' nul on est conduit à une hélice fixe ou à un cylindre avec valeur infinie de ψ , résultat qu'il est facile d'expliquer. On pourra donc laisser ce cas et s'arrêter aux équations de conditions

$$(40) \quad u = v = p = q = (r) = 0.$$

Ces conditions étant supposées satisfaites, il existera une fonction $f(t)$ déterminée par la relation

$$(41) \quad f(t) = -\frac{K'}{\rho'}.$$

On pourra se donner u et la fonction ψ sera déterminée par la formule

$$(42) \quad \psi(t) = -\frac{\rho \omega}{\rho'}.$$

D'où le théorème suivant :

THÉOREME VI. — *Les surfaces hélicoïdales de seconde espèce sont les seules pour lesquelles le paramètre de distribution conserve la même valeur aux divers points d'une génératrice.*

Cette valeur est égale au quotient $-\frac{K'}{\rho'}$.

REMARQUE. — *Cette valeur du paramètre de distribution sera la même sur toute la surface si le pas est une fonction linéaire du rayon. En particulier, cette valeur est nulle pour les hélicoïdes ordinaires.*

11. PROBLÈME. — *Déterminer les conditions pour que la normale à la surface engendrée par une hélice circulaire aux divers points d'une génératrice déterminée rencontre une*

même parallèle à l'axe de celle-ci. En particulier, déterminer les surfaces pour lesquelles chacune des génératrices possède cette propriété.

Soient x_0, y_0 les coordonnées de la parallèle à l'axe de la génératrice (t_0) considérée, dans le système mobile auquel nous rapportons la génératrice.

Les coordonnées d'un point de la normale à la surface en un point x, y, z de la génératrice (t_0) considérée sont

$$x + A\sigma, \quad y + B\sigma, \quad z + C\sigma.$$

Les conditions du problème est donc

$$x + A\sigma = x_0, \quad y + B\sigma = y_0,$$

d'où, en éliminant σ ,

$$(43) \quad Bx - Ay = Bx_0 - Ay_0,$$

relation qui doit être vérifiée pour toute valeur de φ , t ayant la valeur t_0 relative à la génératrice considérée. Introduisons la simplification connue $q = 0$. L'équation (43) devient :

$$\begin{aligned} (44) \quad & K\rho(u \cos \varphi + v \sin \varphi) - pK^2\rho\varphi \sin \varphi + K\rho\rho' \\ & \equiv x_0\rho \sin \varphi(\omega + K'\varphi + p\rho \sin \varphi) + Kx_0(u + \rho' \cos \varphi - r\rho \sin \varphi) \\ & \quad - y_0\rho \cos \varphi(\omega + K'\varphi + p\rho \sin \varphi) \\ & \quad + Ky_0(v + r\rho \cos \varphi + \rho' \sin \varphi - pK\varphi). \end{aligned}$$

Le premier membre de cette équation ne contient pas de terme en φ seul, il doit en être de même du second; d'où la relation

$$K^2y_0p = 0,$$

et, si l'on met de côté le cas où t_0 est une racine de $K(t)$, c'est-à-dire où l'hélice dégénère en un cercle, il reste

$$py_0 = 0.$$

1° $y = 0$, la considération des termes trigonométriques de l'équation (44) donne de suite

$$(45) \quad px_0 = 0,$$

et p n'étant pas supposé nul (cf. ci-après), il reste

$$x_0 = 0.$$

La normale à la surface dans ce cas n'est autre que la normale principale à l'hélice. Celle-ci est une géodésique de la surface. On retombe sur une question connue.

2° On satisfait à la relation (45) en prenant $\rho(t_0) = 0$.

Le plan de base est stationnaire. On peut alors supposer

$$r(t_0) = 0.$$

Le premier membre ne contient que des termes trigonométriques. En écrivant qu'il en est de même du deuxième membre, on trouve

$$K'x_0 = K'y_0 = 0,$$

c'est-à-dire, soit

$$x_0 = y_0 = 0,$$

qui donne une solution déjà trouvée, soit

$$K' = 0.$$

Le pas est stationnaire : soit K_0 , sa valeur pour la génératrice en question.

On achève l'identification en écrivant les équations

$$(46) \quad \begin{cases} K_0 \rho u = -\rho \omega y_0 + K_0 \rho' x_0, \\ K_0 \rho v = \rho \omega x_0 + \rho' K_0 y_0, \\ K_0 u x_0 + K_0 v y_0 = K_0 \rho \rho', \end{cases}$$

entre lesquelles l'élimination de x_0 et y_0 donne la condition

$$(47) \quad \rho' \left(u^2 + v^2 - \rho'^2 - \frac{\rho^2 \omega^2}{K_0^2} \right) = 0.$$

A. $\rho' = 0$. — On est conduit à une hélice dont le plan de base et la forme sont stationnaires.

B. $u^2 + v^2 - \rho'^2 - \frac{\rho^2 \omega^2}{K_0^2} = 0$. — Cette condition définit une hélice dont le plan de base et le pas sont stationnaires et qui rencontre la génératrice infiniment voisine.

Si les conditions du problème doivent être vérifiées quel que soit t , les relations précédentes où figurait t_0 deviennent des égalités fonctionnelles; x_0, y_0 deviennent des fonctions de t et l'on obtient le théorème suivant :

THÉORÈME VII. — *Les surfaces engendrées par une hélice*

de grandeur constante qui se meut en conservant une direction d'axe fixe, les cylindres droits et les surfaces Γ , sont les seules dont la normale aux divers points de chaque génératrice rencontre constamment une parallèle à l'axe de celle-ci.

12. PROBLÈME. — Déterminer les surfaces telles que la normale aux divers points de chacune de ses hélices génératrices rencontre une même droite.

Nous commencerons par remarquer qu'on peut laisser de côté le cas où cette droite serait toujours parallèle à l'axe de la génératrice que décrit le pied de la normale, hypothèse qui a fait l'objet de l'étude précédente. Cette remarque sera utile plus loin.

Nous devons donc chercher si l'on peut déterminer des fonctions de la variable t ,

$$a_1 b_1 c_1 d_1, \quad a_2 b_2 c_2 d_2,$$

telles qu'on ait, quel que soit φ et pour une valeur quelconque de t , les relations

$$(48) \quad \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0, \end{cases}$$

entre les trois coordonnées x, y, z données par les équations

$$x = \rho \cos \varphi + A \sigma, \quad y = \rho \sin \varphi + B \sigma, \quad z = K \varphi + C \sigma$$

de la normale à la surface.

L'élimination de σ conduit à l'équation de condition

$$(49) \quad (A a_2 + B b_2 + C c_2)(a_1 \rho \cos \varphi + b_1 \rho \sin \varphi + c_1 K \varphi + d_1) \\ - (A a_1 + B b_1 + C c_1)(a_2 \rho \cos \varphi + b_2 \rho \sin \varphi + c_2 K \varphi + d_2) = 0,$$

qui doit être vérifiée identiquement.

Le premier membre est polynome en φ , $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$ du deuxième degré en φ . Le coefficient de φ^2 , qui s'obtient sans autre difficulté que la longueur des calculs, est, en faisant $q = 0$,

$$C_1 K [a_2 (\rho K' \cos \varphi + \rho K^2) + b_2 \rho K' \sin \varphi + c_2 \rho K \rho \sin \varphi] \\ - C_2 K [a_1 (\rho K' \cos \varphi + \rho K^2) + b_1 \rho K' \sin \varphi + c_1 \rho K \rho \sin \varphi].$$

Ce coefficient doit être identiquement nul. D'où les équations

tions (50) (en mettant de côté les surfaces cerclées)

$$(50) \quad (a_1 c_2 - a_2 c_1) p = 0, \quad (a_2 c_2 - a_2 c_1) K' = (b_1 c_2 - b_2 c_1) K' = 0.$$

Les deux dernières de ces relations donnent la condition unique

$$K' = 0$$

ou les deux conditions

$$a_1 c_2 - a_2 c_1 = 0, \quad b_1 c_2 - b_2 c_1 = 0.$$

Premier cas. — Étudions d'abord cette dernière solution. D'après la remarque du début la droite ne sera pas, sauf peut-être dans des positions particulières, parallèle à l'axe de la génératrice, de telle sorte qu'on peut toujours supposer que l'une des quantités, et même les deux, c_1 ou c_2 n'est pas nulle identiquement. Cela étant, posons

$$c_2 = P c_1$$

et portons dans la relation (50), nous obtenons les équations

$$(a_1 P - a_2) c_1 = 0, \quad (b_2 P - b_2) c_1 = 0;$$

c_1 étant supposé différent de zéro, d'après ce qu'on vient de dire, on a finalement les relations

$$(51) \quad a_2 = P a_1, \quad b_2 = P b_1, \quad c_2 = P c_1.$$

L'équation (49) donne alors

$$(A a_1 + B b_1 + C c_1) (P d_1 - d_2) = 0.$$

On ne peut supposer $P d_1 - d_2$ nul, car les deux plans dont nous sommes partis doivent être distincts pour déterminer une droite à distance finie ou infinie. On doit donc avoir nécessairement

$$(52) \quad A a_1 + B b_1 + C c_1 = 0.$$

C'est la condition pour que la normale reste parallèle au plan

$$(53) \quad a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0,$$

ce qui était à prévoir, la droite déterminée par les deux plans (48) étant ici rejetée à l'infini.

Il reste à satisfaire à l'identité (52). Son premier membre con-

tient la première puissance de φ avec le facteur

$$a_1 \rho K' \cos \varphi + (b_1 \rho K' + c_1 \rho p K) \sin \varphi + a_1 p K^2,$$

qui doit par suite être identiquement nul. D'où

$$(54) \quad a_1 p = 0, \quad a_1 K' = 0, \quad b_1 K' + c_1 p K = 0.$$

La première de ces relations donne : soit

$$a_1 = 0, \quad \text{soit} \quad p = 0.$$

a. En supposant $a_1 = 0$, il reste la seule condition

$$(55) \quad b_1 K' + c_1 p K = 0.$$

Mais, dans ce cas, l'équation (52) s'écrit

$$b_1 [\rho \sin \varphi (u + p \rho \sin \varphi) + K(u - r \rho \sin \varphi + \rho' \cos \varphi)] \\ + c_1 (-u \cos \varphi - v \sin \varphi - \rho') \rho = 0,$$

relation d'identité qui est du second degré en $\sin \varphi$ et en $\cos \varphi$ sans terme en $\cos^2 \varphi$. Le coefficient de $\sin^2 \varphi$ est $b_1 p \rho^2$. Comme on n'a pas supposé p nul, on a donc

$$b_1 = 0.$$

Mais alors la condition (55) entraîne nécessairement $p = 0$, car les trois coefficients a_1 , b_1 , c_1 ne peuvent être nuls à la fois.

Dans tous les cas on est amené à supposer $p = 0$ et l'on se trouve ici dans un cas particulier de cette hypothèse.

b. Je prend la solution $p = 0$. Il reste

$$a_1 K' = b_1 K' = 0,$$

ce qui exige : soit

$$a_1 = b_1 = 0, \quad \text{soit} \quad K' = 0.$$

La première hypothèse conduit à écrire l'identité

$$u \cos \varphi + v \sin \varphi + \rho' = 0$$

ou

$$u = v = \rho' = 0.$$

Les surfaces obtenues sont les cylindres de révolution.

La deuxième donne

$$K = K_0,$$

valeur constante.

Mais puisque $p = q = 0$, on peut supposer $r = 0$ et l'on est conduit à l'équation d'identification

$$a_1(\rho w \cos \varphi - K_0 v - K_0 \rho' \sin \varphi) + b_1(\rho w \sin \varphi + K_0 u + K_0 \rho' \cos \varphi) - c_1 \rho'(u \cos \varphi + v \sin \varphi + \rho') = 0;$$

d'où les trois relations :

$$(56) \quad \begin{cases} a_1 \rho w + b_1 K_0 \rho' - c_1 \rho u = 0, \\ -a_1 K_0 \rho' + b_1 \rho w - c_1 \rho v = 0, \\ -a_1 K_0 v + b_1 K_0 u - c_1 \rho \rho' = 0, \end{cases}$$

entre lesquelles l'élimination de a_1 , b_1 et c_1 donne la relation

$$\rho' \left(u^2 + v^2 - \rho'^2 - \frac{\rho^2 w^2}{K_0^2} \right) = 0.$$

D'où l'on conclut immédiatement :

THÉOREME VIII. — *Les surfaces engendrées par une hélice circulaire indéformable qui se meut en conservant la même direction d'axe, les cylindres de révolution et les surfaces Γ , sont les seules pour lesquelles la normale aux divers points de chacune de ses génératrices reste parallèle à un plan fixe.*

REMARQUES. — 1. Il résulte des théorèmes VII et VIII une réciprocity intéressante entre les éléments qui en font l'objet : la normale aux divers points de chaque génératrice rencontre une parallèle à l'axe de celle-ci, d'une part, et elle reste parallèle à un plan fixe d'autre part.

On remarquera aussi que la normale en question décrit un conoïde; c'est un rapprochement avec les surfaces réglées (paraboloïdes des normales).

Ces deux théorèmes sont des cas particuliers d'un théorème plus général que nous allons établir bientôt.

2. Dans le cas des hélices génératrices de grandeur invariable, le plan auquel la normale reste parallèle est le plan

$$(57) \quad ux + vy + wz = 0,$$

et la droite qu'elle rencontre est déterminée par les relations

$$(58) \quad x = K_0 \frac{v}{w}, \quad y = -K_0 \frac{u}{w}.$$

Si $w = 0$ (la surface est alors une surface Φ), le plan devient parallèle à l'axe et la droite disparaît à l'infini dans ce plan.

Dans le cas des surfaces Γ le plan en question a pour équation

$$(59) \quad (\rho^2 w u - v_0 K_0 \rho \rho') x + (\rho^2 v w + K_0 \rho \rho' u) y + K_0^2 (u^2 + v^2) z = 0,$$

et la droite a les équations

$$x = \frac{K_0 \rho \rho' u + \rho^2 v w}{K_0 (u^2 + v^2)}, \quad y = \frac{K_0 \rho \rho' v - \rho^2 u w}{K_0 (u^2 + v^2)}.$$

Dans les deux hypothèses la droite et le plan sont liés très simplement; si α et β sont les coordonnées de la droite, l'équation du plan est

$$K_0 z = \beta x - \alpha y.$$

Deuxième cas. — On satisfait aux équations (50) en prenant $K' = 0$ ou $K = K_0$. Il ne reste qu'une relation à vérifier

$$(a_1 c_2 - a_2 c_1) p = 0.$$

1° Prenons d'abord $p = 0$ et, pour simplifier, faisons comme c'est notre droit $r = 0$.

L'équation (49) ne possède plus de terme en φ^2 , mais le coefficient de son terme en φ est

$$(60) \quad A(a_2 c_1 - a_1 c_2) + B(b_2 c_1 - b_1 c_2),$$

qui doit être nul. Posons pour abrégier

$$a_2 c_1 - a_1 c_2 = \alpha, \quad b_2 c_1 - b_1 c_2 = \beta.$$

Les conditions pour que l'expression (60) soit nulle sont données par les trois relations

$$(61) \quad \begin{cases} \alpha w \rho + \beta K_0 \rho' = 0, \\ -\alpha K_0 \rho' + \beta w \rho = 0, \\ \beta u - \alpha v = 0. \end{cases}$$

Des deux premières on tire $\alpha = \beta = 0$, ce qui ramène au premier cas, ou bien leur déterminant $w^2 \rho^2 + K_0^2 \rho'^2$ doit être nul, ce qui entraîne, en se bornant aux génératrices réelles,

$$\rho' = w = 0$$

ou

$$\rho = \rho_0 \text{ valeur constante,} \quad w = 0.$$

Ces surfaces sont un cas particulier de celles rencontrées plus haut; c'est précisément le cas exceptionnel où la droite rencontrée par la normale disparaît à l'infini. On retrouverait d'ailleurs, en poursuivant les calculs, la condition $\alpha = \beta = 0$, en laissant de côté $u = v = 0$ qui donne une hélice fixe.

2° p est quelconque; on a nécessairement

$$(62) \quad a_1 c_2 - a_2 c_1 = 0,$$

et l'on a remarqué qu'on pouvait supposer $c_1 c_2 \neq 0$.

Dans ces conditions, on peut faire $c_1 = c_2 = 1$ et la relation (62) devient simplement $a_1 = a_2$, valeur commune que nous désignerons par α . Ces remarques simplifient les calculs suivants sans rien enlever à la généralité des raisonnements. L'équation (49) s'écrit alors après quelques transformations

$$(63) \quad B \rho \cos \varphi - (\Lambda \alpha + C) \rho \sin \varphi + B K \varphi - (\Lambda \alpha + C) z + B \beta = 0$$

en posant ⁽¹⁾

$$\alpha = \frac{d_2 - d_1}{b_2 - b_1}, \quad \beta = \frac{b_2 d_1 - b_1 d_2}{b_2 - b_1}.$$

On remarquera que la droite représentée par les équations (48) admet les équations simples

$$(64) \quad y = -x; \quad z - \alpha x = -\beta,$$

d'où la conclusion suivante :

A un système de valeur de x et β correspond toujours une droite et une seule.

Après remplacement de Λ , B , C par les valeurs correspondantes la relation (63) prend la forme

$$\varphi \rho_1(\varphi) + \rho_2(\varphi) = 0,$$

où $\rho_1(\varphi)$ et $\rho_2(\varphi)$ représentent des polynomes en $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$. On en déduit la relation

$$\rho_1(\varphi) = 0, \quad \rho_2(\varphi) = 0.$$

Tous calculs faits, ρ_1 se réduit à une forme linéaire en $\sin \varphi$ et

⁽¹⁾ Ces calculs supposent $b_2 - b_1 \neq 0$. Le cas où $b_2 = b_1$ n'est autre que celui de l'étude précédente : la normale reste parallèle à un plan.

$\cos \varphi$; en égalant à zéro le coefficient de $\cos \varphi$, on trouve $K_0 \rho' = 0$ et, en laissant de côté les surfaces cerclées, $\rho' = 0$ ou $\rho = \rho_0$.

D'où le résultat remarquable suivant obtenu en rapprochant de la condition $K = K_0$.

Les hélices génératrices doivent être indéformables. Je dis que cette condition nécessaire est aussi suffisante.

La considération du terme en $\sin \varphi$ dans $\rho_1(\varphi)$ donne la condition

$$(I) \quad w = p(\alpha + \alpha K_0) + r K_0,$$

et celle du terme indépendant donne

$$(II) \quad u = \alpha \alpha p.$$

Reste à voir ce que donne la condition

$$\rho_2(\varphi) \equiv 0.$$

Cette expression est un polynôme du second degré en $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$ sans terme en $\cos^2 \varphi$. Tous ses coefficients doivent donc être nuls, d'où quatre conditions :

$$(65) \quad \begin{cases} v + \beta p = 0, & \alpha K_0 u - \alpha \alpha w + \alpha \alpha K_0 r + \alpha u = 0, \\ \beta u + \alpha \alpha v = 0, & \alpha K_0 v + \alpha v + w \beta - \beta K_0 r = 0. \end{cases}$$

La première donne une relation nouvelle

$$(III) \quad v = -\beta p.$$

En vertu de (II) et (III), la seconde condition de la première colonne (65) est vérifiée. Il en est de même, en vertu de (I) et (II) de la première condition de la seconde colonne et de la dernière en raison de (I) et (III).

En définitive, les conditions (I), (II), (III), jointes aux relations $\rho = \rho_0$, $K = K_0$, sont nécessaires et suffisantes quels que soient d'ailleurs p , r , u , v , w , c'est-à-dire le mouvement de l'hélice. Toutefois, pour achever la question, il reste à voir si l'on peut déterminer α et β , c'est-à-dire si les relations (I), (II), (III) admettent bien une solution en α , α et β . Dans le cas de l'affirmative, à chaque système de solution correspondra une droite rencontrée par la normale. (D'ailleurs, *a priori*, deux au plus, sans quoi la normale décrirait une quadrique, ce qui est impossi-

ble, une quadrique ne pouvant contenir une hélice circulaire.) Or, ici, on suppose que p n'est pas identiquement nul : β sera donc donné sans ambiguïté en fonction du mouvement de l'hélice par la relation

$$(III\ bis) \qquad \beta = -\frac{v}{p}.$$

Quant à x et a , ils sont donnés par le système

$$(IV) \qquad \begin{cases} ax = \frac{u}{p}, \\ x + aK_0 = \frac{w - rK_0}{p}. \end{cases}$$

Ces deux relations, quand on y regarde x et β comme les coordonnées cartésiennes d'un point dans un plan, représentent une hyperbole et une droite non parallèle à ses asymptotes. Il existe donc deux couples de valeurs finies

$$\begin{aligned} a_1, \quad x_1; \\ a_2, \quad x_2; \end{aligned}$$

solutions des équations (IV) et par suite deux droites définies par ces couples de valeurs

$$\begin{aligned} a = a_1, \quad x = x_1, \quad \beta = -\frac{v}{p}, \\ a = a_2, \quad x = x_2, \quad \beta = -\frac{v}{p}. \end{aligned}$$

Ces droites peuvent être réelles, imaginaires ou confondues :
réelles si

$$(w - rK_0)^2 - 4puK_0 > 0,$$

confondues si

$$(w - rK_0)^2 - 4puK_0 = 0,$$

imaginaires si

$$(w - rK_0)^2 - 4puK_0 < 0.$$

Toute cette étude est résumée par le théorème général suivant, les remarques qui lui sont adjointes et les théorèmes VII et VIII déjà rencontrés.

THÉORÈME IX. — *Si les normales aux divers points de chaque hélice circulaire génératrice rencontrent une droite fixe, elles*

rencontrent une deuxième droite fixe qui, exceptionnellement, peut être confondue avec la première. La surface est un cylindre de révolution, une surface V ou une surface engendrée par une hélice indéformable, et inversement toutes ces surfaces jouissent de la propriété énoncée (l'une des droites pouvant être rejetée à l'infini et l'autre être parallèle à l'axe de la génératrice : c'est le cas envisagé par les théorèmes VII et VIII).

REMARQUES. — 1. Les génératrices des surfaces, objet du théorème IX, sont indéformables ou douées d'une enveloppe.

2. Nous avons fait, au sujet des théorèmes VII et VIII, un rapprochement avec les surfaces réglées; le théorème IX conduit en outre à un rapprochement avec certaines séries de surfaces cerclées, qui résulte immédiatement du théorème suivant, corollaire d'une proposition du Mémoire de M. Demartres sur les surfaces cerclées :

Pour que les normales aux divers points de chaque génératrice d'une surface cerclée rencontrent, outre l'axe de cette génératrice, une seconde droite fixe, il faut et il suffit que le cercle générateur soit indéformable ou muni d'une enveloppe.

3. La démonstration directe de ce fait : que les normales à la surface engendrée par une hélice indéformable aux divers points de chaque génératrice rencontrent deux droites fixes, se ramène très simplement au théorème de Schönemann et Mannheim sur la propriété des normales aux surfaces trajectoires à un instant donné des divers points d'une figure indéformable dans le déplacement à deux paramètres. La surface engendrée par une hélice circulaire indéformable coïncide en effet avec les diverses surfaces décrites par chacun des points de cette hélice dans le déplacement à deux variables constitué par la composition du mouvement à un paramètre dont est animée l'hélice génératrice et d'un mouvement hélicoïdal indépendant du premier et qui ne cesse de faire coïncider la génératrice avec elle-même dans chacune de ses positions. En appliquant alors le théorème précité aux divers points de la génératrice, on trouve précisément la proposition dont il s'agit.

Cette démonstration s'applique évidemment aux surfaces réglées et à celles engendrées par un cercle indéformable.

CHAPITRE III.

DÉTERMINATION DE DIVERSES SURFACES PAR DES CONDITIONS DE COURBURE
IMPOSÉES A DES GÉNÉRATRICES.

1. *Lemme préliminaire.* — Si le polynome en $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$,

$$\Phi = a^2 \sin^2 \varphi + 2b \sin \varphi \cos \varphi + c \cos^2 \varphi + 2d \sin \varphi + 2e \cos \varphi + f,$$

est carré exact d'une fonction rationnelle de $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$, il sera nécessairement le carré d'un polynome du premier degré en $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$.

Je me bornerai à énoncer cette proposition sans m'arrêter à l'établir.

2. PROBLÈME. — Déterminer toutes les surfaces pour lesquelles H est rationnelle en φ , $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$.

Désignons par $A_t, B_t, a_t, b_t, \alpha_t, \beta_t$, des fonctions trigonométriques de φ rationnelles en $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$; on a

$$KL - \rho N = \varphi A_t + B_t, \quad (\varphi^2 + K^2)^{\frac{1}{2}} M = \varphi a_t + b_t.$$

La solution du problème revient à chercher s'il existe des fonctions α_t, β_t telles qu'on ait

$$(1) \quad (\varphi A_t + B_t)^2 + (\varphi a_t + b_t)^2 \equiv (\varphi \alpha_t + \beta_t)^2,$$

l'expression figurant au premier membre de l'identité (1), si elle est carré parfait, devant nécessairement être le carré d'un binôme linéaire en φ .

L'identification du coefficient des différentes puissances de φ dans les deux membres de l'identité (1) donne les relations

$$(2) \quad A_t^2 + a_t^2 = \alpha_t^2, \quad A_t B_t + a_t b_t = \alpha_t \beta_t, \quad B_t^2 + b_t^2 = \beta_t^2.$$

En éliminant α_t et β_t , on trouve la première condition

$$(3) \quad A_t b_t - B_t a_t = 0$$

ou, en développant,

$$(4) \quad (u \cos \varphi + v \sin \varphi + \rho') [K^2 (q \sin \varphi + p \cos \varphi) + K' \rho] \\ + K (q \cos \varphi - p \sin \varphi) \\ \times [\cos \varphi (K v + \rho^2 q) - \sin \varphi (K u + \rho^2 p) + \rho (K v - w)] = 0,$$

relation qui doit être vérifiée identiquement.

En égalant à zéro le coefficient des termes rectangles $\sin \varphi \cos \varphi$ on trouve la première condition

$$pq = 0.$$

Soit, par exemple,

$$q = 0;$$

égalons les coefficients des termes en $\sin^2 \varphi$ et $\cos^2 \varphi$, nous trouvons la condition

$$K \rho^2 \rho^2 = 0$$

et, enfin, en laissant de côté les surfaces cerclées,

$$p = 0.$$

Les surfaces cherchées seront donc à plan directeur d'hélice (1). Le premier membre de l'équation (4) se réduit au produit

$$K' \rho (u \cos \varphi + v \sin \varphi + \rho'),$$

qui ne peut être nul identiquement que dans deux cas :

$$1^\circ \quad K' = 0;$$

la génératrice est à pas constant K_0 .

$$2^\circ \quad u = v = \rho' = 0;$$

la surface est un cylindre de révolution. Dans ce dernier cas, H se réduit au binôme

$$\rho (\varphi K' + w - K r).$$

Ces surfaces sont susceptibles d'une infinité de génératrices

(1) On aurait pu abréger un peu les écritures en introduisant dès le début la simplification permise $q = 0$. Le bénéfice ainsi réalisé n'aurait d'ailleurs pas été considérable et l'on a adopté le présent exposé par considération pour l'intérêt de la symétrie des écritures.

hélices. Si l'on adopte une famille de génératrices dont le pas est constant, elles rentrent dans la série des hélicoïdes (¹).

Revenons au cas où l'on prend la condition $K' = 0$.

La génératrice est à pas constant. Pour simplifier notre exposé, nous introduirons en outre la condition permise $r = 0$.

On obtient ainsi

$$(5) \quad H^2 = [K_0(v \cos \varphi - u \sin \varphi) - w\rho]^2 \\ + (\rho^2 + K_0^2)(u \cos \varphi + v \sin \varphi + \rho')^2.$$

Il s'agit de rechercher dans quel cas cette expression sera le carré d'une expression rationnelle en $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$. D'après le lemme du début, cela revient à chercher s'il existe trois fonctions de t , α , β , γ telles qu'on ait l'identité

$$(5 \text{ bis}) \quad [K_0(v \cos \varphi - u \sin \varphi) - w\rho]^2 \\ + (\rho^2 + K_0^2)(u \cos \varphi + v \sin \varphi + \rho')^2 = (\alpha \sin \varphi + \beta \cos \varphi + \gamma)^2,$$

ou, après des réductions faciles,

$$(6) \quad \rho^2[u^2 \cos^2 \varphi + 2uv \sin \varphi \cos \varphi + v^2 \sin^2 \varphi] \\ + 2 \sin \varphi[+K_0 u \rho w + \rho' v(\rho^2 + K_0^2)] \\ + 2 \cos \varphi[-K_0 v \rho w + \rho' u(\rho^2 + K_0^2)] \\ + w^2 \rho^2 + \rho'^2(\rho^2 + K_0^2) + K_0^2(u^2 + v^2) - [\alpha \sin \varphi + \beta \cos \varphi + \gamma]^2 = 0$$

La considération des termes du deuxième degré conduit immédiatement aux relations

$$(7) \quad \alpha^2 - \beta^2 = -\rho^2(u^2 - v^2), \quad \alpha\beta = \rho^2 uv,$$

ce qui donne quatre séries de solutions à étudier

$$(8) \quad \alpha = \pm \rho v \quad \text{avec} \quad \beta = \pm \rho u \quad \text{ou} \quad \alpha = \pm \rho ui, \quad \beta = \mp \rho vi,$$

les signes se correspondant dans chaque groupe. Il est évident que, par la nature de la question, on peut, sans restreindre les résultats, se borner, dans chaque groupe, à considérer une seule détermination.

(¹) C'est à ce point de vue que nous avons pu faire rentrer les cylindres dans la catégorie des hélicoïdes dans le théorème XIV énoncé aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, du 17 juin 1907.

PREMIER CAS. — Nous mettrons immédiatement de côté l'hypothèse $u = v = 0$, qui donne des hélicoïdes : ces surfaces répondent à la question et, de plus, H se réduit à une simple fonction de t .

DEUXIÈME CAS. — On prend $\alpha = \rho u i$, $\beta = -\rho v i$. Ce cas correspond à une génératrice imaginaire. C'est d'ailleurs ce que nous vérifierons dans la suite. Les coefficients de $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$ dans le premier membre de l'identité (6) doivent être nuls; ce qui nous donne les deux relations

$$(9) \quad \begin{cases} K_0 \rho u w + \rho' v (\rho^2 + K_0^2) = \gamma \rho u i, \\ -K_0 \rho v w + \rho' u (\rho^2 + K_0^2) = -\gamma \rho v i. \end{cases}$$

L'élimination de γ donne une relation de condition entre les éléments de la génératrice. En laissant de côté les hélices isotropes, comme dans tout ce travail, cette condition est

$$\rho' (u^2 + v^2) = 0,$$

Négligeons pour le moment la solution

$$u^2 + v^2 = 0.$$

nous trouvons

$$\rho' = 0.$$

L'hélice est indéformable. D'ailleurs, en multipliant la première équation (9) par u , la seconde par $-v$, ajoutant et divisant par $u^2 + v^2$, qui n'est pas supposé nul identiquement, on tire

$$\gamma = -w K_0 i.$$

Portons dans l'équation (6) les valeurs trouvées pour α , β et γ en tenant compte de la condition $\rho' = 0$. Le premier membre se réduit à la somme

$$u^2 + v^2 + w^2.$$

La surface sera donc caractérisée par les conditions

$$(10) \quad p = q = r = K' = \rho' = u^2 + v^2 + w^2 = 0.$$

On trouve ainsi un groupe de surfaces engendrées par des hélices indéformables à plan directeur et dont le centre du cercle principal décrit une courbe de longueur nulle quelconque, le mouvement du trièdre fondamental étant une

translation. Ce sont des surfaces de translation à génératrices imaginaires. On a, pour ces surfaces,

$$(11) \quad H = \rho i \left(u \sin \varphi - v \cos \varphi - \frac{w K_0}{\rho_0} \right).$$

Pour achever ce qui est relatif à ce cas, il faut voir ce que donne la solution négligée précédemment

$$(12) \quad u^2 + v^2 = 0.$$

Soit

$$v = ui\varepsilon \quad (\varepsilon = \pm 1),$$

les deux équations (9) se réduisent à une seule, c'est ce qu'exprime la condition même de compatibilité.

En écartant le cas de $u = 0$ qui, en vertu de $v^2 + u^2 = 0$, donnerait $u = v = 0$, la première entraîne la relation

$$(13) \quad \gamma \rho = -K_0 \rho w i + \rho' \varepsilon (\rho^2 + K_0^2);$$

α et β ayant les mêmes valeurs que précédemment, les termes du deuxième degré en $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$ se réduisent dans le premier membre de l'équation (6) comme dans les calculs en question. Le terme indépendant obtenu après ces réductions devra être identiquement nul. Il se réduit ici, en tenant compte de (12), à

$$w^2 \rho^2 + \rho'^2 (\rho^2 + K_0^2) - \gamma^2.$$

Substituons à γ , dans cette expression, sa valeur tirée de l'équation (13) et écrivons que le résultat s'annule : on trouve, après quelques réductions, la relation

$$w^2 \rho^2 (\rho^2 + K_0^2) - (\rho^2 + K_0^2) \rho'^2 K_0^2 + 2 K_0 w \rho \rho' i \varepsilon (\rho^2 + K_0^2) = 0$$

ou

$$(w \rho + i \varepsilon K_0 \rho')^2 = 0,$$

condition qui nous donne simplement

$$(14) \quad W = - \frac{K_0 \rho'}{\rho} i \varepsilon.$$

En introduisant cette dernière condition, on trouve finalement que H se réduit à l'expression rationnelle en $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$

$$(15) \quad H = \rho i (u \sin \varphi - v \cos \varphi - \rho i).$$

Le groupe de surfaces, solutions de la question, ainsi défini est formé de surfaces engendrées par une hélice imaginaire à plan conducteur à pas constant, dont l'axe décrit un plan isotrope et dont le mouvement de translation du trièdre fondamental est défini par la relation complémentaire

$$w = - \frac{K_0 \rho'}{\rho} \varepsilon i.$$

TROISIÈME CAS. — On prend $\alpha = \rho v$, $\beta = \rho u$.

Une suite de calculs complètement analogues aux précédents et que nous nous dispenserons de reproduire conduit au résultat suivant : les surfaces cherchées sont définies par les relations

$$(16) \quad w = 0, \quad u^2 + v^2 = \frac{\rho'^2}{\rho^2} (\rho^2 + K_0^2).$$

Ce sont des surfaces Φ . L'expression de H correspondante est la suivante :

$$(17) \quad H = \rho \left[u \cos \varphi + v \sin \varphi + \frac{\rho'}{\rho^2} (\rho^2 + K_0^2) \right].$$

On peut supposer $\rho' \neq 0$, sans quoi on aurait $u^2 + v^2 = 0$ et l'on serait dans un cas de l'étude précédente. On peut alors prendre ρ comme variable indépendante et si ds est l'élément d'arc de la section droite du cylindre engendré par l'axe de l'hélice, la seconde relation (16) donne

$$\frac{ds^2}{d\rho^2} = \frac{\rho^2 + K_0^2}{\rho^2}$$

ou, en choisissant convenablement la série des arcs et leur origine,

$$(18) \quad \frac{ds}{d\rho} = \frac{(\rho^2 + K_0^2)^{\frac{1}{2}}}{\rho}$$

et

$$s = (\rho^2 + K_0^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{K_0}{2} \log \frac{(\rho^2 + K_0^2)^{\frac{1}{2}} - K_0}{(\rho^2 + K_0^2)^{\frac{1}{2}} + K_0}.$$

Donc :

THÉORÈME I. — *Les seules surfaces pour lesquelles H soit le carré d'une fonction rationnelle de φ , $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$ sont :*

1° *Les hélicoïdes et le cylindre (considéré comme engendré par une hélice à pas variable ou constant) ;*

2° Les surfaces Φ dont l'arc de la section droite du cylindre des axes des génératrices est donné par la formule

$$s = \int \frac{\sqrt{\varphi^2 + K_0^2}}{\rho} d\rho;$$

3° Deux séries de surfaces imaginaires, dont l'une formée par des surfaces de translation.

3. PROBLÈME. — On demande de trouver les surfaces pour lesquelles la famille de courbes faisant avec chaque génératrice un angle $\omega = f(t)$ constant le long de chacune d'elles, mais pouvant varier avec celle-ci soit une famille de géodésiques.

Je laisserai de côté le cas des cylindres où la solution se ramène à un problème de géométrie plane et qui répondent à la question.

L'équation générale des géodésiques donne ici la condition

$$(19) \quad \cos f(t) \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi} - KK' - \rho \rho' \right) + \sin f(t) \left[\frac{\partial H}{\partial \varphi} + G f'(t) \right] = 0;$$

si l'on observe que F est rationnelle en φ , $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$ et que l'équation (19) montre qu'il en est de même de $\frac{\partial H}{\partial \varphi}$, on conclut, en vertu de l'égalité

$$(20) \quad \frac{\partial H}{\partial \varphi} = \frac{1}{2H} \frac{\partial (H^2)}{\partial \varphi},$$

que H est rationnelle en φ , $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$, H^2 ayant évidemment cette propriété. Dès lors, le cylindre étant laissé de côté, on a

$$p = q = r = K' = 0.$$

L'équation (19) à vérifier identiquement se réduit à la suivante :

$$(21) \quad \rho \cos f(t) (u \cos \varphi + v \sin \varphi + \rho') = \sin f(t) \left[\frac{\partial H}{\partial \varphi} + (\rho^2 + K_0^2) f'(t) \right]$$

Ceci posé, passons successivement en revue les diverses surfaces pour lesquelles H est rationnelle et cherchons si quelques-unes d'entre elles répondent bien à la question actuelle.

1° Hélicoïdes: $\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0$, $u = v = 0$. Elles répondent à la question

et l'angle $\omega = f(t)$ vérifie la relation

$$(22) \quad (\rho^2 + K_0^2)^{\frac{1}{2}} \cos \omega = \text{const.},$$

qui est une généralisation de la formule de Clairaut relative aux surfaces de révolution :

Si l'on veut résoudre le problème particulier des trajectoires d'angle $\omega = \omega_0$, on voit que la relation (23) ne peut être vérifiée par ω constant que si $\cos \omega$ est nul, c'est-à-dire si $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$. Autrement dit si la trajectoire est orthogonale.

2° Surfaces Φ définies par la relation

$$u^2 + v^2 = \frac{\rho'^2}{\rho^2} (\rho^2 + K_0^2).$$

L'équation de condition (21) donne ici

$$(23) \quad -\rho \cos f(t)(u \cos \varphi + v \sin \varphi + \rho') \\ + \sin f(t)[- \rho u \sin \varphi + \varphi v \cos \varphi + (\rho^2 + K_0^2) f'(t)] = 0;$$

d'où, en égalant à zéro les coefficients de $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$,

$$(23 \text{ bis}) \quad \rho u \cos f - \rho v \sin f = 0, \quad \rho u \sin f + \rho v \cos f = 0,$$

conditions qui entraînent $u = v = \rho' = 0$. Comme $w = 0$ on trouve une hélice fixe (1).

3° Surfaces imaginaires caractérisées par $u^2 + v^2 + w^2 = \rho' = 0$. On a, dans ce cas, pour déterminer l'angle f la relation

$$\cos f(t) = i \sin f(t),$$

relation incompatible avec la relation fondamentale $\cos^2 + \sin^2 = 1$, vérifiée identiquement pour toute direction non isotrope du plan tangent. Nous rejetterons cette solution. L'autre série de surfaces imaginaires conduit à la même détermination de f , et nous la rejetterons. Nous pouvons donc énoncer les trois propositions suivantes :

THÉORÈME II. — *Les hélicoïdes sont les seules surfaces dont*

(1) On laisse de côté le cas où le déterminant $\sin^2 f + \cos^2 f$ serait nul au lieu d'être égal à 1, ce qui ne peut arriver que pour une direction isotrope.

les trajectoires orthogonales des génératrices sont des géodésiques (le cylindre droit rentre complètement dans cette série ⁽¹⁾).

THÉOREME III. — *Le cylindre de révolution est la seule surface dont les trajectoires non orthogonales des hélices génératrices soient des géodésiques.*

THÉOREME IV. — *Les hélicoïdes (et le cylindre considéré comme engendré par une hélice à pas variable) sont les seules surfaces telles que la famille des courbes faisant avec chaque génératrice un même angle variable avec celle-ci soit constituée de géodésiques de la surface.*

La relation qui donne cet angle i dans les hélicoïdes est

$$(\rho^2 + K_0^2)^{\frac{1}{2}} \cos i = \text{const.}$$

4. THÉOREME V. — *Les hélicoïdes sont les seules surfaces dont les génératrices hélices circulaires soient des cercles géodésiques ⁽²⁾.*

Première démonstration. — Il résulte de la formule générale démontrée au Chapitre I que la courbure géodésique φ_g d'une génératrice est donnée par la relation

$$(24) \quad \frac{H\sqrt{G}}{\rho_g} = \frac{\partial F}{\partial \varphi} - \rho\rho' - KK'.$$

Pour satisfaire au problème, il faut donc et il suffit qu'on puisse trouver une fonction $f(t) = \rho_g$ vérifiant la relation fonctionnelle

$$(24 \text{ bis}) \quad \frac{H\sqrt{G}}{f(t)} = \frac{\partial F}{\partial \varphi} - \rho\rho' - KK'.$$

⁽¹⁾ On pouvait prévoir que les hélicoïdes étaient les seules surfaces dont les trajectoires orthogonales des génératrices étaient géodésiques en remarquant que pour ces seules surfaces la ligne de striction de seconde espèce était indéterminée.

⁽²⁾ En faisant abstraction des surfaces à plan directeur et pas constant définies par la relation $u^2 + v^2 = 0$ dont il a été question au théorème I.

Il résulte de là que H doit être une fonction rationnelle de φ , $\sin \varphi$, $\cos \varphi$.

Si on laisse de côté les cylindres pour lesquels la courbe en question est une géodésique, nous aurons à examiner les seuls cas possibles suivants :

1° La surface est un hélicoïde : la surface satisfait à la question.

2° Le groupe des surfaces Φ satisfaisant aux conditions du problème I. La formule générale (24) devient ici

$$(25) \quad \frac{1}{\rho_g} = - \left(\frac{u \cos \varphi + v \sin \varphi + \rho'}{u \cos \varphi + v \sin \varphi + \rho' \frac{\rho^2 + K_0^2}{\rho^2}} \right) \frac{1}{\rho^2 + K_0^2}.$$

Nous avons vu précédemment qu'il n'y avait pas lieu, pour ces surfaces, de supposer $\rho' = 0$. Dès lors, $\frac{1}{\rho_g}$ ne pourra se réduire à une fonction de t que si l'on a

$$\frac{\rho^2 + K_0^2}{\rho^2} = 1,$$

c'est-à-dire si K_0 est nul, ce que nous éloignons (d'ailleurs, dans ce cas, on serait conduit aux enveloppes de sphères);

3° Les surfaces imaginaires pour lesquelles H est rationnelle en φ , $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$: on est conduit à la famille définie par $u^2 + v^2 = 0$.

§. THÉORÈME VI. — *Les hélicoïdes sont les seules surfaces ⁽¹⁾ dont l'hélice circulaire génératrice soit une courbe à torsion géodésique constante.*

La fonction $\frac{1}{\tau} - \frac{d\varpi}{ds}$ devant être constante le long d'une génératrice et comme celle-ci est à torsion constante, $\frac{d\varpi}{ds}$, et par suite $\frac{d\varpi}{d\varphi}$, doit être invariable le long d'une hélice génératrice. Ceci revient à écrire que la dérivée partielle $\frac{\partial \varpi}{\partial \varphi}$ est une fonction de t .

(¹) Abstraction faite des surfaces à génératrices imaginaires dont il a été question au n° 4.

Or, on a [Chap. I, formule (22)]

$$(26) \quad \pi = \arctan(\rho^2 + K^2)^{\frac{1}{2}} \frac{M}{KL - \rho N},$$

d'où

$$(27) \quad \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} = (\rho^2 + K^2)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{(KL - \rho N) \frac{\partial M}{\partial \varphi} - M \frac{\partial}{\partial \varphi} (KL - \rho N)}{(KL - \rho N)^2 + (\rho^2 + K^2) M^2} \right].$$

Nous devons donc exprimer simplement que le crochet figurant dans le deuxième membre de l'égalité précédente se réduit à une fonction de t : $f(t)$ ou, enfin, qu'il existe l'identité

$$(28) \quad (KL - \rho N) \frac{\partial M}{\partial \varphi} - M \frac{\partial}{\partial \varphi} (KL - \rho N) \\ - f(t) [(KL - \rho N)^2 + (\rho^2 + K^2) M^2] = 0,$$

entre les variables indépendantes t et φ .

Le premier membre de l'identité (28) est un polynôme en φ , $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$ du deuxième degré en φ , dans lequel le coefficient de φ^2 est le polynôme du second degré en $\sin \varphi$ et en φ

$$(29) \quad K^3(p^2 + q^2) + KK'\rho(p \cos \varphi + q \sin \varphi) \\ - f(t)[K^2\rho^2(q \cos \varphi - p \sin \varphi)^2 \\ + 2K^2K'\rho(p \cos \varphi + q \sin \varphi) + K^4(p^2 + q^2) + K'^2\rho^2].$$

Les termes du second degré en $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$ se réduisent, au signe près, à

$$f K^2 \rho^2 (q \sin \varphi - p \cos \varphi)^2.$$

L'expression (29) devant être identiquement nulle, il doit en être de même de ce carré, ce qui exige : soit

$$f = 0,$$

soit

$$p = q = 0.$$

L'hypothèse $f=0$ conduit d'ailleurs encore à $p=q=0$. Mais on peut remarquer que si f est nul, il en est de même du numérateur de $\frac{\partial \pi}{\partial \varphi}$, et, par suite, en général de $\frac{\partial \pi}{\partial \varphi}$. On est ainsi conduit à écrire que π est constant le long de la génératrice : on trouve alors (voir théorème VI, Chap. I) les hélicoïdes et certaines surfaces à génératrices imaginaires. Or, il se trouve pour celles-ci

que le numérateur et le dénominateur de $\frac{\partial \varpi}{\partial \varphi}$ sont identiquement nuls : on peut d'ailleurs vérifier que c'est le seul cas présentant cette exception. Le calcul de $\frac{\partial \varpi}{\partial \varphi}$ est en défaut : on voit directement que, dans cette hypothèse, ϖ est encore constant le long d'une génératrice : ϖ est en effet donné alors par la formule

$$\text{tang } \varpi = \frac{(\varrho^2 + K^2)^{\frac{1}{2}}}{K} i.$$

Ces surfaces peuvent être considérées comme satisfaisant à la question.

Reste l'hypothèse $p = q = 0$. L'expression (29) se réduit à

$$-f(t) K'^2 \varphi^2.$$

On doit donc avoir $K' = 0$, si on laisse de côté le cas où f est nul, traité ci-dessus. L'expression figurant dans le premier membre de l'identité (28) se réduit alors à un polynôme du deuxième degré en $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$, dont les termes du second degré forment un carré parfait en $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$:

$$-f(t) (u \cos \varphi + v \sin \varphi)^2.$$

La réalisation de la relation (28) exige la disparition d'un pareil terme, c'est-à-dire en laissant de côté le cas où $f(t)$ serait nul,

$$u = v = 0.$$

Cette dernière hypothèse conduit aux hélicoïdes ; ces surfaces satisfont bien à la question et il se trouve de plus que l'on a encore la relation

$$f(t) = 0.$$

6. THÉOREME VII. — *Il n'y a pas de surface dont les lignes de courbure d'un système soient des hélices circulaires.*

En effet, on doit avoir dans ce cas, le long d'une de ces hélices,

$$(30) \quad \frac{1}{T} - \frac{d\varpi}{ds} = 0,$$

et l'on vient de voir que ceci exige que $\frac{d\sigma}{ds}$ soit nul. Donc

$$\frac{1}{T}$$

doit être nul.

L'hélice doit se réduire à un cercle.

On remarquera qu'on ne trouve pas l'hélicoïde imaginaire à ds^2 carré parfait, comme cela arriverait en recherchant directement les surfaces ayant pour lignes de courbure une famille d'hélices circulaires en partant de l'équation (48) (Chap. I). Cela tient à ce qu'en toute rigueur les deux définitions des lignes de courbure, comme d'ailleurs les diverses propriétés de courbure des surfaces, sont en défaut pour les surfaces de ce genre.

7. PROBLÈME. — *Déterminer les surfaces dont une famille d'asymptotiques soit formée par les trajectoires orthogonales des hélices génératrices.*

A. Je dis que la surface, si elle existe ⁽¹⁾, est à plan directeur et à pas constant. La relation caractéristique des asymptotiques est

$$(31) \quad \partial A \partial x + \partial B \partial y + \partial C \partial z = 0.$$

Les trajectoires orthogonales des génératrices sont données par la relation différentielle

$$(32) \quad (\rho^2 + K^2) d\varphi + (L\rho + KN) dt = 0.$$

Pour exprimer qu'une trajectoire orthogonale des génératrices est une asymptotique, nous devons donc écrire que la relation (31) est vérifiée quand on y remplace dt et $d\varphi$ par les quantités proportionnelles

$$(\rho^2 + K^2) \quad \text{et} \quad -(L\rho + KN),$$

et cela pour un point quelconque de la trajectoire considérée, c'est-à-dire pour tout système de valeurs t, φ correspondant à un point d'une asymptotique trajectoire orthogonale. Si une famille

(1) L'existence d'une solution au moins, celle que nous démontrons être la seule, peut être prouvée *a priori*.

d'asymptotiques se trouve formée de trajectoires orthogonales, la relation obtenue devra être une identité entre les variables indépendantes t et φ .

Ceci posé, désignons par $P\delta x$, $P\delta y$, ..., $P\delta C$ des quantités proportionnelles à δx , ..., δC obtenues en remplaçant dt et $d\varphi$ comme il a été dit. On aura

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} P\delta x = (\rho^2 + K^2)(M \cos \varphi - L \sin \varphi) + \rho \sin \varphi (L\rho + KN), \\ P\delta y = (\rho^2 + K^2)(M \sin \varphi + L \cos \varphi) - \rho \cos \varphi (L\rho + KN), \\ P\delta z = -\rho(KL - N\rho), \\ P\delta A = -\frac{\partial A}{\partial \varphi}(L\rho + KN) + (\rho^2 + K^2)\left(\frac{\partial A}{\partial t} + qC - rB\right), \\ P\delta B = -\frac{\partial B}{\partial \varphi}(L\rho + KN) + (\rho^2 + K^2)\left(\frac{\partial B}{\partial t} + rA - pC\right), \\ P\delta C = -\frac{\partial C}{\partial \varphi}(L\rho + KN) + (\rho^2 + K^2)\left(\frac{\partial C}{\partial t} + pB - qA\right). \end{array} \right.$$

Ce sont des polynômes en φ , $\sin \varphi$, $\cos \varphi$ du premier degré en φ . Le premier membre de l'équation (31), après remplacement de δx , ..., δC par $P\delta x$, ..., se présente sous forme d'un polynôme en φ , $\sin \varphi$, $\cos \varphi$ du deuxième degré en φ et qui doit être identiquement nul. Considérons le terme en φ^2 . Son coefficient est un polynôme en $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$ qui se présente comme devant être du quatrième degré. On trouve pour ses termes du quatrième degré, par des calculs assez longs, en remplaçant $L, M, N, \dots, \frac{\partial C}{\partial \varphi}, \frac{\partial C}{\partial t}$ par leurs valeurs, l'expression

$$K^2 \rho^4 K' (p \cos \varphi + q \sin \varphi)^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi),$$

qui se réduit d'elle-même au second degré.

Nous sommes amenés à chercher les termes du troisième degré du coefficient étudié. Le principe du calcul est tout à fait élémentaire; sa longueur seule en fait la difficulté. Si l'on pose

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} a = \rho K K'^2 + (\rho^2 + K^2) \rho (p K q - r K'), \\ a_1 = (\rho^2 + K^2) [(K' \rho)' - q^2 K \rho], \\ b = (\rho^2 + K^2) [(K' \rho)' - p^2 K \rho], \\ b_1 = [-\rho K K'^2 + \rho (\rho^2 + K^2) (p q K + r K')], \end{array} \right.$$

on trouve pour terme du troisième degré du coefficient considéré

$$(35) \quad (p \cos \varphi + q \sin \varphi) [\rho^3 K^4 (p \cos \varphi + q \sin \varphi)^2 \\ - K \rho^2 \sin \varphi (a \sin \varphi + a_1 \cos \varphi) \\ + K^2 \rho \cos \varphi (b \sin \varphi + b_1 \cos \varphi)].$$

Pour que le coefficient considéré soit identiquement nul, il faut que ses termes du plus haut degré soient divisibles par

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi$$

(voir la note qui termine le Chapitre). On peut laisser de côté le cas où $p \cos \varphi + q \sin \varphi$ se réduit à un facteur près non nul à $\cos \varphi \pm i \sin \varphi$, car alors $p^2 + q^2$ est nul sans que p et q le soient ensemble; cela étant, on devra écrire que $\sin^2 + \cos^2$ ne diffère du polynôme entre crochets dans (35) que par un facteur indépendant de φ ; d'où les deux conditions

$$\rho^3 K^4 p^2 + K \rho^2 b_1 = \rho^3 K^4 q^2 - K \rho^2 a,$$

ou

$$(36) \quad a + b_1 = \rho K^3 (q^2 - p^2)$$

et

$$- a K \rho^2 + b K \rho^2 + 2 K^4 \rho^3 p q = 0,$$

ou

$$(37) \quad a_1 - b = 2 \rho K^3 p q,$$

et, d'autre part, on a

$$(38) \quad \begin{cases} a + b_1 = 2 \rho K p q (\rho^2 + K^2), \\ a_1 - b = -(\rho^2 + K^2) K \rho (q^2 - p^2). \end{cases}$$

La comparaison des expressions de $a + b_1$ et de $a_1 - b$ donne les relations suivantes entre p et q :

$$(39) \quad (\rho^2 + K^2) (q^2 - p^2) + 2 K^2 p q = 0,$$

$$(40) \quad - K^2 (q^2 - p^2) + 2 (\rho^2 + K^2) p q = 0,$$

qui entraînent

$$p q = 0, \quad q^2 - p^2 = 0,$$

et, par suite,

$$p = q = 0.$$

Il ne peut y avoir exception que si le déterminant des équations

tions (39) et (40) entre p , q et $q^2 - p^2$ était identiquement nul, c'est-à-dire si l'on avait

$$(41) \quad (\rho^2 + K^2)^2 + K^4 = 0$$

ou

$$K^2 = \frac{-\rho^2}{1 \mp i}.$$

Pour une telle valeur de K^2 , les équations (39) et (40) se réduisent à une seule

$$(q \mp p i)^2 = 0.$$

On se trouve dans le cas écarté.

Nous pouvons donc supposer $p = q = 0$ et introduire $r = 0$. On a alors

$$\begin{aligned} P \delta x &= K K' \rho \varphi \sin \varphi + (P \delta x)_T, \\ P \delta y &= -K K' \rho \varphi \cos \varphi + (P \delta y)_T, \\ P \delta z &= K' \rho^2 \varphi + (P \delta z)_T, \\ P \delta A &= [+ \rho K K'^2 \sin \varphi + (\rho^2 + K^2) (K' \rho)' \cos \varphi] + (P \delta A)_T, \\ P \delta B &= [- \rho K K'^2 \cos \varphi + (\rho^2 + K^2) (K' \rho)' \sin \varphi] + (P \delta B)_T, \\ P \delta C &= (P \delta C)_T. \end{aligned}$$

Le coefficient de φ^2 dans

$$\delta A \delta x + \delta B \delta y + \delta C \delta z$$

se réduit alors au monome

$$K^2 K'^3 \rho^2.$$

Il doit être nul; donc

$$K' = 0 \quad \text{ou} \quad K = K_0,$$

résultat qui achève de justifier la proposition annoncée.

B. Je dis que la surface ne peut être qu'un hélicoïde. Formons $\Sigma P \delta x P \delta A$ en tenant compte des relations

$$p = q = r = K' = 0.$$

Dans ce cas, l'équation (31) ne contient que des lignes trigono-

métriques. On a

$$(42) \left\{ \begin{aligned} P \delta x &= (u + \rho' \cos \varphi)(\rho^2 + K_0^2) \\ &\quad + \rho \sin \varphi [K_0 w - \rho(u \sin \varphi - v \cos \varphi)], \\ P \delta y &= (v + \rho' \sin \varphi)(\rho^2 + K_0^2) \\ &\quad - \rho \cos \varphi [K_0 w - \rho(u \sin \varphi - v \cos \varphi)], \\ P \delta z &= \rho^2 w + \rho K(u \sin \varphi - v \cos \varphi), \\ P \delta A &= (\rho w \sin \varphi + K_0 \rho' \cos \varphi) [K_0 w - \rho(u \sin \varphi - v \cos \varphi)] \\ &\quad + (\rho^2 + K_0^2) [(\rho w)' \cos \varphi - K_0 \rho'' \sin \varphi + K_0 v'], \\ P \delta B &= -(\rho w \cos \varphi - K_0 \rho' \sin \varphi) [K_0 w - \rho(u \sin \varphi - v \cos \varphi)] \\ &\quad + (\rho^2 + K_0^2) [(\rho w)' \sin \varphi + K_0 \rho'' \cos \varphi + K_0 u'], \\ P \delta C &= \rho(-u \sin \varphi + v \cos \varphi) [K_0 w - \rho(u \sin \varphi - v \cos \varphi)] \\ &\quad - (\rho^2 + K_0^2) [(\rho u)' \cos \varphi + (\rho v)' \sin \varphi + (\rho \rho')']. \end{aligned} \right.$$

La somme $\Sigma P \delta x P \delta A$ se présente sous forme d'un polynôme du quatrième degré en $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$. Or, en effectuant, on trouve pour les termes du quatrième degré

$$\begin{aligned} &\rho^3 \sin \varphi (u \sin \varphi - v \cos \varphi)^2 (\rho w + K' \rho \cos \varphi) \\ &\quad + \rho^3 \cos \varphi (u \sin \varphi - v \cos \varphi)^2 (\rho w \cos \varphi - K' \rho \sin \varphi), \end{aligned}$$

expression qui se réduit simplement à

$$\rho^4 w (u \sin \varphi - v \cos \varphi)^2.$$

On ferait de même l'étude des termes du troisième degré et l'on trouverait finalement

$$\Sigma P \delta x P \delta A = K_0 \rho^3 (u \sin \varphi - v \cos \varphi)^3 + P_2,$$

P_2 désignant un polynôme du second degré en $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$.

Une pareille identité exige

$$u = v = 0.$$

Ces conditions, jointes à celles déjà trouvées, définissent un hélicoïde.

C. Dans un hélicoïde, les trajectoires orthogonales des hélices génératrices sont des géodésiques. Devant être des asymptotiques, ce sont nécessairement des droites. La surface sera donc un hélicoïde réglé engendré par une normale à une hélice. D'ailleurs, d'une façon générale, les trajectoires orthogonales des hélices sont

des courbes indéformables liées invariablement au trièdre principal de l'hélice directrice. Donc :

La surface cherchée sera l'hélicoïde réglé engendré par une normale à une hélice circulaire liée invariablement au trièdre principal de cette courbe. L'inverse est évidemment vrai. Donc :

THÉORÈME VIII. — *Les seules surfaces engendrées par une hélice circulaire, trajectoire orthogonale, d'une famille d'asymptotiques de la surface sont les hélicoïdes réglés engendrés par une normale à une hélice circulaire liée invariablement au trièdre principal de cette hélice.*

REMARQUE. — Ces normales enveloppent un cylindre circulaire ayant pour axe celui de l'hélice directrice. Le point de contact du cylindre et de la normale décrit une hélice de ce cylindre. Cette hélice est normale à la génératrice rectiligne de l'hélicoïde considéré, car elle intercepte un segment constant à partir de la directrice qui est elle-même trajectoire orthogonale de la génératrice rectiligne. Celle-ci n'est autre que la binormale à l'hélice, lieu des points de contact. Inversement, on voit immédiatement que le lieu des binormales à une hélice répond à la question. On peut donc donner au théorème VIII la forme suivante :

Les seules surfaces engendrées par une hélice circulaire dont les trajectoires orthogonales soient asymptotiques de la surface sont les hélicoïdes réglés, lieu des binormales à une hélice circulaire. Comme CAS LIMITE on trouve l'hélicoïde gauche à plan directeur pour lequel la seconde famille d'asymptotiques est formée précisément par les hélices circulaires coaxiales de la surface.

NOTE. — *Conditions pour que le polynome*

$$A \sin^3 \varphi + B \cos^3 \varphi + a \sin^2 \varphi \cos \varphi + b \sin \varphi \cos^2 \varphi \\ + a_1 \sin^2 \varphi + 2b_1 \sin \varphi \cos \varphi + c_1 \cos^2 \varphi + a_2 \sin \varphi + b_2 \cos \varphi + d$$

soit identiquement nul.

En exprimant que ce polynome est nul pour

$$\varphi = 0, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \pi, \quad \dots,$$

on trouve les conditions

$$a = B, \quad b = A, \quad a_1 = -A, \quad b_2 = -B, \quad a_1 = c_1 = -d, \quad b_1 = 0$$

et l'on s'assure qu'elles sont suffisantes.

On remarquera que cette condition impose aux termes du troisième degré d'être de la forme (λ et μ désignent des constantes) (1)

$$(\lambda \sin \varphi + \mu \cos \varphi)(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi),$$

condition qu'on pourrait trouver *a priori* et étendre à un degré quelconque.

De cette dernière remarque résulte la propriété suivante utilisée plus haut :

Si le polynome est de la forme

$$(a \sin \varphi + b \cos \varphi)^3 + P_2(\sin \varphi \cos \varphi),$$

a, b désignant deux constantes et P_2 un polynome en $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$ du deuxième degré au plus, on doit avoir

$$a = b = 0.$$

On étendrait aisément ce résultat aux polynomes de degré supérieur; cette remarque sera utilisée dans le Chapitre suivant.

CHAPITRE IV.

ÉQUATION AUX RAYONS DE COURBURE PRINCIPAUX.

SURFACES DONT LES HÉLICES GÉNÉRATRICES FORMENT UNE FAMILLE DE LIGNES A COURBURE TOTALE OU MOYENNE CONSTANTE.

1. ÉQUATION AUX RAYONS DE COURBURE PRINCIPAUX. — POSONS

$$(1) \quad \Delta_1 = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} + qC - rB & \frac{\partial \Lambda}{\partial \varphi} \end{array} \right| \Lambda,$$

$$(2) \quad \Delta_2 = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial t} + u + qz - r\gamma & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \end{array} \right| \Lambda,$$

$$(3) \quad \delta_1 = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} + qC - rB & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \end{array} \right| \Lambda,$$

$$(4) \quad \delta_2 = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial t} + u + qz - r\gamma & \frac{\partial \Lambda}{\partial \varphi} \end{array} \right| \Lambda,$$

(1) Ou des fonctions d'une variable indépendante autre que φ ; c'est ce cas que nous avons constamment rencontré dans ce Chapitre.

Même remarque pour les $A, B, \dots, d$.

formules dans lesquelles les termes entre barres verticales sont les termes de la première ligne d'un déterminant que nous avons représenté par cette notation réduite et dont la forme des autres lignes est évidente par symétrie. On a facilement

$$(5) \quad \Delta_2 = -H^2.$$

Cela posé, on démontre ⁽¹⁾ les formules (R' , R'' , rayons de courbure principaux)

$$(6) \quad \frac{1}{R'R''} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2 H^2} = -\frac{\Delta_1}{H^4},$$

$$(7) \quad \frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} = -\frac{\hat{\sigma}_1 + \hat{\sigma}_2}{H \Delta_2} = \frac{\hat{\sigma}_1 + \hat{\sigma}_2}{H^3},$$

$$(8) \quad R' + R'' = -H \frac{\hat{\sigma}_1 + \hat{\sigma}_2}{\Delta_1}.$$

Ces formules permettent d'écrire immédiatement l'équation qui donne R' et R'' . Cette écriture est sans utilité.

PROBLÈME I. — *Déterminer les surfaces telles que sur chaque hélice génératrice la courbure totale de la surface conserve une valeur constante, valeur qui peut d'ailleurs différer d'une génératrice à une autre.*

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'il existe une fonction de la seule variable t réalisant l'identité

$$(9) \quad \frac{1}{R'R''} = f(t),$$

ou, en vertu de la formule (6),

$$(10) \quad \Delta_1 - H^4 f(t) = 0.$$

Or Δ_1 ne contient pas de terme en φ de degré supérieur à 3.

Le terme en φ^2 , qui figure dans H^2 doit donc être identiquement nul, ce qui exige [en laissant de côté le cas des développables pour lesquelles $f(t)$ est identiquement nulle]

$$(10 \text{ bis}) \quad p = q = K' = 0.$$

⁽¹⁾ Cf. notre Mémoire *Applications*, etc..., première Partie, n° 12.

Mais alors, le premier membre de l'identité (10) ne contient plus que les lignes $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$, et prend la forme

$$(11) \quad \varphi^4 f(t) (u \cos \varphi + v \sin \varphi)^4 + \text{termes de degré inférieur à 4} = 0,$$

ce qui exige, le cas des développables étant écarté, $u = v = 0$.

La surface ainsi définie est un hélicoïde.

L'inverse étant évidemment vrai, nous pouvons énoncer les deux théorèmes suivants, dont le deuxième est un corollaire immédiat du premier :

THÉORÈME I. — *Les hélicoïdes sont les seules surfaces engendrées par des hélices circulaires formant une famille de courbes telles que, sur chacune d'elles, la courbure totale de la surface reste constante, cette valeur constante pouvant d'ailleurs différer d'une génératrice à l'autre.*

THÉORÈME II. — *Les hélicoïdes à courbure totale constante non nulle sont, parmi les surfaces engendrées par une hélice circulaire, les seules qui soient applicables sur la sphère ou sur la pseudo-sphère.*

L'analyse précédente laisse de côté le cas des développables au sujet duquel on a le théorème suivant :

THÉORÈME III. — *Les seules surfaces développables engendrées par une hélice circulaire sont :*

- 1° *Les hélicoïdes développables ;*
- 2° *Les cônes ou les cylindres ayant pour directrice une hélice circulaire.*

La condition caractéristique de ces surfaces est l'identité

$$\Delta_1 = 0.$$

Posons

$$(12) \quad \alpha = \frac{\partial A}{\partial t} + q C - r B, \quad \beta = \frac{\partial B}{\partial t} + r A - p C, \quad \gamma = \frac{\partial C}{\partial t} + p B - q A;$$

on peut écrire

$$(13) \quad K\Delta_1 = \begin{vmatrix} \alpha & \frac{\partial A}{\partial \varphi} & A \\ \beta & \frac{\partial B}{\partial \varphi} & B \\ K\gamma + \rho(\beta \cos \varphi - \alpha \sin \varphi) & K\frac{\partial C}{\partial \varphi} + \rho\left(\frac{\partial B}{\partial \varphi} \cos \varphi - \frac{\partial A}{\partial \varphi} \sin \varphi\right) & KC + \rho(B \cos \varphi - A \sin \varphi) \end{vmatrix} \\ \times \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

ou encore

$$(13 \text{ bis}) \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} \alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi \\ -\alpha \sin \varphi + \beta \cos \varphi \\ K\gamma + \rho(\beta \cos \varphi - \alpha \sin \varphi) \end{vmatrix} \\ \frac{\partial A}{\partial \varphi} \cos \varphi + \frac{\partial B}{\partial \varphi} \sin \varphi \quad A \cos \varphi + B \sin \varphi \\ \frac{\partial B}{\partial \varphi} \cos \varphi - \frac{\partial A}{\partial \varphi} \sin \varphi \quad B \cos \varphi - A \sin \varphi \\ K\frac{\partial C}{\partial \varphi} + \rho\left(\frac{\partial B}{\partial \varphi} \cos \varphi - \frac{\partial A}{\partial \varphi} \sin \varphi\right) \quad KC + \rho(B \cos \varphi - A \sin \varphi)$$

En remplaçant A, B, ... par leurs valeurs, il vient enfin

$$(14) \quad \Delta_1 = \frac{1}{K} \times \begin{vmatrix} \alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi & (\rho^2 + K^2)(p \cos \varphi + q \sin \varphi) + \rho K' - \rho' K & -(KL - N\rho) \\ -\alpha \sin \varphi + \beta \cos \varphi & \rho K' \varphi + (\rho^2 - K^2)(p \sin \varphi - q \cos \varphi) + \rho \omega - r \rho K & KM - N\rho \\ K\gamma + (\beta \cos \varphi - \alpha \sin \varphi)\rho & -\rho(KL - N\rho) & 0 \end{vmatrix}$$

qu'on peut écrire

$$(14 \text{ bis}) \quad K\Delta_1 = \zeta_0 \varphi^3 + \zeta_1 \varphi^2 + \zeta_2 \varphi + \zeta_3,$$

où les ζ sont des polynomes en $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$.

K n'étant pas supposé identiquement nul, l'identité $\Delta_1 = 0$ équivaut aux quatre suivantes :

$$\zeta_0 = \zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = 0.$$

Un calcul un peu long donne sans aucune difficulté

$$\zeta_1 = \rho^4 K^3 [pq \sin^2 \varphi + (p^2 - q^2) \sin \varphi \cos \varphi - pq \cos^2 \varphi]^2 + P_3,$$

en désignant par P_3 un polynome en $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$ de degré inférieur à 4.

Le terme du quatrième degré doit contenir en facteur

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi$$

ou être identiquement nul. Les termes du quatrième degré sont, à un facteur près, le carré du polynome

$$pq \sin^2 \varphi + (p^2 - q^2) \sin \varphi \cos \varphi - pq \cos^2 \varphi.$$

La première hypothèse conduit aux conditions

$$pq = -pq, \quad p^2 - q^2 = 0,$$

d'où

$$p = q = 0,$$

résultat auquel conduit aussi la seconde hypothèse.

Donc la surface cherchée doit être à plan directeur d'hélice.

Soient alors

$$(15) \quad \begin{cases} x = f_1(t) + \rho \cos \varphi, \\ y = f_2(t) + \rho \sin \varphi, \\ z = f_3(t) + K \varphi, \end{cases}$$

dans lesquelles ρ et K sont des fonctions de t les équations de la surface cherchée rapportée à des axes fixes évidents.

Nous formerons les déterminants D, D', D'' de Gauss et nous écrirons que l'expression $D'^2 - DD''$ est identiquement nulle. Il y aura intérêt pour la simplicité des calculs à distinguer deux hypothèses :

1. ρ est constant : Je me dispenserai de développer les calculs dans ce cas. La méthode est analogue à celle employée ci-après lorsqu'on suppose φ variable et d'application beaucoup plus simple. On obtient ainsi :

1° Le cylindre circulaire droit engendré par une hélice de pas fixe ou variable ;

2° Un cylindre quelconque engendré par la translation rectiligne d'une hélice circulaire indéformable.

II. Supposons alors ρ variable : Nous pouvons le prendre comme variable indépendante. Les équations (15) deviennent

$$(16) \quad x = f_1(\rho) + \rho \cos \varphi, \quad y = f_2(\rho) + \rho \sin \varphi, \quad z = f_3(\rho) + \rho K \varphi,$$

dans lesquelles K désigne une fonction de ρ .

Si K' n'est pas supposé nul, D , D' et D'' se présentent comme polynômes en φ , $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$ du premier degré en φ . On vérifie que D' ne contient pas de terme en φ .

Pour que l'identité

$$(17) \quad D'^2 - DD'' = 0$$

puisse être satisfaite, il faut donc que le coefficient de φ dans D ou dans D'' soit identiquement nul. S'il en est ainsi, mais qu'il ne soit pas également nul dans le second des déterminants D et D'' , il faut, pour que le terme en φ soit nul dans le premier membre de (17), que celui des deux déterminants D et D'' qui n'a pas de terme en φ soit identiquement nul. Mais alors D' doit être nul identiquement.

Une seconde hypothèse possible est celle où D et D'' sont tous deux dépourvus de terme en φ . Nous allons étudier successivement les deux hypothèses,

I. D' est identiquement nul ainsi que D ou D'' : D'une façon générale on a

$$D' = (K' \rho - K)(u \cos \varphi + v \sin \varphi + 1) \quad (u = f'_1, v = f'_2).$$

Pour qu'il soit identiquement nul, il faut et il suffit qu'on ait

$$(17 \text{ bis}) \quad K' \rho - K = 0.$$

Le coefficient de φ dans D est $K' \rho^2$. Il ne peut être nul que si K' est nul. On ne peut donc, en raison de la relation (17 bis) (puisque l'on suppose que K n'est pas identiquement nul), avoir à la fois identiquement

$$D = D' = 0.$$

Voyons si l'on peut avoir $D' = D'' = 0$; l'équation (17 bis) donne

$$(18) \quad K = a \rho \quad (a, \text{ const.})$$

et, d'autre part :

$$(19) \quad D'' = \begin{vmatrix} u' & v' & w' \\ u + \cos \varphi & v + \sin \varphi & w + a \varphi \\ -\rho \sin \varphi & \rho \cos \varphi & K \end{vmatrix}.$$

La disparition du terme en φ de ce déterminant exige $u' = v' = 0$,
ou

$$(20) \quad f_1(\rho) = \alpha_1 \rho + \beta_1, \quad f_2(\rho) = \alpha_2 \rho + \beta_2 \quad (\alpha_1, \dots, \beta_2, \text{const.})$$

et D'' se réduit alors au produit

$$w' \rho (u \cos \varphi + v \sin \varphi + 1)$$

qui ne peut s'annuler que si w' est nul, c'est-à-dire si

$$f_3(\rho) = \alpha_3 \rho + \beta_3 \quad (\alpha_3, \beta_3, \text{const.}).$$

La surface obtenue est visiblement un cône de sommet $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$.
Les équations peuvent se mettre sous la forme canonique (m et n
désignent deux nouvelles constantes arbitraires)

$$(21) \quad x = \rho(\cos \varphi + m), \quad y = \rho(\sin \varphi + n), \quad z = a \rho \varphi.$$

La base de ce cône dans un plan $z = \text{const.}$ est une spirale
hyperbolique.

II. Reste à examiner le cas où D et D'' sont dépourvus de termes
en φ . Cela exige, pour D ,

$$K' = 0 \quad \text{ou} \quad K = K_0.$$

Mais alors, D'' lui-même est dépourvu de terme en φ .

L'identité (17) devient

$$(22) \quad \rho [K_0(v \cos \varphi - u \sin \varphi) - w \rho] \\ \times [u'(K_0 v + K_0 \sin \varphi - w \rho \cos \varphi) \\ - v'(K_0 u + K_0 \cos \varphi + w \rho \sin \varphi) + w' \rho (u \cos \varphi + v \sin \varphi + 1)] \\ + K_0^2 (u \cos \varphi + v \sin \varphi + 1)^2 = 0.$$

En égalant à zéro les termes en $\sin \varphi$, $\cos \varphi$, et $\sin \varphi \cos \varphi$, on
obtient les trois égalités

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & -w \rho^2 (K_0 u' - w \rho v' + w' v \rho) - K_0^2 (u' v - v' u) u \rho + 2 K_0^2 v - K_0 u w' \rho^2 = 0, \\ \text{II.} \quad & -w \rho^2 (K_0 v' + w \rho u' - w' u \rho) + K_0^2 (u' v - v' u) v \rho + 2 K_0^2 u + K_0 v w' \rho^2 = 0, \\ \text{III.} \quad & K_0 \rho (u' v + v' u) - w \rho^2 (v v' - u u') - w' \rho^2 (v^2 - u^2) + 2 K_0^2 u v = 0. \end{aligned}$$

En égalant entre eux et au terme indépendant changé de signe les coefficients de $\sin^2 \varphi$ et $\cos^2 \varphi$, on obtient les deux relations

$$\begin{aligned} (A) \quad & -\rho(K_0 u' - w\rho v' + w'v\rho)K_0 u' + K_0^2 v^2 \\ & = \rho(-w\rho u' - K_0 v' + w'u\rho)K_0 v + K_0^2 u^2 \\ & = -K_0^2 + w'w\rho^3 + w\rho^2 K_0(u'v - v'u). \end{aligned}$$

La première des deux équations (A) peut s'écrire

$$(IV) \quad K_0(v^2 - u^2) + K_0\rho(vv' - uu') + w\rho^2(u'v + v'u) - 2\rho^2 w'uv = 0.$$

Considérons les quatre équations différentielles (I), (II), (III), (IV); elles admettent la solution

$$u = v = 0.$$

Les développements qui vont suivre montreront que c'est la seule; la dernière équation (A) donne alors

$$w'w\rho^3 = K_0^2.$$

Les conditions $u = v = 0$ jointes à celles trouvées antérieurement définissent un hélicoïde : la dernière ne doit donc pas différer de l'équation caractéristique des hélicoïdes développables; c'est bien ce que nous apprend le résultat déjà trouvé ailleurs ⁽¹⁾.

Tout revient donc à démontrer que le système (I) à (IV) admet comme seule solution

$$u = v = 0.$$

Prenons les inconnues auxiliaires U et V définies par les relations

$$(23) \quad U = uv, \quad V = v^2 - u^2.$$

Les équations (III) et (IV) prennent la forme suivante :

$$(III \text{ bis}) \quad K_0\rho U' - \frac{1}{2}w\rho^2 V' + \rho^2 w'V + 2K_0 U = 0,$$

$$(IV \text{ bis}) \quad w\rho^2 U' + \frac{1}{2}K_0\rho V' + K_0 V - 2\rho^2 w'U = 0.$$

Posons

$$(24) \quad a = \rho(K_0^2 + w^2\rho^2), \quad b = K_0\rho(w + w'\rho), \quad c = K_0^2 - \rho^3 w w'.$$

⁽¹⁾ Cf. le n° 6 de notre Mémoire *Contribution à la théorie des hélices* (*Revue du Génie militaire*, 1910).

Des équations (III *bis*) et (IV *bis*), on tire le système suivant :

$$(25) \quad aU' + bV + 2cU = 0, \quad \frac{a}{2}V' + cV - 2bU = 0,$$

qui sera vérifié dans tous les cas par tout système de solution des équations (III *bis*) et (IV *bis*) et lui sera d'ailleurs équivalent lorsque a ne sera pas nul.

En multipliant la première équation (25) par $4U$, la seconde par $2V$ et ajoutant, on obtient, entre U et V , la nouvelle relation, conséquence du système des équations (III *bis*) et (IV *bis*),

$$(26) \quad a(4UU' + VV') + 2c(4U^2 + V^2) = 0 \quad (1).$$

Multiplions l'équation (I) par $-v$, l'équation (II) par u , et ajoutons les résultats; nous obtenons l'équation

$$(I \text{ bis}) \quad K_0 \omega \rho^2 - \frac{1}{2} \omega^2 \rho^3 V' + (\omega \omega' \rho^3 - 2K_0^2) V \\ + 2K_0 \omega' \rho^2 U + 2K_0^2 \rho U(u'v - v'u) = 0.$$

En multipliant l'équation (I) par u , l'équation (II) par v et ajoutant, on obtient

$$(II \text{ bis}) \quad \frac{1}{2} K_0 \omega \rho^2 V' + \omega^2 \rho^3 U' - 2U(\omega \omega' \rho^3 - 2K_0^2) \\ + K_0 \omega' \rho^2 V + K_0^2 \rho V(u'v - v'u) = 0.$$

Les équations (I *bis*) et (II *bis*) seront toujours des conséquences des équations (I) et (II), ce qui suffira pour la suite, mais on remarquera en outre qu'elles leurs seront équivalentes dans tous les cas où $u^2 + v^2$ ne sera pas nul. L'élimination de $u'v - v'u$

(1) L'intégration de cette équation considérée comme définissant la fonction $4U^2 + V^2$ est immédiate, mais est inutile pour l'objet que nous avons en vue. Si l'on remarque que $4U^2 + V^2$ n'est autre que le carré de $u^2 + v^2$, l'équation (26) donne

$$(26 \text{ bis}) \quad V_1(aV_1' + 2cV_1) = 0,$$

en posant $V_1 = u^2 + v^2$.

L'équation (26 *bis*) se décompose en deux équations distinctes dont la solution est évidente.

entre les équations (I bis) et (II bis) conduit à la relation suivante :

$$(27) \quad K_0 w \rho^2 (U'V - V'U) - \frac{1}{2} w^2 \rho^3 (VV' + 4UU') \\ + (ww' \rho^3 - 2K_0^2) (V^2 + 4U^2) = 0,$$

à laquelle doivent satisfaire U et V.

Supposons maintenant $a \neq 0$, ce qui arrivera toujours, d'ailleurs, pour des génératrices réelles. On peut alors résoudre les équations (28) par rapport à U' et V' et l'équation (26) par rapport à $4UU' + VV'$; on obtient ainsi

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} U' = -\frac{b}{a} V - 2\frac{c}{a} U, \quad V' = -2\frac{c}{a} V + 4\frac{b}{a} U, \\ VV' + 4UU' = -2\frac{c}{a} (4U^2 + V^2); \end{array} \right.$$

en portant ces valeurs dans l'équation (27), celle-ci devient

$$(28 \text{ bis}) \quad (V^2 + 4U^2) \left[-K_0 w \rho^2 \frac{b}{a} + ww' \rho^3 - 2K_0^2 + \frac{w^2 \rho^3 c}{a} \right] = 0,$$

ou simplement, après remplacement de a, b, c par leurs valeurs

$$K_0 (V^2 + 4U^2) = 0;$$

comme nous laissons de côté le cas des surfaces cerclées, cette relation exige

$$(29) \quad V^2 + 4U^2 = 0,$$

et, si l'on s'en tient aux génératrices réelles,

$$U = V = 0,$$

et par suite

$$u = v = 0.$$

Il nous paraît intéressant, au point de vue analytique, d'achever complètement cette question, dans le cas où l'on admet la considération des génératrices imaginaires. Supposons d'abord encore $a \neq 0$.

L'équation (29) doit être satisfaite, ce qui exige qu'on ait

$$(30) \quad u^2 + v^2 = 0.$$

Supposons, pour fixer les idées,

$$(31) \quad v = ui.$$

Les équations (25) deviennent

$$(32) \quad \begin{cases} aiu' + (ci - b)u = 0, \\ au' + (c + bi)u = 0, \end{cases}$$

après suppression de la solution $u = 0$, qui conduit encore à des hélicoïdes.

Si le déterminant des équations (32) linéaires et homogènes en u et u' n'est pas nul, on est encore conduit à cette solution.

Le déterminant en question ayant pour valeur

$$ab(1 + i)$$

ne pourra être nul que si b est nul, puisqu'on suppose a différent de zéro.

Supposons donc b nul, c'est-à-dire

$$(33) \quad w + w'\rho = 0;$$

on a, dans ce cas,

$$(34) \quad c = \frac{a}{\rho} \neq 0$$

et l'une des deux équations (32) donne simplement

$$(35) \quad u' = -\frac{u}{\rho}.$$

Si, dans l'équation (1), on fait

$$(36) \quad v = ui, \quad u' = -\frac{u}{\rho}, \quad w'\rho = -w,$$

elle se réduit à la suivante

$$(37) \quad u(w\rho + k_0 i) = 0$$

qui entraîne encore $u = 0$ et, par suite, $v = 0$, la parenthèse ne pouvant être nulle si a n'est pas nul.

Il ne nous reste plus qu'à examiner ce qui arrive si l'on suppose a nul. Dans ces conditions, $\frac{da}{d\rho}$ l'est également, c'est-à-dire

que

$$w\rho' + w$$

est nul. Dans ce cas, b et c sont donc nuls. Les équations (25) disparaissent.

Supposons, pour fixer les idées,

$$(38) \quad \rho w = K_0 i.$$

En introduisant cette hypothèse dans les équations obtenues en égalant au dernier membre des équations (A) successivement chacun des deux premiers, on obtient les relations

$$(39) \quad \begin{cases} u^2 - uvi - v\rho' \rho = 2\rho u' v i, \\ v^2 - uvi - u\rho' \rho = 2\rho v' u i. \end{cases}$$

La même transformation, appliquée aux équations (I) et (II), conduit aux deux relations suivantes :

$$(40) \quad \begin{cases} -\rho u' i - \rho v' + v + u i = -\rho u(u'v - v'u), \\ -\rho v' i - \rho u' + u + v i = -\rho v(u'v - v'u). \end{cases}$$

Ces équations peuvent être considérées comme déterminant u' et v' en fonction de u et v . On obtient ainsi

$$(41) \quad u' = \frac{u}{\rho}, \quad v' = \frac{v}{\rho}.$$

Ces calculs ne seraient en défaut que si le déterminant de u' et de v' , dans les équations (40), est nul : ceci ne peut arriver que si u et v sont liés par la relation

$$(42) \quad u^2 + v^2 + 2uvi = 2.$$

Si on laisse de côté ce cas spécial, les équations obtenues en remplaçant, dans le système (39), u' et v' par leurs valeurs (41) exigent encore

$$u = v = 0.$$

La vérification de ce fait ne présente aucune difficulté.

Il ne reste donc plus qu'à examiner à quelles conclusions conduit l'hypothèse où u et v seraient liés par la relation (42), ρw étant, bien entendu, égal à $K_0 i$.

Ajoutons les équations (39) et différencions l'équation (42). On obtient ainsi les deux relations

$$(43) \quad \begin{cases} u^2 + v^2 - 2uv i = \rho(vv' + uu') + 2\rho i(uv' + u'v), \\ uu' + vv' + i(uv' + u'v) = 0, \end{cases}$$

d'où l'on déduit

$$(44) \quad u^2 + v^2 - 2uv i = -\rho(uu' + vv'),$$

qui, en tenant compte de (42), devient

$$2(u^2 + v^2 - 1) + \rho(uu' + vv') = 0,$$

d'où nous tirons

$$(45) \quad u^2 + v^2 - 1 = \frac{a_0}{\rho^2} \quad (a_0, \text{ const.})$$

et, en vertu de (42),

$$(46) \quad 2uv i = 1 - \frac{a_0}{\rho^2}.$$

Mais, dans le cas actuel, on obtient, en remplaçant, dans l'équation (III), w par sa valeur $\left(w = \frac{K_0 i}{\rho}\right)$,

$$(47) \quad \rho^2(u'v + v'u) + 2\rho uv - i[\rho^2(vv' - uu') + (v^2 - u^2)\rho] = 0.$$

Cette relation s'intègre immédiatement; si b désigne une constante arbitraire; son intégrale générale sera

$$(48) \quad \rho^2 \left[uv - \frac{i}{2}(v^2 - u^2) \right] = b_0.$$

On montre alors sans peine que les trois équations (45), (46) et (48), auxquelles doivent satisfaire u et v , ne sont compatibles pour aucune valeur des constantes a_0 et b_0 . Par suite, la supposition dont nous sommes partis, à savoir que les variables u et v étaient liées par l'équation (42), est incompatible avec les conditions de notre problème et, dans tous les cas, que les génératrices soient réelles ou imaginaires, on est conduit à la conclusion

$$u = v = 0.$$

PROBLÈME II. — *Déterminer la surface engendrée par une hélice circulaire et dont la courbure moyenne ne varie que lorsqu'on passe d'une hélice génératrice à une autre.*

Si l'on se reporte à l'expression que nous avons donnée pour la courbure moyenne, on voit que la condition nécessaire et suffisante pour que la surface étudiée jouisse de la propriété demandée est qu'il existe une fonction de t , $f(t)$, telle que l'on ait identiquement

$$(49) \quad \frac{\delta_1 + \delta_2}{H^3} = f(t).$$

Nous supposons d'abord que $f(t)$ ne soit pas identiquement nul, c'est-à-dire que nous laisserons de côté, pour le moment, les surfaces minima.

L'égalité précédente exige que H soit rationnelle en $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$. La surface demandée ne peut donc être que l'une de celles définies dans le premier problème exposé au Chapitre précédent.

Les hélicoïdes et le cylindre droit répondent évidemment à la question. Dans ce dernier cas, $f(t)$ se réduit à une constante.

Reste à examiner s'il en est de même pour les autres surfaces pour lesquelles H est rationnelle. Nous observons qu'elles sont à plan directeur et à pas constant. On en conclut, en introduisant les conditions correspondantes dans δ_1 et δ_2 , qu'on doit avoir identiquement

$$(50) \quad H^3 f(t) = P_2(\sin \varphi, \cos \varphi),$$

P_2 désignant un polynôme de degré inférieur à 3 en $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$.

Or, dans le cas actuel, H se réduit, à un facteur numérique près, à l'un des types

$$u \cos \varphi + v \sin \varphi \quad \text{ou} \quad u \sin \varphi - v \cos \varphi + \psi,$$

ψ désignant une fonction de t qu'il est inutile d'expliciter. Dans un cas comme dans l'autre, l'égalité (50) ne peut être satisfaite identiquement que si

$$u = v = 0.$$

La surface est donc nécessairement un hélicoïde. Nous pouvons donc énoncer les théorèmes suivants :

THÉORÈME IV. — *Les hélicoïdes et le cylindre droit sont les seules surfaces engendrées par une hélice circulaire et dont la courbure moyenne prend la même valeur en tous les points d'une génératrice, cette valeur pouvant d'ailleurs varier d'une génératrice à une autre ou rester constante, mais non nulle sur toute la surface.*

Les considérations précédentes laissent de côté les surfaces minima. La recherche de ces dernières fait l'objet du problème suivant :

PROBLÈME III. — *Déterminer les surfaces minima engendrées par une hélice circulaire.*

L'équation déterminant les surfaces cherchées est

$$(51) \quad \delta_1 + \delta_2 \equiv 0$$

que l'on met aisément sous la forme

$$(52) \quad \left\{ \begin{array}{l} Z_0 \varphi^3 + Z_1 \varphi^2 + Z_2 \varphi + Z_3 = 0 \\ (Z_0, \dots, Z_3, \text{ polynomes en } \sin \varphi \text{ et en } \cos \varphi), \end{array} \right.$$

équivalente à

$$(53) \quad Z_0 = Z_1 = Z_2 = Z_3 = 0.$$

On simplifie les écritures et les calculs en introduisant la relation $q \equiv 0$. L'équation $Z_0 = 0$ devient alors

$$(54) \quad (K' \rho + p K^2 \cos \varphi) (K'^2 + p^2 K^2) = 0.$$

Afin de ne pas allonger cette étude, nous nous bornerons à la considération des génératrices réelles. Celles-ci n'étant pas supposées dégénérées en des cercles, l'équation (54) donne

$$p = K' = 0.$$

Les surfaces répondant à la question seront engendrées par des

hélices à pas constant et à plan directeur. En la rapportant, comme dans le problème précédent, à des axes fixes, on est conduit à considérer deux cas : 1° le rayon du cylindre principal est constant : l'hélice est indéformable. Nous ne nous arrêterons pas à étudier ce cas, l'établissement des équations fondamentales étant en tous points semblables à ce qu'on fait dans le cas général et ces équations conduisant sans aucune difficulté au résultat suivant : *la seule surface minima engendrée par une hélice circulaire indéformable est l'hélicoïde gauche à plan directeur (ou, en ne considérant que les parties réelles : la surface engendrée est une couronne d'hélicoïde gauche à plan directeur. Cette remarque faite ici une fois pour toutes est applicable dans d'autres cas analogues).*

2° Le rayon ρ est variable : On peut le prendre comme variable indépendante. La surface étant alors définie par les équations (16) avec $K = K_0$, l'équation qui exprime qu'elle est minima est, avec les notations de Gauss,

$$(55) \quad DG + D''E - 2FD' = 0,$$

équation qui prend ici la forme

$$(56) \quad \mathfrak{A} \sin \varphi + \mathfrak{B} \cos \varphi + \mathfrak{C} = 0 \quad (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \text{ fonction de } \rho).$$

Cette équation équivaut à $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C} = 0$, ou

$$(57) \quad \left\{ \begin{array}{l} [K_0 u' - \rho(v'w - w'u) + 2vw](\rho^2 + K_0^2) + K_0 \rho u(u^2 + v^2 + w^2 - 1) = 0, \\ [K_0 v' + \rho(u'w - w'u) - 2uw](\rho^2 + K_0^2) + K_0 \rho v(u^2 + v^2 + w^2 - 1) = 0, \\ [K_0(u'v - v'u) + \rho w'](\rho^2 + K_0^2) + 2wK_0^2 + w\rho^2(u^2 + v^2 + w^2 + 1) = 0 \\ \left(u = \frac{df_1}{d\varphi}, \quad v = \frac{df_2}{d\varphi}, \quad w = \frac{df_3}{d\varphi} \right). \end{array} \right.$$

Telles sont les trois relations qui, jointes aux équations (16), (avec $K = K_0$), définissent toutes les surfaces minima engendrées par une hélice circulaire, réserve faite de la génération ci-dessus indiquée pour $\rho = \rho_0$.

J'ai intégré complètement le système (57) dans deux Notes parues dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris* les 27 novembre et 26 décembre 1911. Aussi ne reprendrai-je pas

en détail cette question, d'autant plus que je me propose de revenir avec tous les développements nécessaires ⁽¹⁾ : d'une part sur l'intégration d'un système d'équations différentielles à deux fonctions inconnues auquel appartient le système (6) (*C. R. Acad. Sc.*, du 27 novembre) et, d'autre part, sur l'étude spéciale de ces surfaces minima.

On est conduit au résultat suivant :

THÉORÈME. — *Si on laisse de côté la génération de l'hélicoïde gauche à plan directeur par ses deux systèmes d'hélices circulaires, les seules surfaces minima engendrées par les hélices circulaires sont définies comme il suit :*

1° *L'axe de l'hélice décrit un plan et reste parallèle à une direction fixe ;*

2° *Son pas reste constant ;*

3° *En prenant pour plan des $y = 0$ le plan décrit par l'axe de l'hélice, le centre de son cercle principal décrit la courbe définie par les équations*

$$(58) \quad X = \frac{1}{2} (I_1 + K_0^2 I_0)_{s_0}^s, \quad Z = \frac{1}{2} a K_0 (I_0 + K_0^2 J)_{s_0}^s$$

avec

$$(59) \quad \begin{cases} I_0 = \int \frac{ds}{\varepsilon \sqrt{P}}, & I_1 = \int \frac{s ds}{\varepsilon \sqrt{P}}, & J = \int \frac{ds}{\varepsilon s \sqrt{P}} \\ P = [s^2 + (K_0^2 + c - a^2)s - a^2 K_0^2] (s + K_0^2) \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \varepsilon = \pm 1 \\ a, c, \text{ const.} \end{array} \right).$$

(1) Voici les grandes lignes de la méthode employée pour cette intégration. On pose

$$u = \lambda \cos \theta, \quad v = \lambda \sin \theta$$

et des équations (57) on tire trois équations différentielles dont la première seule contient θ .

En faisant les substitutions

$$\Lambda = \lambda^2, \quad M_1 = \frac{\rho^2 \omega^2}{K_0^2},$$

puis $M_1 = \Theta \Lambda$, $\Lambda = \frac{1}{H}$.

1° On est ramené à résoudre une équation linéaire en $H + 0$ et une équation

Remarques. — 1° La variable s qui figure dans les formules (58) n'est autre que ρ^2 ;

2° Lorsqu'on fait $a = \infty$ on trouve une solution limite constituée par les hélicoïdes minima.

Nous ne nous étendrons pas longuement dans le présent Mémoire sur ces surfaces, que nous désignerons sous le nom de *surfaces M*; nous nous bornerons à rappeler les résultats suivants, déjà signalés (*C. R. Acad. Sc.*, 27 novembre 1911).

La courbe plane, lieu du centre du cercle principal, possède une inflexion qui en est aussi un centre, et deux asymptotes parallèles à Ox . Sa forme générale est celle de la courbe représentative des tangentes.

Si l'on fait $a = 0$, on retrouve une solution particulière signalée dans une Note que j'ai fait paraître dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (16 juillet 1907). Cette solution est constituée par toutes les surfaces Φ minima (¹).

Si l'on suppose $C = 0$, les intégrales figurant dans les formules (59) se réduisent aux fonctions élémentaires (²) et, avec un choix convenable de l'origine, l'équation du lieu du centre du cercle principal dans son plan ($x Oy$) est

$$(60) \quad Z = K_0 \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{x}{a}.$$

La surface dégénère alors en un hélicoïde gauche à plan directeur.

On peut, d'une façon générale, énoncer sur les surfaces (M) le théorème suivant :

THÉORÈME. — *La tangente de l'angle que fait avec l'axe de la génératrice d'une surface (M) la tangente au lieu de*

de Bernoulli en Θ . La première des équations en λ et θ donne $\theta' = 0$. Des autres on tire λ et ω .

2° On trouve en outre une solution définie par la seule condition $A - M_1 = 0$ à laquelle correspond l'hélicoïde gauche à plan directeur considéré comme engendré par un quelconque de ses systèmes d'hélices non coaxiales de la surface.

(¹) La courbe lieu des centres s'aplatit alors suivant une droite.

(²) Si l'on s'en tient aux éléments réels, c'est le seul cas, en dehors de la surface (M), qui est aussi une surface (Φ) définie par les égalités $a = K_0^2 + c = 0$.

son cercle principal est proportionnelle au carré du rayon de celui-ci.

C'est l'interprétation géométrique évidente de l'égalité

$$\frac{dz}{dx} = \frac{a K_0}{\varphi^2}.$$

CHAPITRE V.

CLASSIFICATION DES SURFACES ENGENDRÉES PAR UNE HÉLICE CIRCULAIRE.

Les études précédentes permettent d'établir le principe d'une classification naturelle des surfaces engendrées par une hélice circulaire. Elles mettent en évidence le rôle fondamental joué par la présence d'un plan directeur d'hélices, aussi bien dans les propriétés qui paraissent se lier, au premier abord, avec cette particularité que dans celles qui ne semblent pas, *a priori*, avoir un rapport intime avec elle. Cette remarque nous conduira à diviser ces surfaces en deux grandes classes : 1^o les surfaces à plan directeur; 2^o les surfaces sans plan directeur.

Comme second caractère d'importance considérable, nous choisirons la constance et la variabilité du pas. Ceci amène à séparer les surfaces de chaque classe en deux grandes familles. Dans chacune d'elles, la présence ou l'absence d'une enveloppe des génératrices déterminera des genres. Enfin, dans ceux-ci, les espèces se différencieront par divers caractères détaillés dans le Tableau synoptique qui termine ce Chapitre. La classification qui s'y trouve proposée repose sur les propriétés qui ont fait l'objet de cette étude. Il est évident que rien n'empêcherait de pousser la subdivision plus loin en introduisant la considération de propriétés nouvelles.

Tableau synoptique résumant la classe

CLASSES.	FAMILLE.	GENRES.
I. Surfaces à plan directeur d'hélices.....	A. Génératrice à pas constant	a. Génératrice ayant une
		b. Génératrice sans env
	B. Génératrice à pas variable.....	a. Génératrice ayant une
		b. Génératrice sans env
II. Surfaces sans plan directeur d'hélices.....	A. Génératrice à pas constant	a. Génératrice douée d'e
		b. Génératrice sans env
	B. Génératrice à pas variable.....	a. Génératrice douée d'e
		b. Génératrice sans env

Nota. — Nous avons signalé dans ce Tableau des variétés appartenant à plusieurs variétés cylindres circulaires, par exemple, peuvent être considérés comme cas li douées de définitions différentes peut conduire à des résultats intéressants.

ces engendrées par une hélice circulaire.

ESPÈCES.	
espèce; les surfaces (Γ) parmi sont à signaler les surfaces (C) ont aussi à l'espèce des surfaces Φ. coïdes.	L'hélicoïde gauche minima appartient aux deux espèces suivantes et, aussi, au genre précédent.
aces Φ (dont une variété admet veloppe : surf. (C). aces minima.	Ont une variété commune.
surfaces engendrées par une hélice rmable. aces générales de ce genre.	A noter dans cette série les surfaces W à plan direc- teur qui sont aussi des surfaces Φ.
as basées sur l'ordre du contact elope.	
es ou les cylindres projetant une circulaire quelconque.	
coïdes de seconde espèce.	Ont pour cas particulier les hélicoïdes; à signaler, parmi les hélicoïdes de seconde espèce, la surface de vis de seconde espèce.
aces générales de première classe.	
rice indéformable.	
rice déformable.	
rice indéformable.	A cette espèce appartiennent les ψ générales dont certaines variétés font aussi partie du genre pré- cédent.
rice déformable.	
as fondées sur l'ordre du con-	A signaler certaines surfaces Ξ particulières.
uérale : les caractères rencontrés e étude ne permettent pas d'in- de subdivision dans ce genre. aire, il faudrait s'adresser à d'au- riétés.	A signaler dans cette espèce les surfaces Ξ générales.

l. Il est à peine besoin de faire remarquer que ce ne sont pas les seules; ainsi, les
variétés des surfaces à plan directeur. La recherche de variétés communes à des séries

(²) Ueber eine Verallgemeinerung des Picardschen Satzes (Sitzungsberichte der Königlich. preussischen Akademie der Wissenschaften, Berlin, 1904, p. 1118-1133).

correspondante d'aucune dérivée. Si nous faisons n_1 dérivations successives, nous obtenons une équation qui, pour les valeurs $z_1 = 0$ et $u = \alpha_{10}$, devient

$$(7) \quad (u')^{n_1} \left(\frac{\partial^{n_1} F}{\partial u^{n_1}} \right)_{z_1=0, u=\alpha_{10}} + \left(\frac{\partial^{n_1} F}{\partial z_1^{n_1}} \right)_{z_1=0, u=\alpha_{10}} = 0.$$

Supposons que

$$(8) \quad \left(\frac{\partial^{n_1} F}{\partial z_1^{n_1}} \right)_{z_1=0, u=\alpha_{10}} \neq 0,$$

alors il doit en être de même de la valeur $\left(\frac{\partial^{n_1} F}{\partial u^{n_1}} \right)_{z_1=0, u=\alpha_{10}}$, parce que, dans le cas contraire, nous n'aurions pour $z_1 = 0$ et $u = \alpha_{10}$ aucune valeur finie de la dérivée u' et, par conséquent, il n'y aurait pas de branche de $u = \Phi(z)$ holomorphe dans le voisinage de $z_1 = 0$ et prenant pour $z_1 = 0$ la valeur α_{10} .

Or, nous avons

$$\left(\frac{\partial^{n_1} F}{\partial z_1^{n_1}} \right)_{z_1=0, u=\alpha_{10}} = (n_1)! (b_1 \alpha_{10}^{n-1} + b_2 \alpha_{10}^{n-2} + \dots + b_n) = (1.2.3 \dots n_1) q(\alpha_{10}),$$

et, par conséquent, l'hypothèse (8) est équivalente à l'hypothèse

$$(9) \quad q(\alpha_{10}) = b_1 \alpha_{10}^{n-1} + b_2 \alpha_{10}^{n-2} + \dots + b_n \neq 0.$$

Si nous posons

$$p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n,$$

le nombre α_{10} est une racine du polynome $p(x)$ et, par conséquent, notre hypothèse (9) consiste en ce que les polynomes $p(x)$ et $q(x)$ ne doivent avoir aucune racine commune. Avec cette hypothèse la valeur α_{11} sera tirée de l'équation (7) qui peut s'écrire

$$(10) \quad p^{(n_1)}(\alpha_{10})(u')^{n_1} + (1.2.3 \dots n_1) q(\alpha_{10}) = 0.$$

Nous en concluons que le nombre α_{11} ne dépend que de α_{10} et des nombres $n_1, a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots, a_n, b_n$ et n ; d'autre part, le nombre α_{10} étant une racine du polynome $p(x)$, ne dépend que des $n, a_1, a_2, \dots, a_n$; donc, le coefficient α_{11} ne dépend que des nombres $n, n_1; a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n$ [et nullement des autres coefficients des séries (5)], et il en est de même des coefficients analogues $\alpha_{21}, \alpha_{31}, \dots, \alpha_{m1}$: c'est-à-dire, le coeffi-

cient $\alpha_k (k = 1, 2, 3, \dots, m)$ ne dépend que des nombres $n, n_k; a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n$, tandis que les coefficients $\alpha_{10}, \alpha_{20}, \dots, \alpha_{m0}$, qui sont des racines du polynome $p(x)$, ne dépendent que des nombres $n, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$.

Nous sommes ainsi conduits à la conclusion que, si les polynomes $p(x)$ et $q(x)$ n'ont aucune racine commune, le rayon R indiqué dans le théorème I ne dépend que des nombres $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n; b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ des degrés ⁽¹⁾ $n_1, n_2, \dots, n_m$ des systèmes circulaires et du nombre n des branches de la fonction multiforme donnée.

Remarque. — Si nous désignons par z_1 et ζ deux valeurs de $\frac{1}{z^{n_1}}$, on aura $\zeta = z_1 r$, où r est une $n_1^{\text{ième}}$ racine de l'unité et, par conséquent, la première série (1) se transforme, au fond, par la substitution $\frac{1}{z^{n_1}} = \zeta = z_1 r$ à n_1 fonctions holomorphes :

$$\begin{aligned} \alpha_{10} + \alpha_{11} & z_1 + \dots, \\ \alpha_{10} + \alpha_{11} r_1 & z_1 + \dots, \\ \alpha_{10} + \alpha_{11} r_2 & z_1 + \dots, \\ \dots\dots\dots, \\ \alpha_{10} + \alpha_{11} r_{n_1-1} & z_1 + \dots, \end{aligned}$$

où les $1, r_1, r_2, \dots, r_{n_1-1}$, sont les n_1 racines de l'unité.

Donc aux n_1 branches du premier des systèmes circulaires (1) correspondent ces n_1 branches holomorphes en $z_1 = 0$ de la fonction $u = \Phi(z_1)$; c'est pour cela que l'équation (10) est du degré n_1 et donne, pour $z_1 = 0$ et $u = \alpha_{10}$, n_1 valeurs de la dérivée u' , qui sont les $n_1^{\text{ièmes}}$ racines d'un nombre.

Nous avons établi le théorème suivant :

THÉOREME II. — Soit $u = \varphi(z)$ une fonction algébrique et finie à n branches ⁽²⁾ dans le voisinage de $z = 0$, déterminée par

(1) Qui sont ici égaux aux degrés de multiplicité des racines du polynome $p(x)$, puisque nous avons

$$p^{(n_1)}(\alpha_{10}) \neq 0, \quad p^{(n_2)}(\alpha_{20}) = 0, \quad p^{(n_3)}(\alpha_{30}) = 0, \quad \dots, \quad p^{(n_m)}(\alpha_{m0}) = 0,$$

par suite de l'hypothèse (9).

(2) Si la fonction possède une infinité de branches, nous envisageons un nombre

généralisations du théorème de M. Picard (C. R. Acad. Sc., t. CXXI, 1905, p. 1213-1215)].

Les nombres $\alpha_{10}, \alpha_{20}, \alpha_{30}, \dots, \alpha_{m0}$ sont les racines du polynome $p(x)$ et le module des nombres $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31}, \dots, \alpha_{m1}$ est donné par la formule

$$|\alpha_{k1}| = \left| \sqrt[n_k]{\frac{(1.2.3\dots n_k) q(\alpha_{k0})}{p^{(n_k)}(\alpha_{k0})}} \right| \quad (k=1, 2, 3, \dots, m),$$

où $p^{(n)}(x)$ désigne la dérivée d'ordre n du polynome $p(x)$; on sait que les nombres $\varphi(\alpha_{k0}, \alpha_{k1})$ ne dépendent que du module de α_{k1} .

Il faut remarquer que notre théorème II est beaucoup plus intéressant que le premier, parce qu'il exprime le rayon R en fonction des nombres donnés $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n; n, n_1, n_2, \dots, n_m$, au lieu des nombres $\alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{20}, \alpha_{21}, \dots, \alpha_{m0}, \alpha_{m1}$ qui sont difficiles à trouver et exigent la connaissance des systèmes circulaires des branches qui se permutent autour du point $z=0$. On sait que la détermination des degrés de multiplicité des racines d'un polynome $p(x)$ est un problème élémentaire de l'Algèbre facile à résoudre, tandis que la détermination des systèmes circulaires ⁽¹⁾ se fait par une méthode de Puiseux qui est assez compliquée (Voir É. PICARD, *Traité d'Analyse*, t. II, p. 348-360).

Nous tenons ici à appeler l'attention du lecteur sur le fait que la méthode que nous avons suivie pour établir le théorème II nous a donné l'occasion d'obtenir le résultat suivant :

Soit $u = \varphi(z)$ une fonction algébrique et finie à n branches dans le voisinage de $z=0$, déterminée par l'équation

$$u^n + \Lambda_1(z)u^{n-1} + \Lambda_2(z)u^{n-2} + \dots + \Lambda_n(z) = 0,$$

$$\Lambda_1(z) = a_1 + b_1 z + \dots$$

$$\Lambda_2(z) = a_2 + b_2 z + \dots$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\Lambda_n(z) = a_n + b_n z + \dots$$

Si les polynomes

$$p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n,$$

$$q(x) = b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \dots + b_{n-1} x + b_n$$

⁽¹⁾ Pour les fonctions algébriques.

n'ont aucune racine commune, les branches qui, pour $z = 0$, prennent la même valeur forment un seul système circulaire : c'est-à-dire à chaque racine du polynôme $p(x)$ correspond un seul système circulaire formé par des branches dont le nombre est égal au degré de multiplicité de la racine.

4. Si la fonction donnée $u = \varphi(z)$ du théorème II est holomorphe, nous pouvons prendre $n = 1$ et nous aurons

$$p(x) = x + a_1, \quad q(x) = b_1;$$

il faut donc supposer $b_1 \neq 0$ pour que les polynômes $p(x)$ et $q(x)$ n'aient aucune racine commune et cela suffit évidemment. Nous retombons ainsi au théorème de M. Landau, qui se présente parfaitement comme cas particulier de notre théorème II correspondant à la valeur $n = 1$.

En terminant ce travail, je tiens à faire une comparaison de ces résultats avec les autres que j'ai publiés dans les *Comptes rendus* des séances de l'Académie des Sciences de Paris et les *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*.

Les théorèmes I et II de ce travail apportent au théorème de M. Landau une généralisation concernant seulement le point $z = 0$ qui peut être un point critique algébrique pour un ensemble fini de branches, tandis que les autres (publiés dans les *Comptes rendus* et les *Rendiconti*), apportent une généralisation plus étendue comme concernant tout le domaine, dans lequel on envisage les valeurs exceptionnelles, qui peut avoir des points critiques algébriques quelconques, mais elle est moins précise et moins fidèle à d'autres points de vue.

SUR LES ÉQUATIONS INTÉGRALES NON LINÉAIRES;

PAR M. G. BRATU.

I. Soit l'équation intégrale du premier ordre

$$(1) \quad \Phi[x, \varphi(x)] = \lambda \int_0^1 K(x, y) F[y, \varphi(y)] dy,$$

dans laquelle nous supposons le noyau $K(x, y)$ une fonction continue et les fonctions données $\Phi(x, z)$, $F(y, z)$ des séries entières en z pour $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 1$.

Soit, pour $\lambda = \lambda_0$, $\varphi = \varphi_0$ une solution de cette équation. En faisant $\lambda = \lambda_0 + \mu$, $\varphi = \varphi_0 + \psi$, la forme intégrale linéaire en ψ est

$$(2) \quad \Phi'(x, \varphi_0) \Psi(x) - \lambda_0 \int_0^1 K(x, y) F'(y, \varphi_0) \Psi(y) dy,$$

Φ' et F' désignant des dérivées par rapport à φ . Il y a trois cas à distinguer :

1° Si $\Phi'(x, \varphi_0) \not\equiv 0$ pour $0 \leq x \leq 1$, la solution $\varphi_0(x)$ sera de deuxième espèce.

2° Si $\Phi'(x, \varphi_0)$ admet des racines isolées dans l'intervalle $(0, 1)$, $\varphi_0(x)$ sera une solution de troisième espèce.

3° Si $\Phi'(x, \varphi_0) \equiv 0$ pour $0 \leq x \leq 1$, la solution $\varphi_0(x)$ sera de première espèce.

Dans le premier cas, le noyau de l'expression (2) peut se mettre sous la forme

$$(3) \quad K_{\varphi_0}(x, y) = K(x, y) F'[y, \varphi_0(y)] \frac{1}{\Phi'[x, \varphi_0(x)]}.$$

2. Si $\varphi = \varphi_0(x)$, finie pour $0 \leq x \leq 1$, annule l'expression $\Phi(x, \varphi)$, l'équation (1) admet pour $\lambda = 0$ la solution $\varphi = \varphi_0(x)$ de deuxième espèce. Comme la fonction déterminante de Fredholm $D(\lambda)$ formée avec le noyau (3) est égale à 1 pour $\lambda = 0$, il résulte d'après le théorème de Schmidt (1) que l'équation (1) admet une solution et une seule $\varphi(x, \lambda)$ se réduisant à $\varphi_0(x)$ pour $\lambda = 0$.

Ainsi le nombre des solutions de l'équation (1), régulières autour de $\lambda = 0$, est au moins égal au nombre des solutions finies de l'équation $\Phi(x, \varphi) = 0$.

Dans le plan de la variable imaginaire λ , en dehors de l'origine, on peut, après M. Schmidt, énoncer le théorème suivant :

Si l'équation (1) admet, pour $\lambda = \lambda_0$, la solution finie

(1) Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen (Math. Ann., t. LXV, 1908).

$\varphi = \varphi_0(x)$ et si le déterminant de Fredholm $D(\lambda)$ formé avec le noyau (3) est différent de zéro pour $\lambda = \lambda_0$ et $\varphi = \varphi_0$, l'équation (1) admet une solution et une seule $\varphi(x, \lambda)$, holomorphe en λ autour de λ_0 et se réduisant à $\varphi_0(x)$ pour $\lambda = \lambda_0$.

Si $D(\lambda)$ est nul pour $\lambda = \lambda_0$ et $\varphi = \varphi_0$, il y a ramification autour de λ_0 , et $\varphi_0(x)$ est une solution limite.

3. La forme particulière $K(x, y)A(x)B(y)$, sous laquelle se présente le noyau (3), nous permet de faire une remarque pour le cas où le noyau donné $K(x, y)$ serait *symétrique* et *défini*. Le noyau (3) est alors symétrisable et toutes ses constantes caractéristiques sont *réelles*. Donc si l'équation (1) admet une solution *finie* $\varphi_0(x)$ pour une valeur λ_0 en dehors de l'axe réel, cette solution est régulière autour de λ_0 .

Le théorème de M. Schmidt ne nous apprend rien sur les solutions de première et de troisième espèce. On peut remarquer que, si $\Phi(x, \varphi)$ est de premier degré en φ , toutes les solutions de l'équation (1) sont *de même espèce*.

4. Si $K(x, y) = 0$ pour $y > x$, on a l'équation du type de Volterra. Comme dans ce cas le noyau (3) n'admet aucune constante caractéristique, l'équation (1) ne peut pas admettre des solutions limites.

5. *Équations intégrales algébriques*. — C'est le cas des équations de la forme (1) dans lesquelles les fonctions Φ et F sont des polynômes en φ .

Soit, par exemple, l'équation

$$(4) \quad \varphi(x) = \lambda \int_0^1 K(x, y) P_n[y, \varphi(y)] dy + f(x),$$

dans laquelle

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^p X_i(x) Y_i(y)$$

et

$$P_n(y, \varphi) = A_0(y) + A_1(y)\varphi + \dots + A_n(y)\varphi^n.$$

En posant

$$t_i = \lambda \int_0^1 Y_i(y) P_n[y, \varphi(y)] dy,$$

la solution de l'équation (4) prend la forme

$$(5) \quad \varphi(x) = \sum_{i=0}^p X_i(x) t_i(\lambda) + f(x),$$

les fonctions $t_i(\lambda)$ étant les solutions du système d'équations algébriques

$$(6) \quad t_i = \lambda \int_0^1 Y_i(y) P_n \left[y, \sum_{j=0}^p X_j(y) t_j + f(y) \right] dy,$$

que nous appellerons *système implicite adjoint à l'équation intégrale (4)*.

Par suite :

1° Toute solution de l'équation (4) est *fonction algébrique de λ* .

2° Autour de $\lambda = 0$, *une solution et une seule est holomorphe*; elle s'annule pour $\lambda = 0$. *Toutes les autres branches ont $\lambda = 0$ comme pôle ou point critique d'ordre négatif*.

3° Pour $\lambda \neq 0$, l'équation (4) admet en général et au plus n^p solutions.

4° Toutes ces solutions n'admettent comme points singuliers $\lambda \neq 0$ que *des points critiques de deuxième ordre*, c'est-à-dire qu'autour de toute solution limite $\varphi_0(x)$ il y a *biramification*.

Comme les fonctions $t_i(\lambda)$ peuvent se mettre sous la forme $t_i = R_i(\lambda, \Lambda)$, R_i étant *rationnelle* en λ et Λ , et Λ représentant une *fonction algébrique* de λ ⁽¹⁾, l'expression (5) prend la forme

$$\varphi(x, \lambda) = \frac{F_1(x, \lambda, \Lambda)}{F_2(\lambda, \Lambda)},$$

F_1 et F_2 étant des polynomes entiers en λ et Λ .

6. Le cas de $p = \infty$ est beaucoup plus difficile, car on a à résoudre un nombre infini d'équations implicites à une infinité d'inconnues.

M. R. d'Adhémar ⁽²⁾, en employant la méthode de M. E. Picard,

⁽¹⁾ E. PICARD, *Traité d'Analyse*, t. III, p. 53 et 470.

⁽²⁾ R. D'ADHÉMAR, *Les fonctions implicites en nombre infini et l'équation intégrale non linéaire* (Bull. Soc. math., 1908, p. 195).

a démontré l'existence d'une solution holomorphe autour de $\lambda = 0$. Nous l'avons démontrée dans un cas plus général à l'aide des majorantes ⁽¹⁾.

7. *Équations intégrales transcendentes.* — Soit l'équation avec un noyau de M. Goursat

$$(7) \quad \varphi(x) = \lambda \int_0^1 \sum_{i=1}^p A_i(x) B_i(y) F[\varphi(y)] dy,$$

dans laquelle $F(\varphi)$ est une fonction *entière* en φ . Sa résolution se réduit à celle du système implicite adjoint

$$(8) \quad \begin{cases} t_i = \lambda \int_0^1 B_i(y) F[A_1(y)t_1 + A_2(y)t_2 + \dots + A_p(y)t_p] dy \\ (i = 1, 2, \dots, p). \end{cases}$$

Si, pour $\lambda = \lambda_0$, ce système admet les solutions $t_1^0, t_2^0, \dots, t_p^0$ et si le jacobien correspondant $D(\lambda, t_1, t_2, \dots, t_p)$ est différent de zéro pour ces valeurs, le système (8) admet des solutions $t_1, t_2, \dots, t_p$ régulières autour de $\lambda = \lambda_0$. Or, si l'on désigne par F'_φ la dérivée de $F(\varphi)$ et si l'on pose

$$X_i = A_i, \quad Y_i = B_i F'_\varphi(A_1 t_1 + A_2 t_2 + \dots + A_p t_p),$$

d'après un calcul de M. Goursat ⁽²⁾ dans le cas de l'équation de Fredholm, on trouve comme jacobien le polynôme intégral

$$\begin{aligned} D(\lambda, t_1, t_2, \dots, t_p) \\ = \sum (-1)^{p-\nu} \frac{\lambda^\nu}{\nu!} \int_0^1 \dots \int_0^1 K \begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_\nu \\ x_1, x_2, \dots, x_\nu \end{pmatrix} \prod_{i=1}^\nu F'_\varphi[\varphi(x_i)] dx_1 \dots dx_\nu \end{aligned}$$

qui n'est que le déterminant de Fredholm correspondant au noyau $K(x, y) F'_\varphi[\varphi(y)]$. On retrouve ainsi, dans ce cas, le théorème de M. Schmidt.

⁽¹⁾ G. BRATU, *Sur l'équation intégrale exponentielle* (C. R. Acad. Sc., 18 avril 1911).

⁽²⁾ E. GOURSAT, *Sur un cas élémentaire de l'équation de Fredholm* (Bull. de la Soc. math. de France, t. XXXV, 1907, p. 163).

SUR LES LIGNES SINGULIÈRES
DE CERTAINES FONCTIONS ANALYTIQUES;

PAR M. G. JULIA.

Depuis Hermite, on sait qu'il existe des fonctions analytiques dont le prolongement est impossible au delà d'une certaine courbe L . Lorsque cette courbe est fermée, la fonction définie au sens de Weierstrass, à l'extérieur ou à l'intérieur de L , présente un espace lacunaire qui est, soit l'intérieur, soit l'extérieur de la courbe L .

M. Picard (*C. R. Acad. Sc.* du 21 mars 1881) et, dans un autre ordre d'idées, M. Goursat (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2^e série, t. XI et XVII) et Poincaré dans deux Mémoires, insérés l'un aux *Acta Societatis Scientiarum Fennicæ*, t. XIII, l'autre dans l'*American Journal of Mathematics*, ont donné des moyens de former très simplement des fonctions analytiques admettant pour coupures des lignes données arbitrairement dans des conditions déjà très générales.

Plus tard, dans un Mémoire paru au Tome XLII des *Mathematische Annalen*, M. Pringsheim est revenu sur cette question, mais en l'envisageant d'un point de vue différent. Son but était de former des fonctions analytiques admettant certaines lignes données pour coupures, tout en restant finies, continues ainsi que leurs dérivées, sur ces coupures.

Voici, en résumé, la méthode de M. Pringsheim :

Soit L la ligne donnée, considérons d'un côté de cette ligne un ensemble dénombrable E de points dont les affixes seront représentés par a_n . Cet ensemble admet L pour ensemble dérivé, sans cependant qu'il y ait des points a_n sur L ⁽¹⁾.

(¹) M. Pringsheim envisage en Note le cas où les a_n seraient denses dans une portion du plan, mais il suppose alors que cette aire est bordée par une courbe sur laquelle les a_n sont denses (tout comme dans les exemples fournis par Poincaré et M. Goursat).

Prenons une série absolument convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_n,$$

et formons la série

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda_n}{a_n - z}.$$

Elle converge en tout point z qui n'appartient ni à E , ni à son dérivé L et dans toute région qui ne contient pas de points a_n elle définit une fonction analytique. En particulier du côté de L où ne sont pas les a_n , la série définit une fonction qui, d'après M. Pringsheim, n'est pas prolongeable analytiquement au delà de L . Moyennant des restrictions tout intuitives sur la grandeur des Λ_n , M. Pringsheim démontre que la fonction dont il s'agit reste finie, continue, ainsi que ses dérivées sur L .

Je ne reviendrai pas sur les objections qu'a faites M. Borel dans sa Thèse, à la démonstration de M. Pringsheim; cette démonstration suppose, en effet, qu'il y a identité entre les fonctions que définit la série de part et d'autre de L ; cette supposition est toute gratuite, comme l'a montré M. Borel, par des exemples simples. Ultérieurement, dans le Tome XLIV des *Mathematische Annalen*, M. Pringsheim a justifié ses conclusions pour un cas très particulier de distribution de pôles a_n , présentant une symétrie parfaite autour du centre d'un cercle qui joue le rôle de la ligne L .

Les cas où les a_n sont denses partout d'un côté de la ligne L , n'a été examiné jusqu'ici qu'en supposant ces a_n denses aussi sur L . Si l'on écarte cette dernière supposition, peut-on affirmer que L est une coupure pour la fonction que définit la série

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda_n}{a_n - z},$$

du côté de L où ne sont pas les a_n .

Chaque terme de la série $f(z)$ admet un pôle; mais ces pôles, partout denses, ne se compensent-ils pas? Dans les lignes qui suivent, nous allons reconnaître comment pourrait se faire cette compensation. Nous verrons qu'en général elle ne se produit pas, donc L est une coupure; enfin nous formerons un exemple simple,

où nous démontrerons rigoureusement que L est bien une coupure, et, avec cet exemple, en appliquant les considérations qu'emploie M. Pringsheim dans le Tome XLII des *Mathematische Annalen*, on obtiendra une fonction qui admet L pour ligne singulière essentielle, tout en jouissant sur L des propriétés de continuité indiquées.

I.

Dans ce qui suit nous faisons un constant usage de la proposition suivante démontrée par M. Goursat :

Si les points a_n sont distribués sur une série de lignes Λ (la distribution étant dense sur ces lignes), telles que par chaque point a_n de ces lignes, on puisse faire passer un cercle laissant toutes les lignes Λ à son extérieur, la fonction analytique définie par la série

$$(1) \quad f(z) = \sum \frac{A_n}{a_n - z}$$

admet les lignes Λ pour coupure.

La démonstration s'appuie principalement sur le fait suivant :

Si l'un des pôles a_i est sur la circonférence d'un cercle c , les autres pôles étant quelconques à l'extérieur de c et si l'on forme la série de Taylor procédant suivant les puissances de $z - \alpha$ (α affixe du centre C), relative à la série (1), cette série admet C pour cercle de convergence.

Ceci étant posé, envisageons les pôles a_n situés d'un côté de L et formant un ensemble dense, et formons la série

$$(1) \quad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{a_n - z}$$

dans les conditions indiquées où $\sum |A_n|$ converge. Elle converge uniformément dans tout aire A ne contenant aucun a_n . Dans cette aire A , on peut donc la définir par une série de Taylor et ses prolongements. Il est facile de former la série de puissances relative à (1) et à un point α pris dans A . Nous pouvons toujours supposer par un déplacement des axes Ox , Oy que α est l'origine ($\alpha = 0$), la

série de Taylor relative à (1) est alors

$$(2) \quad \sum_{k=0}^{\infty} v_k z^k,$$

avec

$$v_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda_n}{a_n^{k+1}}.$$

Nous sommes sûrs que le cercle de convergence de (2) est au moins le plus grand cercle C de centre α qui ne coupe pas L. Ce cercle C a au moins un point commun avec L, et si l'on suppose que α est assez voisin de L (ce qu'on peut toujours supposer quand on examine si une fonction est prolongeable au delà de L). C pourra être supposé n'avoir qu'un point commun β avec L. Notre problème est de chercher si β est effectivement un point singulier de la série (2).

Dans l'ensemble des pôles a_n , choisissons une suite infinie de points, admettant β pour point limite, par le procédé suivant. Prenons un pôle au hasard, parmi les a_n , appelons-le a_{11} . Joignons-le à β . Choisissons ⁽¹⁾ un deuxième pôle a_{12} ($\overline{a_{12}\beta} < \overline{a_{11}\beta}$). Joignons $a_{12}\beta$ et, dans l'angle de $\overline{a_{12}\beta}$ avec la droite $\overline{a_{11}a_{12}}$ prolongée, choisissons a_{13} ($\overline{a_{13}\beta} < \overline{a_{12}\beta}$), continuons ce processus indéfiniment ($a_{1,i+1}$ sera pris dans l'angle que fait $\overline{a_{1i}\beta}$ avec $\overline{a_{1,i-1}a_{1i}}$ prolongée, et $\overline{a_{1,i+1}\beta} < \overline{a_{1i}\beta}$) en astreignant toutefois la distance $a_{1i}\beta$ à tendre vers zéro quand i croît indéfiniment, et tous les $a_{1i}\beta$ à être situés d'un même côté d'une certaine droite βt que l'on choisira comme on voudra dirigée du côté des a_n (βt pourra être par exemple la tangente à C) (fig. 1). Notre suite sera formée des pôles $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1i}, \dots$.

Dans la série (1) qui est absolument et conformément convergente dans Λ , j'isole les termes dont les pôles sont $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1i}, \dots$; j'obtiens la série

$$\varphi(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Lambda_{1i}}{a_{1i} - z}$$

(1) Toutes ces constructions sont possibles, car les a_n forment un ensemble dont tous les points de L sont des points limites.

dont la série de Taylor relative à z est

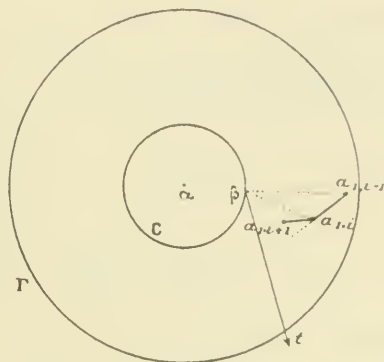
$$(3) \quad \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^k$$

avec

$$u_k = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Lambda_{1i}}{a_{1i}^{k+1}}.$$

Il est facile de voir que le cercle de convergence Γ de la série (3) est précisément le cercle C . Si en effet, il était plus grand que C , il comprendrait β à son intérieur. Donc à partir d'une valeur de i assez grande, tous les a_{1i} seraient intérieurs à ce cercle Γ (fig. 1).

Fig. 1.



Mais d'après le choix des a_{1i} on peut tracer un cercle γ qui passe par a_{1i} , qui soit tout entier intérieur à Γ et qui laisse tous les a_{1j} à son extérieur, sauf a_{1i} . On pourra par exemple prendre un cercle tangent en a_{1i} à $\overline{a_{1i}a_{1,i-1}}$ du côté opposé à β par rapport à $\overline{a_{1i}a_{1,i-1}}$.

Ce cercle γ serait le cercle de convergence du développement de $\varphi(z)$ suivant les puissances de $z - z'$ (z' affixe du centre de γ) et ceci est absurde puisque γ devrait être au moins tangent intérieurement à Γ .

Donc C est bien le cercle de convergence de la série (3)

Pour trouver le cercle de convergence de la série (2) relative à

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda_n}{a_n - z},$$

il paraît naturel de comparer les séries (2) et (3).

On voit que

$$v_k = u_k + w_k.$$

Qu'est-ce que w_k ? Si après avoir fait dans les a_n le choix des a_{1i} nous appelons a'_n les a_n qui restent et Λ'_k les numérateurs correspondants,

on a

$$f(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\Lambda_{1i}}{a_{1i} - z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda'_n}{a'_n - z},$$

donc

$$w_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda'_n}{a'^{k+1}_n}.$$

Le rayon de convergence de la série (2) est, comme on sait, égal à $\frac{1}{\varphi}$, φ étant la plus grande des limites de

$$|v_k|^{\frac{1}{k}};$$

or

$$v_k = u_k \left(1 + \frac{w_k}{u_k} \right).$$

Donc

$$|v_k|^{\frac{1}{k}} = |u_k|^{\frac{1}{k}} e^{\frac{1}{k} \log \left| 1 + \frac{w_k}{u_k} \right|}.$$

Soit φ_1 la plus grande limite de $|u_k|^{\frac{1}{k}}$; le cercle C, cercle de convergence de

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k z^k,$$

a pour rayon $\frac{1}{\varphi_1}$.

On peut donc trouver (d'une infinité de façons) une suite d'entiers $k_1, k_2, \dots, k_p, \dots$, telle que $|u_{k_p}|^{\frac{1}{k_p}}$ tende vers φ_1 . Considérons les valeurs correspondantes de $\frac{w_{k_p}}{u_{k_p}}$; si l'ensemble des points qui, dans un plan, ont pour affixes ces nombres $\frac{w_{k_p}}{u_{k_p}}$, a un point limite distinct du point (-1) , on pourra trouver, dans la suite $k_1, \dots, k_p, \dots$, une suite $K_1, K_2, \dots, K_p, \dots$ telle que $\log \left| 1 + \frac{w_{K_p}}{u_{K_p}} \right|$

tende vers une limite *finie* [ou égale à $+\infty$ si le point à l'infini est un point limite de la suite des points $\frac{w_{k_p}}{u_{k_p}}$]. Dans ce cas, la plus grande limite de $|v_k|^{\frac{1}{k}}$ sera au moins égale à celle de $|u_k|^{\frac{1}{k}}$ puisque $e^{\frac{1}{k} \log \left| 1 + \frac{w_k}{u_k} \right|}$, pour les valeurs de k égales à $k_1, \dots, k_p, \dots$, tendra vers l'unité (ou sera à partir d'une certaine valeur de p supérieur à un).

On en conclut que

$$\rho \geq \rho_1.$$

Donc

$$\frac{1}{\rho} \leq \frac{1}{\rho_1}.$$

Le cercle de convergence de la série (2) est donc intérieur à C ou coïncide avec C . Comme on sait qu'il est au moins égal à C , on conclut que C est bien le cercle de convergence de la série (2), dont β est un point singulier. Si ceci a lieu pour tout point β de la ligne L , on est sûr que L est une coupure pour la fonction analytique que définit la série (2) dans A .

Dans le cas où pour toute suite $k_1, k_2, \dots, k_p, \dots$ telle que $|u_{k_p}|^{\frac{1}{k_p}}$ tende vers ρ_1 les points $\frac{w_{k_p}}{u_{k_p}}$ admettraient pour *seul* point limite le point (-1) , nous ne pouvons rien affirmer, car $\log \left| 1 + \frac{w_k}{u_k} \right|$ tend alors vers $-\infty$, et nous ne savons pas si le facteur exponentiel dans $|v_k|^{\frac{1}{k}}$ tend vers l'unité.

Nous sommes ici dans le cas où la compensation signalée au début pourrait se produire, mais nous ne pouvons décider si elle se produit effectivement. (Si la circonstance précédente ne se rencontrait qu'en des points isolés de la ligne L ou même en des points formant un ensemble n'ayant qu'un nombre fini de points limites, on pourrait encore affirmer que L est une coupure.)

Cependant nous pouvons concevoir que ce cas de compensation serait très particulier. Car, si l'on admet un instant qu'il se produise, il suffira de multiplier tous les Λ_n par un même nombre arbitraire ⁽¹⁾ (ce qui n'altère pas la convergence absolue de la série des Λ_n), pour multiplier u_k par ce nombre. Les w_k n'étant

⁽¹⁾ Ce nombre pourrait être de la forme e^{λ} , en sorte que les modules des Λ_n ne seraient pas altérés.

pas changés, l'ensemble des $\frac{w_{k_p}}{u_{k_p}}$ avait un point limite distinct de (-1) et, par suite, la compensation ne se produirait plus.

Ce simple fait montre que l'ensemble de points $\frac{w_{k_p}}{u_{k_p}}$ n'aura pas en général le seul point -1 pour point limite; dans w_{k_p} ne figurent en effet que les pôles a'_n et les numérateurs correspondants A'_n , dans u_{k_p} ne figurent que les a_{1i} et les numérateurs correspondants A_{1i} , et l'on ne suppose aucune relation particulière entre ces diverses quantités, quand on dit qu'on envisage le cas général.

En définitive, si l'on se place dans le cas où il n'y a aucune relation particulière entre les pôles et les numérateurs des fractions correspondantes qui servent à former la fonction $f(z)$, la ligne L est bien une coupure pour la fonction que définit la série de Taylor (2) dans l'aire A.

Les considérations précédentes sont nécessairement un peu vagues; mais un cas particulier étant donné, la méthode précédente nous fournit un moyen, tout au moins théorique, pour étudier si la ligne L est dans ce cas une ligne singulière. Le principe de la méthode, qui est de comparer la série (2) à une série (3) dont on est sûr qu'elle admet le point β pour point singulier, pourra s'adapter à des circonstances variées, puisque le choix des a_{1i} qui servent à former (3) comporte un degré notable d'arbitraire. Dans certains cas, le choix des a_{1i} sera particulièrement simple : c'est par exemple celui où les pôles a_n seraient les sommets d'un réseau de courbes analogues aux mailles d'un filet carré, l'une des deux familles de courbes coupant la ligne L en une infinité dénombrable de points partout denses sur L (on prendrait pour a_{1i} les pôles situés sur une des courbes de la famille coupant L).

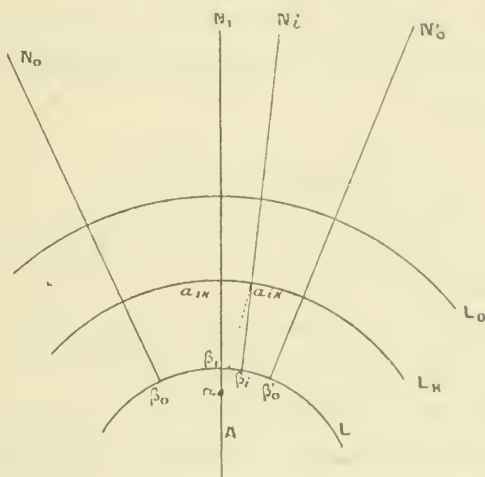
Notons en passant que la méthode s'applique aussi bien à un ensemble non dense de points a_n admettant pour dérivé la seule ligne L. Cette méthode a cependant le même inconvénient que les critères de convergence ordinaires des séries. Elle nous permet d'affirmer dans certains cas que L est une coupure, mais elle ne nous donne pas toujours une réponse précise.

II.

Laissons de côté ces généralités et montrons comment on peut appliquer la méthode exposée plus haut à un exemple simple.

Prenons une courbe fermée L ayant en chaque point un rayon de courbure déterminé (sauf peut-être en un nombre fini de points). Sur cette courbe, choisissons arbitrairement un ensemble dénombrable de points partout dense que nous dénommerons $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_i, \dots$. Par chacun de ces points, élevons une normale à L vers l'extérieur. Sur l'une de ces normales $\beta_i N_i$, choisissons arbitrairement un ensemble dénombrable de points ayant β_i pour point limite. Cet ensemble pourra être dense sur $\beta_i N_i$ ou non, je suppose seulement que β_i soit un point limite de l'ensemble. Dénommons ces points $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ik}, \dots$. Pour chacun des a_{ik} envisageons la courbe L_k parallèle à L . Cette courbe L_k rencontre chaque normale $\beta_j N_j$ en un point correspondant à a_{ik} que nous appellerons a_{jk} (fig. 2). Nous avons ainsi formé un ensemble de

Fig. 2.



points a_{ik} ($i, k = 1, 2, \dots$) qui admet tous les points de la ligne L pour points limites (nous supposons, bien entendu, que $a_{i1}, a_{i2}, \dots$ sont choisis tels qu'aucun des pôles ne tombe dans A , ce qui pourrait arriver avec une courbe L non partout convexe). Affectons chaque a_{ik} d'un coefficient Λ_{ik} tel que la série double

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \Lambda_{ik}$$

soit *absolument* convergente.

Formons la série

$$(1) \quad f(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Lambda_{ik}}{a_{ik} - z};$$

dans l'aire A limitée par L cette série définit une fonction holomorphe; à quelles conditions sera-t-il certain que L est une coupure pour cette fonction ?

Nous savons que si tous les β_i sont des points singuliers de cette fonction, L est bien une coupure.

Il suffit donc de voir dans quelles conditions β_1 par exemple est sûrement un point singulier. Prenons dans A sur la normale $\beta_1 N_1$, un point α que nous pouvons supposer assez voisin de β_1 pour que les conditions suivantes soient vérifiées :

Pour tous les pôles a_{ik} compris : 1° entre deux des normales $\beta_0 N_0$, $\beta'_0 N'_0$ suffisamment voisines de $\beta_1 N_1$ et de part et d'autre de $\beta_1 N_1$; 2° entre L et l'une L_0 des lignes L_k suffisamment voisine de L , on a

$$|a_{ik} - \alpha| > |a_{1k} - \alpha|.$$

Comme nous avons supposé qu'en chaque point de L il y avait un rayon de courbure fini, ceci est toujours possible.

Nous pouvons écrire

$$f(z) = \varphi(z) + \psi(z),$$

$\varphi(z)$ étant la partie de $f(z)$ relative aux pôles a_{ik} compris dans les limites indiquées plus haut.

La fonction $\psi(z)$ est holomorphe dans l'aire A , plus l'aire qu'occupent les pôles a_{ik} entrant dans $\varphi(z)$.

Formons la série de Taylor procédant suivant les puissances de $z = \alpha$, qui correspond à $f(z)$: c'est la somme des séries correspondant à φ et ψ . Si dans certaines conditions nous montrons que β_1 est point singulier pour la série de Taylor de φ , ce sera un point singulier pour la série de Taylor de f . Nous nous bornons donc à $\varphi(z)$, ce qui revient à dire que nous supposons, quels que soient ik ,

$$|a_{ik} - \alpha| > |a_{1k} - \alpha|.$$

Prenons

$$\varphi(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{ik}}{a_{ik} - z}.$$

Posant

$$f_i(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{ik}}{a_{ik} - z},$$

on a

$$\varphi(z) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(z) = f_1(z) + \sum_{i=2}^{\infty} f_i(z),$$

Nous pouvons supposer que α est l'origine, puisque ce sont seulement les quantités $a_{ik} - z$ qui interviennent.

Le cercle de convergence de chaque série $f_i(z)$ passe par le point β_i , ainsi qu'il résulte du théorème démontré par M. Goursat. Nous pouvons donc sans inconvénient supprimer dans $\varphi(z)$ un nombre fini d'indices i à partir du deuxième jusqu'à l'indice 1; si la série $\pi(z)$ restante possède β_1 pour point singulier, la série totale $f(z)$ le possédera aussi.

Considérons la série

$$\pi(z) = f_1(z) + \sum_1^{\infty} f_i(z).$$

Sa série de Taylor est

$$\pi(z) = \sum u_n z^n,$$

où

$$u_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Lambda_{1k}}{a_{1k}^{n+1}} + \sum_1^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Lambda_{ik}}{a_{ik}^{n+1}}.$$

Posons

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Lambda_{1k}}{a_{1k}^{n+1}} = v_n, \quad f_1(z) = \sum v_n z^n.$$

D'après nos hypothèses, toutes les séries simples ou doubles qui figurent ici sont absolument convergentes. Donc, on peut écrire

$$u_n = v_n + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_1^{\infty} \frac{\Lambda_{ik}}{a_{ik}^{n+1}}.$$

Or

$$|a_{ik}| > |a_{1k}|$$

(car α est supposé être l'origine). Donc

$$\frac{|\Lambda_{ik}|}{|a_{ik}|^{n+1}} < \frac{|\Lambda_{ik}|}{|a_{1k}|^{n+1}}$$

quels que soient i et k :

$$\left| \sum_1^{\infty} \frac{\Lambda_{ik}}{a_{ik}^{n+1}} \right| < \sum_1^{\infty} \left| \frac{\Lambda_{ik}}{a_{ik}^{n+1}} \right| < \sum_1^{\infty} \frac{|\Lambda_{ik}|}{|a_{1k}|^{n+1}}.$$

Supposons alors que, ε étant un nombre positif donné arbitrairement, l'on puisse déterminer un nombre l assez grand pour que l'on ait, *quel que soit* k ,

$$\sum_1 |A_{ik}| < \varepsilon |A_{1k}|$$

[c'est ce nombre l que nous choisissons pour figurer dans $\pi(z)$].

Nous reviendrons plus loin sur cette restriction imposée aux A_{ik} .

On a dans ces conditions

$$\left| \sum_1^{\infty} \frac{A_{ik}}{a_{ik}^{n+1}} \right| < \varepsilon \frac{|A_{1k}|}{|a_{1k}^{n+1}|},$$

ce que nous pouvons écrire

$$\sum_1^{\infty} \frac{A_{ik}}{a_{ik}^{n+1}} = \frac{A_{1k}}{a_{1k}^{n+1}} \varepsilon_{kn},$$

ε_{kn} étant un nombre complexe dépendant de k et de n , tel en outre que

$$|\varepsilon_{kn}| < \varepsilon,$$

quels que soient k et n .

Ceci étant, on a

$$\frac{u_n}{v_n} = 1 + \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{1k}}{a_{1k}^{n+1}} \varepsilon_{kn}}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{1k}}{a_{1k}^{n+1}}}.$$

Dans tout ceci, nous suivons pas à pas la méthode générale. Ici nous comparons la série initiale à la série

$$f(z) = \sum_0^{\infty} v_n z^n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{1k}}{a_{1k} - z}.$$

Étudions la quantité

$$\xi_n = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{1k}}{a_{1k}^{n+1}} \varepsilon_{kn}}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{1k}}{a_{1k}^{n+1}}}.$$

Dans ce rapport, l'argument de la droite $\beta_1 N_1$ n'intervient pas, car tous les α_{1k} ont le même argument. Nous pouvons donc supposer tous les α_{1k} réels et positifs.

Si l'on pose alors

$$\frac{A_{1k}}{\alpha_{1k}^{n+1}} = p_{kn} + iq_{kn},$$

p_{kn} et q_{kn} sont réels et de même signe que les parties réelles et imaginaires de A_{1k} .

ξ_n s'écrit

$$\xi_n = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} p_{kn} \varepsilon_{kn} + i \sum_{k=1}^{\infty} q_{kn} \varepsilon_{kn}}{\sum_{k=1}^{\infty} p_{kn} + i \sum_{k=1}^{\infty} q_{kn}}.$$

Supposons que tous les A_{1k} aient leurs parties réelles de même signe, ainsi que leurs parties imaginaires (ce signe n'étant pas nécessairement le même pour les deux); tous les p_{kn} seront alors de même signe, ainsi que tous les q_{kn} , et ceci quel que soit n .

On a alors

$$\xi_n = \frac{\varepsilon_n \sum p_{kn} + i \varepsilon'_n \sum q_{kn}}{\sum p_{kn} + i \sum q_{kn}} \quad |\varepsilon_n| < \varepsilon; |\varepsilon'_n| < \varepsilon,$$

puisque, tous les ε_{kn} étant en module $< \varepsilon$, le rapport $\frac{\sum p_{kn} \varepsilon_{kn}}{\sum p_{kn}}$, d'après un théorème connu, a lui-même un module $< \varepsilon$. L'égalité précédente a lieu quel que soit n .

On en tire

$$|\xi_n| \leq \frac{|\varepsilon_n| |\sum p_{kn}| + |\varepsilon'_n| |\sum q_{kn}|}{\sqrt{(\sum p_{kn})^2 + (\sum q_{kn})^2}} < \varepsilon \frac{|\sum p_{kn}| + |\sum q_{kn}|}{\sqrt{(\sum p_{kn})^2 + (\sum q_{kn})^2}}.$$

Or si r et s sont deux nombres positifs quelconques, on a

$$\frac{r+s}{\sqrt{r^2+s^2}} \leq \sqrt{2}.$$

Donc, quel que soit n ,

$$|\xi_n| < \varepsilon \sqrt{2},$$

à condition de choisir ε suffisamment grand, ε sera aussi petit qu'on voudra.

On peut en particulier prendre $\varepsilon \sqrt{2} < 1$, et puisque

$$\frac{u_n}{v_n} = 1 + \xi_n,$$

il vient

$$0 < 1 - \varepsilon \sqrt{2} < \left| \frac{u_n}{v_n} \right| < 1 + 2 \sqrt{2},$$

ce qui suffit à prouver que la série $\Sigma u_n z^n$ a même cercle de convergence que la série $\Sigma v_n z^n$, c'est-à-dire que β_1 est bien un point singulier de $\Sigma u_n z^n$.

Résumons les conclusions précédentes :

Supposons que dans l'ensemble des $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_i, \dots$, qui est partout dense sur L , on puisse choisir un ensemble $\beta_{\lambda_1}, \beta_{\lambda_2}, \dots, \beta_{\lambda_i}, \dots$, partout dense sur L jouissant des propriétés suivantes :

1° Sur toute normale $\beta_{\lambda_i} N_{\lambda_i}$, tous les $A_{\lambda_i, k}$ ont leurs parties réelles de même signe, ainsi que leurs parties imaginaires (ce signe pouvant varier arbitrairement avec l'indice λ_i);

2° A tout nombre positif ε donné arbitrairement et à toute normale $\beta_{\lambda_i} N_i$, on peut faire correspondre un nombre I tel que, quel que soit l'indice k correspondant à une ligne L_k comprise dans une certaine bande d'épaisseur finie bordée par L , on ait

$$\sum_{i=1}^{\infty} |A_{ik}| < \varepsilon |A_{\lambda_i, k}|.$$

Dans ces conditions on peut affirmer que la série

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_{ik}}{a_{ik} - z}$$

définit à l'intérieur de L une fonction analytique pour laquelle L est une ligne singulière essentielle.

Remarques. — I. La condition

$$\sum_{i=1}^{\infty} |A_{ik}| < \varepsilon |A_{\lambda_i, k}|$$

sera sûrement vérifiée dans le cas où l'on aura par exemple

$$\rho'_k < \left| \frac{A_{ik}}{A_{i1}} \right| < \rho_k,$$

quel que soit l'indice i , les nombres ρ_k et ρ'_k dépendant seulement de k , et le quotient $\frac{\rho_k}{\rho'_k}$ qui est > 1 restant toujours inférieur à un nombre fixe P .

En effet, on aura

$$\sum_{i=1}^{\infty} |A_{ik}| < \rho_k \sum_{i=1}^{\infty} |A_{i1}|.$$

Si, pour $k = 1$, on choisit I tel que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |A_{i1}| < \varepsilon |A_{\lambda_{i,1}}|,$$

on aura pour un indice k quelconque

$$\sum_{i=1}^{\infty} |A_{ik}| < \rho_k \varepsilon |A_{\lambda_{i,1}}|.$$

Or

$$\left| \frac{A_{\lambda_{i,k}}}{A_{\lambda_{i,1}}} \right| > \rho'_k.$$

Donc

$$\sum_{i=1}^{\infty} |A_{ik}| < \frac{\rho_k}{\rho'_k} \varepsilon |A_{\lambda_{i,k}}| < P \varepsilon |A_{\lambda_{i,k}}|.$$

$P\varepsilon$ sera aussi petit qu'on veut avec ε et la condition cherchée est bien vérifiée.

Un cas particulier de l'hypothèse sur les A_{ik} serait celui où l'on aurait, quel que soit i ,

$$\frac{A_{ik}}{A_{i1}} = \gamma_k,$$

la série $|\gamma_k|$ étant naturellement supposée convergente.

II. Il est facile d'assigner aux $|A_{ik}|$ des limites supérieures telles que la fonction

$$f(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{ik}}{a_{ik} - z},$$

qui converge dans L ainsi que toutes ses dérivées, converge aussi sur L ainsi que toutes ses dérivées. Si en effet δ_{ik} désigne la plus

courte distance de a_{ik} au contour L et si u_{ik} représente le terme général d'une série convergente à termes tous positifs, telle que $u_{ik} < \delta_{ik}$, en prenant $|\Lambda_{ik}| < e^{-\frac{1}{u_{ik}}}$, on verra bien facilement que la série

$$f^{(p+1)}(z) = (p+1)! \sum \sum \frac{\Lambda_{ik}}{(a_{ik} - z)^{p+2}}$$

converge absolument et uniformément dans A et sur L. Donc la fonction $f(z)$ et ses dérivées jusqu'à un ordre quelconque qui sont holomorphes dans A restent finies et continues sur L.

III. Dans le cas où les Λ_n décroissent très vite ($|\Lambda_n| < e^{-e^{n^2+t}}$) de telle façon que l'on puisse former pour

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda_n}{a_n - z}$$

une série de polynomes (M) qui converge sur une infinité dénombrable de droites traversant l'espace où les a_n sont denses (sans toutefois passer par aucun point a_n), M. Borel a démontré que L est toujours une coupure pour $f(z)$. Nous avons essayé, dans les lignes qui précèdent, d'étudier des cas où l'on a le même résultat sans imposer aux Λ_n une décroissance aussi rapide, et nous y sommes parvenus dans l'exemple que nous avons développé en second lieu.

SUR LA REPRÉSENTATION DE L'ÉQUATION D'ORDRE NOMOGRAPHIQUE 4 A QUATRE VARIABLES PAR DOUBLE ALIGNEMENT;

PAR M. FARID BOULAD, BEY.

On sait que toute équation à quatre variables d'ordre nomographique 4, représentable par un nomogramme à double alignement, peut être mise sous la forme suivante (1) :

$$(1) \quad \frac{f_1 f_2 + \gamma_{34}}{\delta_1 f_1 + \delta_2 f_2 + \rho} = - \frac{\delta_3 f_3 + \delta_4 f_4 + \rho}{\rho (f_3 f_4 + \gamma_{12})}.$$

(1) D'OCAGNE, *Cours de Calcul graphique et Nomographie*, p. 328.

Grâce à la notion des valeurs critiques de M. d'Ocagne, M. Soreau ⁽¹⁾ a pu retrouver très simplement les conditions pour qu'une équation $F_{1234} = 0$ soit réductible à la forme (1), ainsi que les conditions nécessaires et suffisantes

$$(2) \quad \frac{\partial_1 \partial_2}{\rho^2 \gamma} = \frac{\gamma_{34}}{\partial_3 \partial_4} = \frac{1}{\rho},$$

qu'il avait précédemment établies pour que les coniques du nomogramme soient superposables.

Nous nous proposons de faire voir que ces résultats ressortent de notre méthode de disjonction des variables pour les équations de la forme

$$(3) \quad F_{123} = F_1 F_{23} + G_1 G_{23} + H_1 H_{23} = 0,$$

méthode également fondée sur la considération des valeurs critiques.

Cette méthode consiste à résoudre les deux identités suivantes :

$$(4) \quad \begin{cases} F_2 F_{23} + G_2 G_{23} + H_2 H_{23} \equiv 0 & (\text{quel que soit } z_3), \\ F_3 F_{23} + G_3 G_{23} + H_3 H_{23} \equiv 0 & (\text{quel que soit } z_2), \end{cases}$$

en y appliquant le procédé de M. d'Ocagne pour la recherche des valeurs critiques.

Nous ferons remarquer que, si la fonction H_{23} est nulle, on lui attribuera l'expression suivante :

$$H_{23} = \Sigma \alpha f_2 f_3 + \Sigma \beta f_2 + \Sigma \gamma f_3 + \theta,$$

où f_2 et f_3 sont les fonctions par rapport auxquelles F_{23} , G_{23} , H_{23} seront prises nomographiquement rationnelles dans la résolution des identités (4), et α , β , γ , θ sont des paramètres assujettis à un certain nombre de relations qui seront déterminées de telle sorte que chacun des deux systèmes d'équations linéaires en F_2 , G_2 , H_2 et F_3 , G_3 , H_3 obtenus en résolvant les deux identités (4), soit compatible.

Cela posé, en représentant par f la valeur commune des deux rapports (1) et en posant

$$F = f, \quad G = -1, \quad H = 0,$$

(1) *C. R. Acad. Sc.*, t. CXLIV, 1907, p. 1027.

on aura à représenter les deux équations suivantes :

$$(5) \quad F(\delta_1 f_1 + \delta_2 f_2 + \rho) + G(f_1 f_2 + \gamma_{34}) + H(\alpha f_1 f_2 + \beta f_1 + \gamma f_2 + \theta) = 0,$$

$$(6) \quad F\rho(f_3 f_4 + \gamma_{12}) - G(\delta_3 f_3 + \delta_4 f_4 + \rho) + H(\alpha' f_1 f_2 + \beta' f_1 + \gamma' f_2 + \theta') = 0;$$

$\alpha, \beta, \gamma, \theta, \alpha', \beta', \gamma', \theta'$ sont, d'après la remarque ci-dessus, des paramètres assujettis aux trois relations (11) déterminées ci-après.

Pour avoir les éléments F_1, G_1, H_1 et F_2, G_2, H_2 du déterminant générateur de l'équation (5), appliquons notre méthode précitée; nous aurons les deux systèmes d'équations linéaires

$$(7) \quad \begin{cases} \delta_2 F_1 & + G_1 f_1 + H_1(\alpha f_1 + \gamma) = 0, \\ F_1(\delta_1 f_1 + \rho) + G_1 \gamma_{34} + H_1(\beta f_1 + \theta) = 0, \end{cases}$$

$$(8) \quad \begin{cases} \delta_1 F_2 & + G_2 f_2 + H_2(\alpha f_2 + \beta) = 0, \\ F_2(\delta_2 f_2 + \rho) + G_2 \gamma_{34} + H_2(\gamma f_2 + \theta) = 0. \end{cases}$$

A présent, cherchons l'équation du support commun des deux échelles (z_1) et (z_2) en employant les formules générales

$$x = \frac{F_i}{H_i}, \quad y = \frac{G_i}{H_i},$$

qui définissent en coordonnées cartésiennes l'échelle (z_i) et d'après lesquelles la *charnière* (z) est, dans ce cas, rejetée à l'infini. Pour cela, éliminons f_i dans chacun des deux systèmes d'équations (7) et (8), après y avoir substitué à F_i, G_i, H_i respectivement $x, y, 1$. Nous aurons alors la même équation suivante du support commun des deux échelles (z_1) et (z_2) :

$$(9) \quad \delta_1 \delta_2 x^2 - \gamma_{34} y^2 - \rho xy - (\alpha \rho - \beta \delta_2 - \gamma \delta_1) x - \theta y - (\alpha \theta - \beta \gamma) = 0$$

De même, si l'on applique la même marche ci-dessus à l'équation (6) pour avoir les éléments F_3, G_3, H_3 et F_4, G_4, H_4 , on aura aisément les deux systèmes d'équations linéaires définissant ces éléments, et l'on en déduira l'équation suivante du support commun des deux échelles (z_3) et (z_4) :

$$(10) \quad \begin{aligned} \rho^2 \gamma_{12} x^2 - \delta_3 \delta_4 y^2 - \rho^2 xy + \rho(\theta' + \alpha' \gamma_{12}) x \\ + (\delta_3 \gamma' - \alpha' \rho + \beta' \delta_4) y + (\alpha' \theta' - \gamma' \beta') = 0. \end{aligned}$$

Or, pour que les deux supports ci-dessus coïncident, il faut et il suffit que les deux équations (9) et (10) soient identiques, c'est-à-dire que les deux conditions (2) soient remplies ainsi que

les trois relations suivantes entre les paramètres $\alpha, \beta, \dots, \theta$:

$$(11) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{-\alpha\rho + \beta\delta_2 + \delta_1\theta}{\rho(\theta' + \alpha'\gamma_{12})} = \frac{-\theta}{\delta_3\gamma - \alpha'\rho + \delta_1\beta'} = \frac{-\alpha\theta + \beta\gamma}{\alpha'\theta' - \beta'\gamma'}.$$

Comme ces relations peuvent être satisfaites par une infinité de valeurs données à ces huit paramètres, il résulte que les conditions (2) sont les seules nécessaires et suffisantes.

REMARQUE SUR UN ARTICLE ANTÉRIEUR;

PAR M. E. CAHEN.

J'ai publié dans ce Bulletin (t. XL, p. 52) un article *Sur l'irrationalité des sommes des séries dont le terme général est une fonction rationnelle de l'indice*. Dans cet article se trouve, page 57, l'énoncé suivant :

Si $g(n)$ a toutes ses racines rationnelles et distinctes, la somme de la série s'exprime au moyen de nombres algébriques et de fonctions logarithmes.

Ce théorème a déjà été énoncé par M. Appell (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXXVI, p. 955). Mais l'auteur lui-même m'a fait remarquer que son énoncé appelait une rectification : Le théorème n'est pas exact quand il y a au dénominateur des racines doubles. Il suffit, pour s'en convaincre, de considérer la série $\sum \frac{1}{n^2}$ dont la somme est $\frac{\pi^2}{6}$, et qui ne s'exprime par conséquent pas au moyen de nombres algébriques et de logarithmes.

D'après les résultats de la page 64 de mon article, une telle somme s'exprime, en général, en fonction des transcendentes $\mathfrak{B}_{h,k}(2)$.

Je profite de l'occasion pour ajouter à mon article l'explication suivante. L'énoncé de la page 57 : *Si $g(n)$ a toutes ses racines rationnelles et distinctes, la somme de la série s'exprime au*

moyen de nombres algébriques et de fonctions logarithmes, ne semble pas résulter tout d'abord de celui qui suit quelques pages plus loin : *Pour des valeurs rationnelles de x , la fonction $h(x)$ s'exprime au moyen de nombres algébriques, de la constante d'Euler et de fonctions logarithmes.*

Il semble qu'il faille introduire aussi la constante d'Euler dans le premier énoncé. Mais il n'en est rien. En effet, d'après la formule (3), la somme de la série contient la constante d'Euler dans des termes de la forme $h(-a) - C$, où $a = \frac{p}{q}$.

Or, d'après la formule (8),

$$h\left(-\frac{p}{q}\right) = C + \dots$$

de sorte que C disparaît.

Je profite aussi de l'occasion pour signaler les errata suivants :

Page 66, dernière formule de la page, *au lieu de φ , lire d .*

Page 63, au premier exemple, *au lieu de $-\frac{1}{2a^2} - \frac{k}{2a} \cotang \pi a$, lire $\frac{1}{2a^2} - \frac{\pi}{2a} \cotang \pi a$.*

Page 63, au deuxième exemple, *au lieu de $\frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{a} \frac{e^{\pi a} + e^{-\pi a}}{e^{\pi a} - e^{-\pi a}}$, lire $-\frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{2a} \frac{e^{\pi a} + e^{-\pi a}}{e^{\pi a} - e^{-\pi a}}$.*

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME XLI.

(Les lettres et numéros qui précèdent les titres indiquent les classifications du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*, nouvelle édition, 1908.)

	Pages.
[O'6e] Barré. — Théorie générale des surfaces engendrées par une hélice circulaire.....	242
[J5a] Borel (E.). — Les ensembles de mesure nulle.....	1
[X2b] Boulard (F.), bey. — Sur la représentation de l'équation nomographique d'ordre $\frac{1}{2}$ à $\frac{1}{2}$ variables par double alignement.....	366
[H11c] Bratu (G.). — Sur les équations intégrales non linéaires.....	346
[D2b] Cahen (E.). — Remarque sur un article antérieur.....	369
[B2c] Cartan (E.). — Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane.....	53
[H9d] Clairin (J.). — Sur la transformation d'Imschenetsky.....	206
[R6b α] Delassus (Et.). — Sur les systèmes de Lagrange à paramètre principal.....	126
[J4a] De Séguier. — Sur les produits directs et sur la structure de leurs diviseurs maximums.....	164
[D2b β] Fatou (P.). — Sur la convergence absolue des séries trigonométriques.....	113
[D4e] Fatou (P.). — Sur les lignes singulières des fonctions analytiques.	47
[D1b] Galbrun (H.). — Sur un développement d'une fonction de variable réelle en série de polynômes.....	24
[H1i] Garnier (R.). — Sur la rationalisation des coefficients d'une équation différentielle algébrique.....	146
[T2a α] Garnier (R.). — Sur les simplifications du potentiel élastique dues à la symétrie cristalline.....	228
[M ² 1d] Godeaux (L.). — Sur les involutions appartenant à une surface de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$	178
[D4e] Julia (G.). — Sur les lignes singulières de certaines fonctions analytiques.....	351
[D2a] Lindelöf (E.). — Démonstration nouvelle d'un théorème fondamental sur les suites de fonctions monogènes.....	171
[A2a] Pellet (A.). — Des systèmes infinis d'équations.....	119
[A3e] Petrovitch (M.). — Équations algébriques et transcendantes dépourvues de racines réelles..	194

	Pages.
[C2g] Podtiagnine (N.). — Les conditions de convergence d'une intégrale multiple.....	97
[D3f β] Rémoundos (G.). — Généralisation d'un théorème de M. Landau.	19
[D3f β] Rémoundos (G.). — Généralisation d'un théorème de M. Landau.	340
[J43] Schmidt (O.). — Sur les prouits directs.....	161
[D4a] Sire (J.). — Sur la puissance de l'ensemble des points singuliers transcendants des fonctions inverses des fonctions entières.....	14
[E1a] Touchard (J.). — Sur la fonction gamma.....	234

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME XLI.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES

DE L'ANNÉE 1913.

52088 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,

55, Quai des Grands-Augustins.

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES
DE L'ANNÉE 1913.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1913

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation
réservés pour tous pays.

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

ÉTAT

DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

AU COMMENCEMENT DE L'ANNÉE 1913 (1).

Membres honoraires du Bureau....	MM. APPELL. DARBOUX. GUYOU. HATON DE LA GOUPILLIÈRE. HUMBERT. JORDAN. LECORNU. MITTAG-LEFFLER. PAINLEVÉ. PICARD. VOLTERRA. ZEUTHEN.
Président.....	MM. COSSERAT (F.).
Vice-Présidents.....	FONTENÉ. FOUCHÉ. MAILLET. VESSIOT.
Secrétaires.....	CARTAN. MONTEL.
Vice-Secrétaires.....	FATOU. HALPHEN.
Archiviste.....	CAHEN.
Trésorier.....	SERVANT.
Membres du Conseil (2)	ANDOYER, 1916. BLUTEL, 1915. BOULANGER, 1915. BRICARD, 1914. CARVALLO, 1916. D'OCAGNE, 1914. FOURET, 1915. GOURSAT, 1916. GRÉVY, 1914. GUICHARD, 1914. KOENIGS, 1915. LEBESGUE, 1915.

(1) MM. les Membres de la Société sont instamment priés d'adresser au Secretariat les rectifications qu'il y aurait lieu de faire à cette liste.

(2) La date qui suit le nom d'un membre du Conseil indique l'année au commencement de laquelle expire le mandat de ce membre.

Date
de
l'admission.

1872. ACHARD, ancien directeur de la Compagnie d'assurances sur la vie *La Foncière*, rue de la Terrasse, 6 *bis*, à Paris (17°).
1900. ACKERMANN-TEURNER, éditeur, à Leipzig (Allemagne). S. P. (1).
1900. ADHÉMAR (vicomte Robert d'), professeur à la Faculté libre des Sciences, place de Genevières, 14, à Lille (Nord).
1896. ANDOYER, professeur à la Faculté des Sciences, membre du Bureau des Longitudes, rue du Val-de-Grâce, 11, à Paris (5°).
1894. ANDRADE, professeur à la Faculté des Sciences, rue de la Mouillière, 1, à Besançon.
1872. ANDRÉ (Désiré), docteur ès sciences, rue Bonaparte, 70 *bis*, à Paris (6°).
1879. APPELL, membre de l'Institut, doyen de la Faculté des Sciences et professeur à l'École Centrale des Arts et Manufactures, rue du Bac, 32, à Paris (7°).
1910. ARCHIBALD (R.-C.), professeur à Brown-Université, Providence, Rhode Island (États-Unis).
1900. AURIC, ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue Pierre-Corneille, 38, à Lyon.
1882. AUTONNE, ingénieur en chef des ponts et chaussées, professeur adjoint honoraire à la Faculté des Sciences de Lyon, rue de l'Hospice, 69, à Châteauroux (Indre).
1900. BAIRE, professeur à la Faculté des Sciences, 24, rue Andra, à Dijon.
1896. BAKER, professeur à l'Université de Toronto (Canada).
1905. BARRÉ, capitaine du génie, docteur ès sciences mathématiques, quai de la République, 8, à Verdun (Meuse).
1906. BARTHEL, docteur en philosophie, professeur honoraire de Mathématiques, à Aschaffenburg (Bavière).
1875. BERDELLÉ, ancien garde général des forêts, à Rioz (Haute-Saône). S. P.
1912. BERGER (T.), Storgatan 16, à Örebro (Suède).
1904. BERNSTEIN (S.), docteur ès sciences, privat docent à l'Université, Apterkarsky, 22, à Kharkow (Russie).
1891. BERTRAND DE FONTVILANT, professeur à l'École Centrale des Arts et Manufactures, rue Brémontier, 16, à Paris (17°). S. P.
1910. BERTRAND (G.), professeur à l'École Sainte-Geneviève, rue Lhomond, 18, à Paris (5°).
1888. BIOCHE, professeur au lycée Louis-le-Grand, rue Notre-Dame-des-Champs, 56, à Paris (6°) S. P.
1900. BLUMENTHAL (Otto), professeur à la Technische Hochschule, Rütcherstrasse, 48, à Aix-la-Chapelle (Allemagne).
1891. BLUTEL, inspecteur général de l'Instruction publique, rue Denfert-Rochereau, 110, à Paris (14°).
1902. BOBERIL (vicomte Roger du), rue d'Antibes, 114, à Cannes (Alpes-Maritimes). S. P.
1907. BOITEL DE DIENVAL, ancien élève de l'École Polytechnique, au château de Valsery, à Cœuvres (Aisne). S. P.
1892. BONAPARTE (prince Roland), membre de l'Institut, avenue d'Iéna, 10, à Paris (16°).
1895. BOREL (Émile), professeur à la Faculté des Sciences, sous-directeur de l'École Normale, rue d'Ulm, 45, à Paris (5°). S. P.
1909. BOULAD (F.), ingénieur au service des Ponts des Chemins de fer de l'État égyptien, au Caire (Égypte).
1896. BOULANGER, docteur ès sciences, répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue Gay-Lussac, 68, à Paris (5°).
1896. BOURGET (H.), directeur de l'Observatoire, à Marseille.

(1) Les initiales S. P. indiquent les Sociétaires perpétuels.

- Date
de
l'admission.
1896. **BOURLET**, docteur ès sciences, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers et à l'École des Beaux-Arts, rue Raynouard, 56, à Paris (16°). S. P.
1903. **BOUTIN**, rue Lavieuville, 26, à Paris (18°).
1904. **BOUTROUX** (P.), professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers. S. P.
1900. **BREITLING**, proviseur du lycée Buffon, boulevard Pasteur, 16, à Paris (14°).
1911. **BRATU**, professeur, rue Galipeau, 3, à Antony (Seine).
1897. **BRICARD**, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Denfert-Rochereau, 108, à Paris (14°).
1873. **BROCARD**, lieutenant-colonel du génie territorial, rue des Ducs-de-Bar, 75, à Bar-le-Duc. S. P.
1912. **BROWNE**, Collège des Irlandais, rue des Irlandais, 5, à Paris (5°).
1901. **BUHL**, professeur à la Faculté des Sciences, rue des Coffres, 11, à Toulouse.
1893. **BURKHARDT**, professeur à la Technische Hochschule, Martinstrasse, 3, à Munich (Bavière).
1894. **CAMEN**, professeur au collège Rollin, rue Cortambert, 46, à Paris (16°).
1893. **CALDARERA**, professeur à l'Université, palazzo Giampaolo, via della Libertà, à Palerme (Italie).
1885. **CARON**, chef honoraire des travaux graphiques à la Sorbonne, rue Claude-Bernard, 71, à Paris (5°).
1892. **CARONNET**, docteur ès sciences mathématiques, rue Demours, 62 bis, à Paris (17°).
1896. **CARTAN**, professeur à la Faculté des Sciences, rue de Vaugirard, 174, à Paris (15°).
1887. **CARVALLO**, directeur des études à l'École Polytechnique, rue Descartes, 21, à Paris (5°). S. P.
1890. **CEDERCREUTZ** (baronne Naunty), Unionsgatan, 4, à Helsingfors (Finlande).
1892. **CELLÉRIER** (Gustave), ancien astronome à l'Observatoire, cours de Rive, 12, à Genève (Suisse).
1888. **CHAILAN** (Édouard), professeur à l'Institut catholique, rue Denfert-Rochereau, 95, à Paris (14°).
1911. **CHALORY**, professeur au lycée Carnot, rue de Vaugirard, 38, à Paris (6°).
1896. **CHARVE**, doyen de la Faculté des Sciences, cours Pierre-Puget, 60, à Marseille.
1911. **CHATELET**, ancien élève de l'École Normale supérieure, rue de la Californie, 69, à Tours.
1907. **CHAZY**, maître de conférences à la Faculté des Sciences, à Lille.
1901. **CLAIRIN**, professeur à la Faculté des Sciences, rue Jacquemars-Gièlee, 57 bis, à Lille.
1896. **COSSERAT** (E.), directeur de l'Observatoire, à Toulouse.
1896. **COSSERAT** (F.), ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue d'Alsace, 23, à Paris (10°).
1900. **COTTON** (Émile), professeur à la Faculté des Sciences, à Grenoble. S. P.
1904. **CURTISS**, professeur à l'Université Northwestern, Milburn Street, 720, à Evanston (Illinois, États-Unis).
1872. **DARBOUX**, secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, doyen honoraire de la Faculté des Sciences, rue Mazarine, 3, à Paris (6°).
1885. **DAUTHEVILLE**, doyen de la Faculté des Sciences, cours Gambetta, 27, à Montpellier.
1901. **DELIASSUS**, professeur de Mécanique rationnelle à la Faculté des Sciences, rue de Brach, 92, à Bordeaux.
1895. **DELAUNAY** (N.), professeur à l'Institut Empereur Alexandre II, à Kiew (Russie).
1885. **DEMARTRES**, doyen de la Faculté des Sciences, avenue Saint-Maur, à la Madeleine-lès-Lille (Nord).
1892. **DENOULIN** (Alph.), professeur à l'Université, rue Joseph-Plateau, 10, à Gand (Belgique).

Date
de
l'admission.

1905. DENJOY, maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue Duguesclin, 3, à Montpellier.
1883. DERUYTS, professeur à l'Université, rue des Augustins, 35, à Liège (Belgique).
1894. DESAINT, docteur ès sciences, boulevard Gouvion-Saint-Cyr, 47, à Paris (17°).
1900. DICKSTEIN, Marszałkowska, 117, à Varsovie.
1899. DRACH, chargé de cours à la Faculté des Sciences, square Lagarde, 3, à Paris (5°).
1909. DRURY, bibliothécaire de l'Université, University Station, Urbana (Illinois, États-Unis).
1907. DULAC, professeur à la Faculté des Sciences, quai des Brotteaux, 4, à Lyon.
1896. DEMAS (G.), docteur de l'Université de Paris, privat-docent à l'École Polytechnique fédérale, Asylstrasse, 81, à Zurich (Suisse).
1897. DUMONT, professeur au lycée, avenue Bouvard, 6, à Annecy (Haute-Savoie).
1886. DUNCAN, Consulting Engineer, Empire Building, Liberty Street, 55, New-York City.
1902. EGOROFF (Dimitry), professeur à l'Université, Povarskaÿa, Borissoglebsky per., n° 8, à Moscou (Russie).
1912. EISENHARDT (L.-P.), professeur à l'Université de Princeton, Alexander Street, 22, à Princeton (New-Jersey, États-Unis).
1903. ESPANET, ingénieur civil, Brazil Railway Company, rue Louis-le-Grand, 9, à Paris.
1900. ESTANAVE, docteur ès sciences, secrétaire de la Faculté des Sciences de Marseille.
1907. ETZEL, professeur de Mathématiques et d'Astronomie au Collège de Saint-Thomas, à Saint-Paul (Minnesota, États-Unis).
1896. EUVERTE, ancien élève de l'École Polytechnique, ancien capitaine d'artillerie, rue du Pré-aux-Cleres, 18, à Paris (7°).
1888. FABRY, professeur à la Faculté des Sciences, rue Chaptal, 17, à Montpellier.
1906. FARAGGI, professeur à Sétif (Algérie).
1904. FATOU, docteur ès sciences, astronome-adjoint à l'Observatoire, boulevard du Mont-Parnasse, 172, à Paris (14°).
1891. FAUQUEMBERGUE, professeur au lycée, à Mont-de-Marsan.
1892. FEMR (Henri), professeur à l'Université, route de Florissant, 110, à Genève (Suisse).
1885. FIELDS (J.), professeur à l'Université, Toronto (Ontario, Canada).
1881. FLOQUET, doyen de la Faculté des Sciences, rue de la Commanderie, 21, à Nancy.
1872. FLYE SAINTE-MARIE, chef d'escadron d'artillerie en retraite, ancien répétiteur à l'École Polytechnique, place Royer-Collard, à Vitry-le-François (Marne).
1897. FONTENÉ, inspecteur de l'Académie de Paris, rue Le Goff, 7, à Paris (5°).
1903. FORD (WALTER B.), professeur de Mathématiques à l'Université de Michigan, à Ann Arbor (Michigan, États-Unis).
1889. FOUCHÉ, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Soufflot, 5, à Paris (5°).
1905. FOUËR, professeur à l'Institut catholique, rue Le Verrier, 17, à Paris (6°).
1872. FOURET, ancien examinateur d'admission à l'École Polytechnique, avenue Carnot, 4, à Paris (17°). S. P.
1903. FRAISSÉ, inspecteur des études au Prytanée, à La Flèche (Sarthe).
1911. FRÉCHET, professeur à la Faculté des Sciences, à Poitiers.
1903. FUETER, professeur à l'Université, Friedrichsplatz, 9^m, à Karlsruhe (Allemagne).
1911. GALBRUN, docteur ès sciences, avenue Émile-Deschanel, 32, à Paris (7°).
1900. GALDEANO (Z.-G. de), correspondant des Académies royales des Sciences de Madrid et de Lisbonne, professeur à l'Université, Calle del Coso, 99, à Saragosse (Espagne).
1906. GARGAM DE MONCETZ, licencié ès sciences, square de Latour-Maubourg, 8, à Paris (7°).
1872. GABRIEL, inspecteur général des ponts et chaussées en retraite, professeur honoraire à la Faculté de Médecine, rue Édouard-Detaille, 6, à Paris (17°).

Date
de
dmission.

1908. **GARNIER**, docteur ès sciences, boulevard Arago, 99, à Paris (14°).
1911. **GAU**, maître des conférences à la Faculté des Sciences, à Grenoble.
1896. **GAUTHIER-VILLARS**, ancien élève de l'École Polytechnique, éditeur, quai des Grands-Augustins, 55, à Paris (6°).
1890. **GEBBIA**, professeur libre à l'Université, à Palerme (Italie).
1906. **GÉRARDIN**, quai Claude-le-Lorrain, 32, à Nancy.
1897. **GERRANS**, professeur à Worcester College, Saint-John street, 20, à Oxford (Grande-Bretagne).
1903. **GODEY**, ancien élève de l'École Polytechnique, rue du Bois-de-Boulogne, 7, à Paris (16°).
1907. **GOT** (Th.), ancien ingénieur de la marine, villa Bianca, rue Fanelli, quai Bompard, à Marseille.
1881. **GOURSAT**, professeur à la Faculté des Sciences, répétiteur à l'École Polytechnique, rue Denfert-Rochereau, 39, à Paris (5°). S. P.
1912. **GRAMONT** (A. DE), licencié ès sciences, rue de Ponthieu, 62, à Paris, (8°).
1896. **GRÉVY**, professeur au lycée Saint-Louis, rue Claude-Bernard, 71, à Paris (5°).
1899. **GUADET**, ancien élève de l'École Polytechnique, rue de l'Université, 69, à Paris (7°).
1880. **GUCCIA** (Jean), professeur à l'Université, via Ruggiero Settimo, 30, à Palerme (Italie).
1906. **GUERBY**, professeur au collège Stanislas, rue d'Assas, 50, à Paris (6°). S. P.
1900. **GUICHARD** (C.), professeur à la Faculté des Sciences, rue Boulainvilliers, 14, à Paris (16°).
1907. **GUICHARD** (L.), rue Condorcet, 42, à Paris (9°).
1881. **GUNTHER** (Dr Sigismond), professeur à l'École Polytechnique, à Munich (Bavière).
1885. **GUYOU**, membre de l'Institut, boulevard Raspail, 284, à Paris (14°).
1896. **HADAMARD**, membre de l'Institut, professeur au Collège de France et à l'École Polytechnique, rue Humboldt, 25, à Paris (14°). S. P.
1910. **HALPHEN** (Ch.), professeur de Géométrie descriptive au Collège Chaptal, Chaussée de la Muette, 8 bis, à Paris (16°).
1894. **HALSTED** (G.-B.), Colorado State Teachers College, à Greeley (Colorado, États-Unis). S. P.
1901. **HANCOCK**, professeur à l'Université de Cincinnati, Auburn Hotel (Ohio, États-Unis).
1909. **HANSEN**, privat-docent à l'Université, Strandboulevarden, 66, Copenhague (Danemark).
1872. **HATON DE LA GOUPILLIÈRE**, membre de l'Institut, inspecteur général des mines, directeur honoraire de l'École des Mines, rue de Vaugirard, 56, à Paris (6°). S. P.
1905. **HEDRICK**, professeur à l'Université, South Ninth street, 302, à Columbia (Missouri, États-Unis).
1892. **HERMANN**, libraire-éditeur, rue de la Sorbonne, 8, à Paris (5°).
1911. **HIERMOLTZ**, professeur, avenue de Belmont, 28, à Montreux (Suisse).
1911. **HOLMGREN**, professeur à l'Université d'Upsal, à l'Observatoire, Upsal (Suède).
1895. **HOTT** (S.), professeur à l'École St-Croix de Neuilly, boulevard Pécire, 218 bis, à Paris (17°). S. P.
1880. **HUMBERT**, membre de l'Institut, ingénieur en chef des mines, professeur à l'École Polytechnique, rue Daubigny, 6, à Paris (17°).
1907. **HUSSON**, professeur à la Faculté des Sciences, rue des Tiercelins, 60, à Nancy.
1881. **IMBER**, ancien directeur des études à l'École Centrale, ancien membre du Conseil de l'École Centrale, place Voltaire, 2, à Paris (11°).

Date
de
l'admission.

1896. JACQUET (E.), professeur, rue Lagarde, 3, à Paris (5°).
1898. JAHNKE (E.), professeur à l'Académie des Mines, Darmstädter strasse, 11, à Berlin, W.15 (Allemagne).
1903. JENSEN (J.-L.-W.-V.), ingénieur en chef des Téléphones, Frederiksberg allée, 68, à Copenhague (Danemark).
1872. JORDAN, membre de l'Institut, professeur à l'École Polytechnique et au Collège de France, rue de Varenne, 48, à Paris (7°). S. P.
1910. KÉRAVAL, professeur au lycée Louis-le-Grand, avenue du Maine, 46, à Paris (14°).
1892. KOCH (H. von), professeur à l'École Polytechnique, à Djursholm-Stockholm (Suède).
1880. KÖNIGS, professeur à la Faculté des Sciences, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, boulevard Arago, 101, à Paris (14°).
1913. KORN (A.), ancien professeur à l'Université de Munich, Schlüterstrasse, 25, à Charlottenburg (Allemagne).
1912. KOWALEWSKI (G.), professeur à la Technische Hochschule, Husgasse, 5, à Prague (Bohême).
1907. KRYLOFF, professeur d'analyse à l'École supérieure des Mines, à Saint-Petersbourg (Russie).
1897. LACAUCHIE, ingénieur civil, rue Brochant, 18, à Paris (17°).
1873. LAISANT, docteur ès sciences, répétiteur et examinateur à l'École Polytechnique rue du Conseil, 5, à Asnières (Seine).
1906. LALESCO, maître de conférences à l'Université, str. Luteranà, 31, à Bucarest.
1893. LANCELIN, astronome-adjoint à l'Observatoire, rue Boissonnade, 3, à Paris (14°).
1899. LANDAU, professeur à l'Université, Herzbergerchaussee, 48, à Göttingen (Allemagne).
1896. LAROZE, ingénieur des télégraphes, rue Froidevaux, 8, à Paris (14°).
1908. LATTÈS, professeur à la Faculté des Sciences, à Toulouse.
1896. LEAU, professeur au lycée Michelet, rue Denfert-Rochereau, 83, à Paris (14°).
1880. LÉAUTÉ, membre de l'Institut, boulevard de Courcelles, 18, à Paris (17°). S. P.
1896. LEBEL, professeur au lycée, rue Pelletier-de-Chambrun, 12, à Dijon.
1902. LEBESGUE, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Paris, avenue de la Tourelle, 7, à Saint-Mandé.
1903. LEBEUF, directeur de l'Observatoire, professeur d'astronomie à l'Université, à Besançon.
1893. LECORNU, membre de l'Institut, Inspecteur général des mines, professeur à l'École Polytechnique, rue Gay-Lussac, 3, à Paris (5°).
1895. LÉMERAY, licencié ès sciences mathématiques et physiques, ingénieur civil du génie maritime, villa Véga, à Antibes (Alpes-Maritimes).
1904. LENOYNE (T.), rue Claude-Bernard, 41, à Paris (5°).
1895. LE ROUX, professeur à la Faculté des Sciences, rue de Châteaudun, 13, à Rennes.
1898. LE ROY, professeur au lycée Saint-Louis, rue Cassette, 27, à Paris (6°).
1891. LERY, agent-voyer en chef de Seine-et-Oise, rue Magenta, 5, à Versailles.
1900. LEVI CIVITA (T.), professeur à l'Université, via Altinate, 14, à Padoue (Italie).
1907. LESGOURGUES, professeur au lycée Henri IV, rue Jean-Bart, 4, à Paris (6°).
1903. LÉVY (Albert), professeur au lycée Saint-Louis, rue de Rennes, 86, à Paris (6°).
1907. LÉVY (Paul), ingénieur des mines, professeur à l'École des Mines de Saint-Étienne, à Saint-Étienne.
1875. LEZ (Henri), à Lorrez-le-Bocage (Seine-et-Marne).
1898. LINDELÖF (Ernst), professeur à l'Université, Sandvikskajen, 15, à Helsingfors (Finlande).

Date
de
mission.

1877. LINDEMANN, professeur à l'Université, Franz-Josefstrasse, 9, à Munich (Bavière).
1886. LIOUVILLE, ingénieur des poudres, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, quai Henri IV, 12, à Paris (4°).
1912. LOVETT (E.-O.), Rice Institute, à Houston (Texas, États-Unis).
1888. LUCAS (Félix), ingénieur en chef des ponts et chaussées en retraite, rue Boissière, 30, à Paris (16°).
1902. LUCAS-GIRARDVILLE, à la Manufacture de l'État, à Tonneins.
1902. LUCAS DE PESLOUAN, ancien élève de l'École Polytechnique, avenue Rapp, 41, à Paris (7°).
1895. MAILLET, ingénieur des ponts et chaussées, répétiteur à l'École Polytechnique, rue de Fontenay, 11, à Bourg-la-Reine (Seine). S. P.
1912. MALAISE (J.), rue Grandgagnage, 7, à Liège (Belgique).
1905. MALUSKI, proviseur du lycée de Nîmes.
1906. MARCUS, licencié ès sciences, rue de Rambervilliers, 6, à Paris (12°).
1904. MAROTTE, professeur au lycée Charlemagne, rue de Reuilly, 35 bis, à Paris (12°).
1884. MARTIN (Artemas), 1535, Colombia Street N. W., à Washington D. C. (États-Unis).
1897. MEHMKE, professeur à l'École technique supérieure, Lowenstrasse, à Stuttgart-Degerloch (Wurtemberg).
1889. MENDIZABAL TAMBOREL (DE), membre de la Société de Géographie de Mexico, calle de Jesus, 13, à Mexico (Mexique). S. P.
1884. MERCEREAU, licencié ès sciences, docteur en médecine, rue de l'Université, 191, à Paris (7°). S. P.
1902. MERLIN (Émile), chargé des cours d'astronomie mathématique et de géodésie, à l'Université, rue d'Ostende, 11, à Gand (Belgique).
1907. MERLIN (Jean), astronome à l'Observatoire de Lyon, à Saint-Genis-Laval (Rhône).
1904. METZLER, professeur à l'Université, à Syracuse (État de New-York).
1909. MICHEL (Charles), professeur au lycée Saint-Louis, rue Sarrette, 14, à Paris (14°).
1893. MICHEL (François), ingénieur, licencié ès sciences, chef du service des parcours de la Compagnie des chemins de fer du Nord, faubourg Saint-Denis, 210, à Paris (10°).
1873. MITTAG-LEFFLER, professeur à l'Université, à Djursholm-Stockholm (Suède).
1904. MIWA, professeur à l'Université de Kyoto (Japon).
1902. MOLK (J.), professeur à la Faculté des Sciences, rue d'Alliance, 8, à Nancy.
1907. MONTEL, chargé de conférences à la Faculté des Sciences, boulevard de Vaugirard, 57, à Paris (15°).
1898. MONTESSUS DE BALLORE (vicomte Robert DE), professeur à la Faculté libre des Sciences, boulevard Bigot-Danel, 15, à Lille (Nord).
1911. MOORE (CH.-N.), professeur assistant à l'Université de Cincinnati (États-Unis).
1903. MULLER (J.-O.), Venusbergerweg, 32, à Bonn (Allemagne).
1909. NEOVIUS, ancien professeur à l'Université d'Helsingfors, Chr. Vinthersvei 34, à Copenhague (Danemark).
1885. NEUBERG, professeur à l'Université, rue Sclessin, 6, à Liège (Belgique).
1897. NICOLLIER, professeur, la Chataigneraie, à Saint-Clarens (Vaud, Suisse).
1900. NIEWENGLOWSKI, docteur ès sciences, inspecteur général de l'Instruction publique, rue de l'Arbalète, 35, à Paris (5°).
1882. OCAGNE (M. D'), ingénieur en chef des ponts et chaussées, professeur à l'École Polytechnique et à l'École des Ponts et Chaussées, rue La Boétie, 30, à Paris (8°). S. P.
1905. OUIVET, 49, rue d'Arras, à Douai.

Date
de
l'admission.

1873. OVIDIO (E. n'), professeur à l'Université, Corso Sommeiller, 16, à Turin (Italie).
1901. PADÉ (H.), recteur de l'Académie de Besançon.
1893. PAINLEVÉ, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences et à l'École Polytechnique, rue Séguier, 18, à Paris (6°).
1912. PANGE (DE), ancien élève de l'École Polytechnique, rue François I^{er}, 32, à Paris (8°).
1888. PAPELIER, professeur au lycée, rue Notre-Dame-de-Reconvrance, 29, à Orléans.
1881. PELLET, professeur à la Faculté des Sciences, boulevard Gergovia, 77, à Clermont-Ferrand.
1881. PEROTT (Joseph), Université Clark, à Worcester (Massachusetts, États-Unis). S. P.
1892. PERRIN (Élie), professeur de mathématiques, rue Tarbé, 3, à Paris (17°).
1896. PETROVITCH, professeur à l'Université, Kossantch-Venac, 26, à Belgrade (Serbie).
1902. PETROVITCH (S.), général major, professeur ordinaire à l'Académie d'artillerie Michel, Sergevskaïa, 42, log. 10, à Saint-Petersbourg.
1887. PEZZO (DEL), professeur à l'Université, piazza San Marcellino, 2, à Naples (Italie).
1905. PFEIFFER, maître de conférences à l'Université, Szaoudl Wladimirskaïa 45, log II, à Kiew (Russie).
1906. PHILIPPE (Léon), inspecteur général des ponts et chaussées, rue de Turin, 23 bis, à Paris (8°).
1879. PICARD (Émile), membre de l'Institut, membre du Bureau des Longitudes, professeur à la Faculté des Sciences et à l'École Centrale des Arts et Manufactures, rue Joseph-Bara, 4, à Paris (6°).
1872. PICQUET, chef de bataillon du génie, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, rue Monsieur-le-Prince, 4, à Paris (6°).
1899. PIERPONT (James), professeur à l'Université Yale, Mansfield street, 42, à New Haven (Connecticut, États-Unis).
1872. POLIGNAC (prince C. DE), à Radmannsdorf (Carniole, Autriche). S. P.
1906. POPOVICI, professeur à la Faculté des Sciences de Jassy (Roumanie).
1894. POTRON (M.), docteur ès sciences, professeur aux Facultés catholiques de l'Ouest, rue Rabelais, 46, à Angers (Maine-et-Loire).
1899. PRINGSHEIM, professeur à l'Université, Arcisstrasse, 12, à München (Bavière).
1896. PRUVOST, inspecteur général honoraire de l'Instruction publique, 11, rue de la Tour, à Paris (16°).
1902. PUX (Victor), ancien élève de l'École Polytechnique, professeur de mathématiques, rue Madame, 54, à Paris (6°).
1896. QUIQUET, actuaire de la Compagnie *la Nationale*, boulevard Saint-Germain, 92, à Paris (5°).
1903. RÉMOUNDOS, professeur d'analyse supérieure à la Faculté des Sciences, rue Spyridion Tricoupis, 54, à Athènes (Grèce).
1906. REMY, docteur ès sciences, ingénieur des mines, rue Jeanne-d'Arc, 25, à Arras (Pas-de-Calais).
1903. RICHARD, docteur ès sciences mathématiques, professeur au lycée, rue de Fonds, 100, à Châteauroux.
1908. RICHARD D'ABONCOURT (DE), anc. élève de l'École Polytechnique, rue Nationale, 74, à Lille.
1908. RISSER, actuaire au Ministère du Travail, rue Sédillot, 5, à Paris (7°).
1903. ROCHE, agrégé de mathématiques, rue d'Assas, 76, à Paris (6°).
1909. ROSENBLATT, docteur en philosophie, rue Basztowa, 19, à Cracovie (Autriche).

1908. **ROTHROCK**, Professeur à l'Université, à Bloomington (Indiana, États-Unis).
1896. **ROUGIER**, professeur au lycée et à l'École des ingénieurs, rue Sylvabelle, 84, à Marseille.
1906. **ROUSIERS**, professeur au collège Stanislas, boulevard du Montparnasse, 62, à Paris (14°).
1911. **RUDNICKI**, licencié ès sciences, avenue Reille, 28, à Paris (11°).
1900. **SALTYKOW**, professeur à l'Université, à Kharkow (Russie). S. P.
1872. **SARTIAUX**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, chef de l'exploitation à la Compagnie du chemin de fer du Nord, à Paris.
1885. **SAUVAGE**, professeur à la Faculté des Sciences de Marseille.
1907. **SCHÖNFLIES**, professeur à l'Université, Schumannstrasse, 62, à Francfort (Allemagne).
1897. **SCHOU** (Erik), ingénieur, Hollaendervej, 12, à Copenhague (Danemark).
1881. **SCHOUTE**, professeur à l'Université, à Groningue (Hollande).
1901. **SEE** (Thomas-J.-J.), Observatory Mare Island (Californie).
1896. **SÉGUIER** (J.-A. DE), docteur ès sciences, rue du Bac, 114, à Paris (7°).
1882. **SÉLIVANOFF** (Démétrius), professeur à l'Université, Fontanka, 116, log. 16, à Saint-Petersbourg. S. P.
1900. **SERVANT**, chargé de conférences à la Sorbonne, à Bourg-la-Reine (Seine).
1908. **SHAW** (J.-B.), professeur à l'Université, West California, 901, Ave Urbana (Illinois, États-Unis).
1912. **SIRE**, docteur ès sciences, rue Royer-Collard, 4, à Paris (5°).
1900. **SPARRE** (comte DE), doyen de la Faculté catholique des Sciences, avenue de la Bibliothèque, 7, à Lyon. S. P.
1909. **SPEISER** (Andreas), privat-docent à l'Université, Stephansplan, 7, à Strasbourg (Allemagne).
1912. **STECKER** (H.-F.), professeur de Mathématiques, à Pensylvania State College, Miles St. 306 (Pensylvanie, États-Unis).
1912. **STEINHAUS** (H.), docteur de l'Université de Göttingen, à Jaslo (Rynek) (Autriche-Hongrie).
1879. **STEPHANOS**, professeur à l'Université, rue Solon, 20, à Athènes (Grèce).
1898. **STÖRNER**, professeur à l'Université, Cort Adelers gade, 12, à Christiania (Norvège).
1904. **SUDRIA**, directeur de l'École préparatoire à l'École supérieure d'électricité, rue de Staël, 26, à Paris (14°).
1904. **SUNDMAN**, maître de conférences à l'Université, Fredriksgatan, 19, à Helsingfors (Finlande).
1872. **SYLOW**, professeur à l'Université, Majorstuveien, 16 III, à Christiania (Norvège). S. P.
1882. **TARRY** (G.), membre de la Société Philomathique de Paris, boulevard de Strasbourg, 182, au Havre. S. P.
1899. **THYBAUT**, professeur au lycée Henri IV, boulevard St-Germain, 50, à Paris (5°).
1910. **TIMOCHENKO**, professeur à l'Institut Empereur Alexandre II, à Kiew (Russie).
1912. **TOUCHARD**, ingénieur des Arts et Manufactures, boulevard Haussmann, 15, à Paris (8°).
1910. **TRAYNARD**, professeur à la Faculté des Sciences de Besançon.
1872. **TRESCA**, ingénieur en chef des ponts et chaussées en retraite, rue du Général-Henrion-Berthier, 7, à Neuilly-sur-Seine (Seine).
1896. **TRESSE**, professeur au collège Rollin, rue Mizon, 6, à Paris (15°).
1907. **TRIPIER** (H.), licencié ès sciences, rue Alphonse-de-Neuville, 17, à Paris (17°).
1911. **TURRIÈRE**, docteur ès sciences, professeur au lycée de Poitiers.
1893. **VALLÉE-POUSSIN** (Ch.-J. DE LA), membre de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, professeur à l'Université, rue de la Station, 149, à Louvain (Belgique).

Date
de
dmission.

1904. VANDEUREN, professeur à l'École militaire, avenue Macan, 16, à Bruxelles.
1905. VAN VLECK, professeur de Mathématiques, University of Wisconsin, à Madison (Wisconsin, États-Unis).
1897. VASSILAS-VITALIS (J.), professeur à l'Ecole militaire supérieure, rue Epicure, 13, à Athènes (Grèce).
1898. VASSILIEF, membre du Conseil d'État, Vassili Ostrow ligne 12, m. 19, à Saint-Petersbourg (Russie).
1909. VEIL (M^{lle} S.), licenciée ès sciences, boulevard de Strasbourg, 55, à Paris (10°).
1901. VESSIOT, professeur à la Faculté des Sciences, boulevard Raspail, 234, à Paris (14°).
1911. VILLAT, maître de conférences à l'Université de Montpellier.
1888. VOLTERRA (Vito), professeur à l'Université, via in Lucina, 17, à Rome.
1900. VUIBERT, éditeur, boulevard Saint-Germain, 63, à Paris (5°).
1880. WALCKENAER, ingénieur en chef des mines, boulevard St-Germain, 218, à Paris (7°).
1879. WEILL, directeur du collège Chaptal, boulevard des Batignolles, 45, à Paris (8°).
1906. WILSON (E.-B.), professeur à l'Institut de technologie, à Boston (Massachusetts, États-Unis).
1911. WINTER, avenue d'Iéna, 66, à Paris (16°).
1909. WOODS (F.-S.), professeur à l'Institut de Technologie, à Boston (Massachusetts, États-Unis).
1878. WORMS DE ROMILLY, inspecteur général des mines, en retraite, quai de Passy, 14, à Paris (16°).
1912. YOUNG (W.-H.), membre de la Société Royale de Londres, professeur à l'Université de Liverpool, à la Nonette de la Forêt, Genève (Suisse).
1882. ZABOUDSKI, membre du Comité d'artillerie et professeur à l'Académie d'Artillerie Znamenskaïa, 22, à Saint-Petersbourg (Russie).
1890. ZARENBA, professeur à la Faculté de Philosophie de l'Université, rue Sw. Anny, 12, à Cracovie (Autriche).
1903. ZERVOS, professeur agrégé à l'Université, rue Acharnon, 41, à Athènes (Grèce).
1881. ZEUTHEN, professeur à l'Université, Forchhammers Vej. 12, à Copenhague (Danemark).
1898. ZIWET, professeur de Mathématiques à l'Université de Michigan, South Ingalls street, 644, à Ann Arbor (Michigan, États-Unis).
1911. ZOARD DE GÉOCZE, professeur à l'Université, V. Ker főréal, à Budapest (Hongrie).
1909. ZORETTI, professeur de Mécanique à la Faculté des Sciences de Caen.

Membres décédés en 1912 : MM. COMBEBIAC, HABICH, LÉVY (L.), POINCARÉ, ROUART, TOUCHE.

SOCIÉTAIRES PERPÉTUELS DÉCÉDÉS.

BENOIST. — BIENAYMÉ. — BISCHOFFSHEIM. — BORCHARDT. — CANET. — CHASLES.
CLAUDE-LAFONTAINE. — GAUTHIER-VILLARS. — HALPHEN. — HERMITE. — HIRST.
LAFFON DE LADÉBAT. — MANNHEIM. — PERRIN (R.). — POINCARÉ. — RAFFY.
TANNERY (PAUL). — TCHERICHEF. — VIELLARD.

LISTE

DES

PRÉSIDENTS DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

DEPUIS SA FONDATION.

	MM.
1873	CHASLES.
1874	LAFFON DE LADÉBAT.
1875	BIENAYMÉ.
1876	DE LA GOURNERIE.
1877	MANNHEIM.
1878	DARBOUX.
1879	O. BONNET.
1880	JORDAN.
1881	LAGUERRE.
1882	HALPHEN.
1883	ROUCHÉ.
1884	PICARD.
1885	APPELL.
1886	POINCARÉ.
1887	FOURET.
1888	LAISANT.
1889	ANDRÉ (D.).
1890	HATON DE LA GOUPIILLIÈRE.
1891	COLLIGNON.
1892	VICAIRE.
1893	HUMBERT.

	MM.
1894	PICQUET.
1895	GOURSAT.
1896	KÉNIGS.
1897	PICARD.
1898	LECORNU.
1899	GUYOU.
1900	POINCARÉ.
1901	D'OCAGNE.
1902	RAFFY.
1903	PAINLEVÉ.
1904	CARVALLO.
1905	BOREL.
1906	HADAMARD.
1907	BLUTEL.
1908	PERRIN (R.).
1909	BIOCHE.
1910	BRICARD.
1911	LÉVY (L.).
1912	ANDOYER.
1913	COSSERAT (F.).

Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels
la Société mathématique de France échange son Bulletin.

Amsterdam.....	Académie Royale des Sciences d'Amsterdam.	Pays-Bas.
Amsterdam.....	Société mathématique d'Amsterdam.	Pays-Bas.
Amsterdam.....	<i>Revue semestrielle des publications mathématiques.</i>	Pays-Bas.
Bâle.....	Naturforschende Gesellschaft.	Suisse.
Baltimore.....	<i>American Journal of Mathematics.</i>	États-Unis.
Berlin.....	Académie des Sciences de Berlin.	Allemagne.
Berlin.....	<i>Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.</i>	Allemagne.
Berlin.....	<i>Journal für die reine und angewandte Mathematik.</i>	Allemagne.
Bologne.....	Académie des Sciences de Bologne.	Italie.
Bordeaux.....	Société des Sciences physiques et naturelles.	France.
Bruxelles.....	Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.	Belgique.
Bruxelles.....	Société scientifique de Bruxelles.	Belgique.
Calcutta.....	Calcutta mathematical Society.	Inde anglaise.
Cambridge.....	Cambridge philosophical Society.	Grande-Bretagne.
Christiania.....	<i>Archiv for Mathematik og Naturvidenskab.</i>	Norvège.
Coïmbre.....	<i>Annaes scientificos da Academia Polytechnica do Porto.</i>	Portugal.
Copenhague.....	<i>Nyt Tidsskrift for Mathematik.</i>	Danemark.
Copenhague.....	<i>Det Kongelige danske videnskabernes selskabs Skrifter.</i>	Danemark.
Cracovie.....	Académie des Sciences de Cracovie.	Autriche.
Delft.....	Académie technique.	Pays-Bas.
Édimbourg.....	Société Royale d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Édimbourg.....	Société mathématique d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Gand.....	<i>Mathesis.</i>	Belgique.
Göttingen.....	Société Royale des Sciences de Göttingen.	Allemagne.
Halifax.....	Nova Scotian Institute of Science.	N ^{lle} -Écosse(Canada)
Hambourg.....	Société mathématique de Hambourg.	Allemagne.
Harlem.....	Société hollandaise des Sciences.	Hollande.
Helsingfors.....	Société des Sciences de Finlande.	Finlande.
Kansas.....	Université de Kansas.	États-Unis.
Kasan.....	Société physico-mathématique.	Russie.
Kharkow.....	Annales de l'Université.	Russie.
Kharkow.....	Société mathématique de Kharkow.	Russie.
Leipzig.....	Société Royale des Sciences de Saxe.	Allemagne.
Leipzig.....	<i>Mathematische Annalen.</i>	Allemagne.
Leipzig.....	<i>Archiv der Mathematik und Physik.</i>	Allemagne.
Liège.....	Société Royale des Sciences.	Belgique.
Livourne.....	<i>Periodico di Matematica.</i>	Italie.
Londres.....	Société astronomique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres.....	Société mathématique de Londres.	Grande-Bretagne.

Londres.....	Société Royale de Londres.	Grande-Bretagne.
Luxembourg.....	Institut grand ducal de Luxembourg.	Luxembourg.
Marseille.....	<i>Annales de la Faculté des Sciences.</i>	France.
Mexico.....	Sociedad científica <i>Antonio Alzate.</i>	Mexique.
Milan.....	Institut Royal lombard des Sciences et Lettres.	Italie.
Moscou.....	Société mathématique de Moscon.	Russie.
Munich.....	Académie des Sciences de Munich.	Bavière.
Naples.....	Académie Royale des Sciences physiques et mathématiques de Naples.	Italie.
New-Haven.....	Académie des Sciences et Arts du Connecticut.	États-Unis.
New-York.....	American mathematical Society.	États-Unis.
Odessa.....	Société des naturalistes de la Nouvelle-Russie.	Russie.
Palerme.....	<i>Rendiconti del Circolo matematico.</i>	Italie.
Paris.....	Académie des Sciences de Paris.	France.
Paris.....	Association française pour l'avancement de Sciences.	France.
Paris.....	Société philomathique de Paris.	France.
Paris.....	<i>Bulletin des Sciences mathématiques.</i>	France.
Paris.....	<i>Journal de l'École Polytechnique.</i>	France.
Paris.....	Institut des Actuaire français.	France.
Paris.....	<i>Intermédiaire des Mathématiciens.</i>	France.
Pise.....	École Royale Normale supérieure de Pise.	Italie.
Pise.....	Université Royale de Pise.	Italie.
Pise.....	<i>Il Nuovo Cimento.</i>	Italie.
Prague.....	Académie des Sciences de Bohême.	Autriche.
Prague.....	<i>Casopis pro pěstování matematiky a fysiky.</i>	Autriche.
Prague.....	Société mathématique de Bohême.	Autriche.
Princeton.....	<i>Annals of Mathematics.</i>	New-Jersey, États-Unis
Rennes.....	<i>Travaux de l'Université.</i>	France.
Rome.....	Académie Royale des <i>Lincei.</i>	Italie.
Rome.....	Società italiana delle Scienze.	Italie.
Rome.....	Società per il progresso delle Scienze.	Italie.
Saint-Petersbourg.	Académie Impériale des Sciences.	Russie.
Sophia.....	<i>Annuaire de l'Université de Sophia.</i>	Bulgarie.
Stockholm.....	<i>Acta mathematica.</i>	Suède.
Stockholm.....	<i>Archiv for Matematik.</i>	Suède.
Stockholm.....	<i>Bibliotheca mathematica.</i>	Suède.
Tokyo.....	Mathematico-physical Society.	Japon.
Toulouse.....	<i>Annales de la Faculté des Sciences.</i>	France.
Turin.....	Académie des Sciences.	Italie.
Upsal.....	Société Royale des Sciences d'Upsal.	Suède.
Varsovie.....	Prace Matematyczne Fizyczne.	Russie.
Venise.....	Institut Royal des Sciences, Lettres et Arts.	Italie.
Vienne.....	Académie Impériale des Sciences de Vienne.	Autriche.
Vienne.....	<i>Monatshefte für Mathematik und Physik.</i>	Autriche.
Zagreb (Agram)..	Académie Sud-Slave des Sciences et Beaux-Arts	Autriche-Hongrie
Zurich.....	Naturforschende Gesellschaft.	Suisse.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 23 OCTOBRE 1912.

PRÉSIDENCE DE M. ANDOYER.

M. le Président prononce quelques paroles au sujet de la mort de M. H. Poincaré et de celle de M. L. Lévy et associe la Société mathématique au deuil de leurs familles.

Sur sa proposition, la séance est levée en signe de deuil.

SÉANCE DU 13 NOVEMBRE 1912.

PRÉSIDENCE DE M. CARTAN.

Élection :

Est élu, à l'unanimité, membre de la Société, M. W.-H. Young, présenté par MM. E. Picard et H. Lebesgue.

Communication :

M. Bioche : *Sur l'aire latérale du cône de révolution tronqué.*

L'auteur établit la formule

$$\Sigma = \pi \frac{SA + SA'}{2} \sqrt{SA \cdot SA'} \sin \frac{1}{2} \widehat{ASA'}.$$

dans laquelle Σ désigne l'aire latérale, S le sommet du cône, A et A' les extrémités du grand axe de l'ellipse de section.

SÉANCE DU 27 NOVEMBRE 1912.

PRÉSIDENTE DE M. ANDOYER.

Élection :

Est élu, à l'unanimité, membre de la Société, M. J. Touchard, présenté par MM. Appell et d'Ocagne.

Communications :

M. P. Fatou : *Sur la convergence absolue des séries trigonométriques.*

L'auteur avait montré dans sa Thèse (*Acta math.*, t. XXX, p. 398) l'intérêt que présente l'étude des points de convergence

absolue des séries trigonométriques et avait établi qu'une série $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$

où $A_n = a_n \cos nx + b_n \sin nx$ ne peut être absolument convergente pour les points d'un intervalle, si petit soit-il, sans que la série

$\sum \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ converge. Récemment M. Denjoy et M. Lusin sont

revenus sur ce sujet dans les *Comptes rendus* et ont montré que la

série $\sum \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ est nécessairement convergente si l'ensemble des

points de convergence absolue a une mesure non nulle. M. Fatou

établit d'abord ce théorème en ne s'appuyant que sur les principes

fondamentaux de la théorie de la mesure. Il remarque ensuite, à

l'aide de la transformation très simple

$$A_n(x_0 + h) + A_n(x_0 - h) = 2A_n(x_0) \cos nh,$$

que, si x_0 est un point de convergence absolue, les points de convergence absolue, de convergence ordinaire, de divergence, de sommabilité; les arcs de convergence uniforme sont deux à deux symétriques par rapport à x_0 . Donc, si les points de convergence absolue sont en nombre fini, ce sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle de rayon un; s'ils sont en nombre infini, leur ensemble est partout dense sur la circonférence. Une dernière remarque, susceptible d'applications diverses, permet de retrouver ce résultat de M. Lusin que, dans l'hypothèse de l'existence d'une infinité de points de convergence absolue, la mesure de l'ensemble des points de convergence est égale à 0 ou à 2π .

M. H. Lebesgue : *Sur des cas d'impossibilité du problème de Dirichlet ordinaire.*

Soit un domaine D et une fonction f continue sur la frontière F de D , le problème de Dirichlet ordinaire consiste à trouver une fonction harmonique V continue dans D et sur F et se réduisant sur F à la fonction f donnée. Lorsque la fonction V existe quelle que soit la fonction continue f on dit que le problème de Dirichlet est possible pour le domaine D .

L'auteur rappelle qu'il a démontré dans les *Rendiconti* de Palerme que le problème de Dirichlet est possible pour tous les domaines plans qui sont des ensembles ouverts bornés et tels que tout point de leur frontière appartienne à un continu frontière. De sorte, par exemple, que tous les domaines limités par un nombre fini de courbes ordinaires rentrent dans cette catégorie. Le cas de l'espace conduit à des résultats tout différents; il existe dans l'espace des domaines simplement connexes limités par des surfaces de révolution dont la méridienne est une courbe analytique présentant un seul point singulier et pour lesquelles le problème de Dirichlet est impossible.

Considérons un segment OA porteur d'une masse attirante dont la densité, en chaque point P , est égale à la distance OP . Les surfaces équipotentiellles $V = \alpha$ sont des surfaces de révolution entourant le segment attirant; pour $\alpha \geq 1$ elles passent par le point O , en lequel $V = 1$. Soit D le domaine limité par les deux surfaces équipotentiellles $V = 2$, $V = \frac{1}{2}$; si l'on essaie de résoudre le problème de Dirichlet pour ce domaine avec, comme fonction continue f sur sa frontière, une fonction égale au potentiel, sauf en O où l'on prendra $f = 2$ pour la continuité, on voit facilement que, si ce problème avait une solution, ce serait la fonction potentielle dont on est parti, laquelle ne satisfait pas en O aux conditions de continuité du problème.

Le problème de Dirichlet est donc impossible pour ce domaine D . En modifiant légèrement l'exemple indiqué on arriverait à un domaine simplement connexe de la nature indiquée ci-dessus.

M. P. Montel : *Sur quelques généralisations nouvelles des théorèmes de M. Picard.*

Dans un travail récent ⁽¹⁾, l'auteur a étudié systématiquement les

⁽¹⁾ *Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent dans un domaine des valeurs exceptionnelles* (Annales de l'École normale, 1912, p. 487).

familles de fonctions holomorphes dans un domaine D où elles ne prennent ni la valeur zéro, ni la valeur un, ou bien ne prennent qu'un nombre fini de fois ces valeurs. Il en a déduit des démonstrations et des extensions nouvelles des propositions classiques de MM. Picard, Landau, Schottky.

Il s'occupe maintenant des familles de fonctions méromorphes dans un domaine D . Soient m, n, p des entiers dont la somme des inverses est inférieure à l'unité et considérons les équations

$$(\alpha) \quad f(x) = 0 \quad f(x) = 1 \quad f(x) = \infty.$$

Les racines de la première équation, dont l'ordre de multiplicité est divisible par m , seront appelées *régulières* et les autres seront dites *irrégulières*. Les mêmes dénominations s'appliquent aux autres équations en remplaçant m par n ou par p . En substituant une fonction de Schwarz à la fonction modulaire qui joue, dans ces questions, un rôle fondamental, on démontre, avec MM. Carathéodory et Landau⁽¹⁾, que la famille des fonctions $f(x)$ méromorphes dans un domaine D où toutes les racines des équations (α) sont régulières, forment une famille *normale*, c'est-à-dire que toute suite infinie de fonctions de la famille admet au moins une fonction limite méromorphe qui peut être une constante finie ou infinie. On est alors conduit aux propositions suivantes :

I. Si $f(x)$ est méromorphe dans tout le plan, l'une au moins des équations (α) admet une racine irrégulière.

II. Si

$$a_0 + a_1 x + \dots \quad (a_1 \neq 0)$$

est le développement taylorien d'une fonction $f(x)$ autour de l'origine, il existe un nombre R dépendant de a_0 et a_1 seulement, tel que, dans tout cercle de centre origine et de rayon plus grand que R , une des équations (α) ait une racine irrégulière, ou la fonction $f(x)$ un point singulier essentiel.

III. Dans le voisinage d'un point singulier essentiel isolé d'une fonction $f(x)$, l'une au moins des équations (α) admet une infinité de racines irrégulières.

Dans le cas où $m = n = p = \infty$, on retrouve des propositions classiques.

⁽¹⁾ Beiträge zur Konvergenz von Funktionenfolgen (Sitzungsberichte der Akad. d. Wissenschaften, 1911, p. 605).

M. Bioche : *Sur les courbes de largeur constante.*

L'auteur présente le tracé de la courbe enveloppe de la droite

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - (8 + \cos 3 \alpha) = 0.$$

Cette courbe est convexe, chaque normale est orthogonale à la courbe aux deux points où elle la coupe et la distance de ces points est 16. La longueur de la courbe est 16π . Euler avait signalé dans un Mémoire de l'Académie de Saint-Petersbourg, daté de 1778, des courbes de cette espèce possédant des propriétés qu'on aurait pu croire caractéristiques du cercle.

SÉANCE DU 11 DÉCEMBRE 1912.

PRÉSIDENCE DE M. ANDOYER.

Communication :

M. Halphen : *Sur un problème d'énumération.*

SÉANCE DU 18 DÉCEMBRE 1912.

PRÉSIDENCE DE M. ANDOYER.

Élection :

Est élu à l'unanimité M. Tage Berger, présenté par MM. von Koch et Émile Borel.

Communications :

M. E. Cahen : *Sur un théorème généralisation des lois de réciprocité.*

M. Kellogg : *Sur l'indépendance linéaire des fonctions de plusieurs variables.*

Il semble qu'on n'ait pas encore précisé les conditions pour l'indépendance linéaire des fonctions de plusieurs variables, au moins pas les conditions différentielles. Les conditions de Gram permettent de décider la question moyennant des intégrales définies, mais il m'a paru

utile de donner des conditions analogues à celles qui, pour le cas d'une variable indépendante, se rattachent aux déterminants de Wronski.

Pour plus de simplicité dans l'écriture, je me borne à des fonctions de deux variables. Les résultats sont généraux.

Soient $f_1(x, y), f_2(x, y), \dots, f_n(x, y)$ des fonctions d'une seule détermination en chaque point d'un domaine D. Nous admettons que ce domaine est tel qu'on puisse passer de chacun de ses points à chaque autre par des chemins continus qui contiennent seulement des points intérieurs à D.

Appelons $M_n(f_1, f_2, \dots, f_n)$ la matrice

$$\begin{vmatrix} f_1, & \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} & \dots, & \frac{\partial^{n-1} f_1}{\partial x^{n-1}} & \frac{\partial^{n-1} f_1}{\partial x^{n-2} \partial y} & \dots, & \frac{\partial^{n-1} f_1}{\partial y^{n-1}} \\ f_2, & \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} & \dots, & \frac{\partial^{n-1} f_2}{\partial x^{n-1}} & \frac{\partial^{n-1} f_2}{\partial x^{n-2} \partial y} & \dots, & \frac{\partial^{n-1} f_2}{\partial y^{n-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots, & \dots & \dots & \dots, & \dots \\ f_n, & \frac{\partial f_n}{\partial x} & \frac{\partial f_n}{\partial y} & \frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2} & \dots, & \frac{\partial^{n-1} f_n}{\partial x^{n-1}} & \frac{\partial^{n-1} f_n}{\partial x^{n-2} \partial y} & \dots, & \frac{\partial^{n-1} f_n}{\partial y^{n-1}} \end{vmatrix}.$$

Cette matrice contient toutes les dérivées de $f_1, f_2, \dots, f_n$ des ordres 1, 2, ..., $n - 1$.

Pour les fonctions analytiques en chaque point de D, la condition nécessaire et suffisante pour une relation linéaire avec des coefficients constants non tous nuls entre $f_1, f_2, \dots, f_n$ est que le rang de $M_n(f_1, f_2, \dots, f_n)$ soit constamment moindre que n .

Le rang de M_n est évidemment fonction de x et y . Si nous appelons le maximum de cette fonction dans D le rang de M_n en D, nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Si r est le rang de M_n en D, toutes les n fonctions sont en D des combinaisons linéaires avec coefficients constants de r de ces fonctions, mais non pas d'un nombre moindre de ces fonctions.

Pour les fonctions non analytiques, nous devons supposer l'existence des dérivées qui se trouvent dans M_n . Nous admettons de plus que ces dérivées sont finies et indépendantes de l'ordre de différenciation.

Si le rang de $M_n(f_1, f_2, \dots, f_n)$ en D est $n - 1$, tandis qu'à chaque point de D le rang de $M_{n-1}(f_1, f_2, \dots, f_{n-1})$ est aussi $n - 1$, il existe une relation linéaire avec coefficients constants entre les f_i et le coefficient de f_n sera différent de zéro.

Remarques :

1° Il ne semble pas nécessaire d'insister sur le fait que les conditions du déterminant de Wronski formé avec les dérivées par rapport à x et le déterminant formé avec les dérivées par rapport à y soient nuls ne sont pas suffisantes pour une relation linéaire entre les f avec des coefficients constants. Les fonctions $(x-1)$, $(y-1)$, $(xy-1)$ le montrent.

2° Pasch (*Journal für reine u. angewandte Math.*) examine des déterminants

$$\begin{vmatrix} f_1 & \partial f_1 & \dots & \partial^{n-1} f_1 \\ f_2 & \partial f_2 & \dots & \partial^{n-1} f_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n & \partial f_n & \dots & \partial^{n-1} f_n \end{vmatrix}$$

où

$$\partial f_1 = \frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k,$$

comme extensions des déterminants de Wronski. Mais, il n'est pas suffisant que ce déterminant soit nul pour qu'il existe une relation linéaire, comme le montrent les trois fonctions $x, y, 1$.

SÉANCE DU 8 JANVIER 1913.

PRÉSIDENTE DE M. ANDOYER.

La Société, réunie en Assemblée générale, procède au renouvellement du Bureau et d'une partie du Conseil; elle entend le Rapport de la Commission des comptes et en approuve les conclusions à l'unanimité.

Élections :

Sont élus à l'unanimité, membres de la Société, M. Korn, présenté par MM. Picard et Montel, et M. Malaise, présenté par MM. Laisant et Neuberg.

Communications :

M. Sire : *Sur la puissance de l'ensemble des points singuliers transcendants des fonctions inverses des fonctions entières.*

La fonction entière $h(y) = c + iyg(y^2)$, où

$$g(y^2) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{y^{2\nu}}{\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma(1 + \nu\sigma)} \quad (\sigma > 0)$$

et où c est un nombre positif supérieur à $\beta \left[\beta = \frac{\pi}{\Gamma\left(1 - \frac{\sigma}{2}\right)} \right]$ converge uniformément vers le nombre positif $c + \beta$ lorsque y s'éloigne à l'infini en restant à l'intérieur de l'un des deux angles :

$$\frac{\pi\sigma}{4} + \frac{\varepsilon}{2} \leq 0 \leq \pi - \frac{\pi\sigma}{4} - \frac{\varepsilon}{2};$$

$$\pi + \frac{\pi\sigma}{4} + \frac{\varepsilon}{2} \leq 0 \leq 2\pi - \frac{\pi\sigma}{4} - \frac{\varepsilon}{2} \quad (\varepsilon \text{ nombre positif arbitraire}),$$

tandis qu'elle converge uniformément vers le nombre positif $c - \beta$ lorsque y s'éloigne à l'infini en restant à l'intérieur de l'autre angle.

Soient C le cercle concentrique à l'origine O et de rayon 1, C_1 la demi-circonférence de ce cercle située au-dessus de l'axe des quantités réelles. Divisons cette demi-circonférence C_1 en trois parties égales et excluons tous les points intérieurs au sens étroit à l'arc médian, de même que tous les points intérieurs au sens étroit à l'arc de la circonférence C diamétralement opposé au précédent. Opérons de même pour chacun des arcs restants de C et continuons ainsi indéfiniment. Nous désignerons par E l'ensemble des points restants de la circonférence, les extrémités de C_1 étant supposées également enlevées. Le nombre des arcs de la demi-circonférence C_1 enlevés pendant la $n^{\text{ième}}$ opération est égal à $\lambda(n) = 2^{n-1}$, nous désignerons par σ_n leur longueur commune et par $\theta_{n,j}$ l'angle que fait la demi-droite joignant le point O au milieu de l'un de ces arcs avec l'axe des quantités réelles et positives. Posons

$$f_n(y) = \sum_{j=1}^{\lambda(n)} f_{n,j}(y)$$

où $f_{n,j}(y)$ est la fonction qui se déduit de la fonction $h(y)$ considérée plus haut, en remplaçant σ par σ_n , y par $ye^{-i\theta_{n,j}}$, et c par le nombre $c_{n,j}$ convenablement choisi, et désignons par η_n le maximum de $f_n(y)$ dans la région du plan dont tous les points sont extérieurs au sens large aux angles ayant l'origine O pour sommet et interceptant entre leurs côtés les arcs de la circonférence C exclus à la $n^{\text{ième}}$ opération. Si nous déterminons la suite des nombres positifs $\varphi(1), \varphi(2), \dots$,

$\varphi(n)$, . . . de telle façon que $f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(y)}{\varphi(n)}$ soit une fonction entière

et que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n}{\varphi(n)}$ soit une série convergente, la fonction $f(y)$ convergera vers l'infini lorsque y s'éloignera à l'infini en suivant un rayon OM joignant l'origine au milieu d'un des arcs de la circonférence C exclus et elle convergera vers un nombre positif μ lorsque y convergera vers l'infini en suivant une demi-droite OL joignant l'origine à un point quelconque de E. A deux rayons OL distincts correspondront deux nombres μ distincts, l'ensemble des limites μ aura donc la puissance du continu. Il en résulte que l'ensemble des points singuliers transcendants de la fonction inverse de cette fonction $f(y)$ a la puissance du continu.

M. Andoyer : *Sur un changement de variables.*

Si dans le mouvement elliptique d'une planète, on désigne par ε , u , M l'excentricité, l'anomalie excentrique et l'anomalie moyenne; puis que l'on pose

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{\varepsilon}{2} e^{iM}, & y_1 &= \frac{\varepsilon}{2} e^{iu}, \\ \lambda_2 &= \frac{\varepsilon}{2} e^{-iM}, & y_2 &= \frac{\varepsilon}{2} e^{-iu},\end{aligned}$$

en nommant e la base des logarithmes népériens et i l'imaginaire $\sqrt{-1}$; ces variables seront liées entre elles par les relations

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= y_1 e^{y_2 - y_1}, \\ \lambda_2 &= y_2 e^{y_1 - y_2}.\end{aligned}$$

Pour $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, y_1 et y_2 se réduisent à zéro; de plus, le déterminant fonctionnel de λ_1 et λ_2 par rapport à y_1 et y_2 n'est autre que $1 - y_1 - y_2$.

Par suite, y_1 , et y_2 sont des fonctions holomorphes de λ_1 et λ_2 lorsque ces variables sont de modules suffisamment petits. Il s'agit de déterminer les rayons des cercles de convergence associés pour les développements de y_1 et y_2 en séries doubles procédant suivant les puissances de λ_1 et λ_2 .

La question est facile à résoudre si l'on admet que la convergence a lieu tant que, pour des valeurs quelconques x_1 et x_2 prises à l'intérieur de deux cercles de rayons ρ_1 et ρ_2 , le déterminant fonctionnel $1 - y_1 - y_2$ ne s'annule pas; et l'on retrouve ainsi très aisément, en

les complétant, les résultats classiques sur la convergence des séries du mouvement elliptique ordonnées par rapport aux puissances de l'excentricité.

Mais le vrai problème est de savoir si l'hypothèse admise est exacte ; si cette généralisation des théorèmes bien connus relatifs aux fonctions d'une seule variable est légitime. M. Andoyer pose la question et serait heureux qu'on levât ses scrupules à ce sujet.

RAPPORT DE LA COMMISSION DES COMPTES.

(MM. G. FOURET, G. HUMBERT ; CH. BIOCHE, rapporteur.)

MESSIEURS ET CHERS COLLÈGUES,

Conformément à l'article 16 de nos Statuts et aux articles 33 et 34 de notre Règlement administratif, j'ai l'honneur de vous présenter le résultat de l'examen auquel a procédé la Commission chargée, par votre Conseil d'administration, de vous faire un rapport sur la gestion de notre trésorier et sur la situation morale et financière de notre Société.

Les comptes de l'exercice clos s'étendant du 1^{er} novembre 1911 au 31 octobre 1912, s'établissent comme il suit :

ÉTATS DES RECETTES ET DES DÉPENSES COURANTES.

En caisse au 1 ^{er} novembre 1911.....	1051,19 ^{fr}
---	-----------------------

Recettes.

Cotisations.....	4085,00
Abonnements au <i>Bulletin</i> , vente de Volumes et Tables.....	1441,95
Subvention du Ministère.....	1000,00
Intérêts et revenus.....	1494,20
Total de l'actif.....	<u>9072,34</u>

Dépenses.

Bulletin (t. XL) : composition, impression, bro-	fr
chage, expédition.....	5907,48
Tirages à part.....	421,25
Traitement de l'agent, gratifications.....	490,00
Frais de bureau, frais de poste, divers.....	316,75
Total des dépenses.....	7135,48
Excédent de l'actif au 31 octobre 1912.....	1936,86
Total comme ci-dessus.....	<u>9072,34</u>

PORTEFEUILLE DISPONIBLE.

Il y avait au 31 octobre 1911, à titre de réserve	
disponible, 498 ^{fr} de rente 3 pour 100 sur l'État,	fr
ayant coûté.....	16313,09
Excédent d'actif disponible en espèces.....	<u>1936,86</u>

Réserve inaliénable (art. 13 des Statuts).

La réserve inaliénable se composait, au 1^{er} novembre 1911, de :

1° En portefeuille, 886 ^{fr} de rente 3 pour 100 sur	
l'État et 3 obligations des chemins de fer de	fr
l'Ouest à 3 pour 100, ayant coûté ensemble.....	24947,46
2° En espèces.....	<u>350,33</u>

Dans le cours de l'exercice 1911-1912 il a été en-	
caissé pour droits d'entrée de nouveaux membres,	fr
ou versements sur une cotisation perpétuelle...	210,00
ce qui constituait, au 31 octobre 1912, un total	
en espèces de.....	<u>560,33</u>

A titre de renseignement, je mentionnerai l'achat, sur l'excédent d'actif disponible, de deux obligations des Chemins de fer du Sud, achat effectué postérieurement au 1^{er} novembre 1912 et qui, par suite, ne devait pas être mentionné dans le bilan précédemment établi.

Dans ce bilan j'ai donné, comme on l'avait fait dans les rapports antérieurs, le prix d'achat des valeurs appartenant à la Société mathématique de France; par suite de la dépréciation des valeurs, les titres figurant au portefeuille disponible se trouvent représenter un capital

inférieur au prix d'achat. Ce prix d'achat se montait à 16 313^{fr},09 et la valeur de l'ensemble de nos titres, au 23 décembre 1912, n'était que de 14 807^{fr},20. Mais heureusement la situation financière de la Société est loin de nécessiter une vente des titres actuellement en portefeuille.

En effet, les dépenses courantes pour l'exercice 1911-1912, sont un peu inférieures aux recettes, même en faisant abstraction du reliquat en espèces existant au 1^{er} novembre 1911. Cela tient surtout, d'une part à une légère diminution du prix de revient du *Bulletin*, d'autre part à une augmentation de la subvention donnée par le Ministère de l'Instruction publique. Celui-ci ayant supprimé la subvention attribuée à la Commission du Répertoire bibliographique, une part de cette subvention a été reportée sur la subvention à la Société mathématique de France, qui a passé ainsi de 400^{fr} à 1000^{fr}.

Nous pouvons donc continuer, sans inconvénient pour nos finances, à distribuer, comme on l'a fait l'an dernier, les fascicules mensuels donnant l'indication des Communications à l'ordre du jour, avec un résumé des Communications faites dans les séances antérieures et les différents renseignements qu'il peut être utile de porter à la connaissance des membres de la Société. Ces fascicules semblent d'ailleurs intéresser beaucoup de nos collègues, et être utiles pour la propagande.

Le recouvrement des cotisations s'est effectué de façon assez satisfaisante; le total des cotisations perçues qui avait un peu fléchi l'an dernier, est remonté au-dessus de ce qu'il était en 1910. Il y avait, en 1910, 4005^{fr} de cotisations, en 1911, 3918^{fr},50, et il y a 4085^{fr} en 1912.

Notre trésorier, M. Servant, vous prie de vouloir bien l'autoriser à remettre une gratification de 100^{fr} à la personne qui a été chargée par lui de mettre en ordre la comptabilité.

Nous vous prions de voter des remerciements à notre trésorier, ainsi qu'aux secrétaires MM. Cartan et Montel qui donnent leurs soins à l'administration de la Société et à la publication du *Bulletin*, et d'approuver, avec les comptes qui vous sont présentés, les conclusions du présent rapport.

CH. BIOCHE.

SÉANCE DU 22 JANVIER 1913.

PRÉSIDENTE DE M. F. COSSERAT.

Élections :

Sont élus à l'unanimité membres de la Société : M. Bouligand, présenté par MM. Borel et Montel, et M. Delville, présenté par MM. Baire et Montel.

Communications :

M. R. Bricard : *Sur les mouvements plans à deux paramètres doublement décomposables.*

Soient A_0 une figure fixe, A_1 une figure de grandeur invariable dont la position par rapport à A_0 dépend d'un paramètre, A_2 une seconde figure de grandeur invariable dont la position par rapport à A_1 dépend d'un nouveau paramètre indépendant du premier. Si l'on fait varier les deux paramètres de toutes les manières possibles, A_2 se trouve animée par rapport à A_0 d'un mouvement à deux degrés de liberté (ou à deux paramètres), d'une nature particulière, et que j'appellerai avec M. Kœnigs *mouvement décomposable* (on peut de même définir des mouvements décomposables, dont le degré de liberté dépasse le second).

M. Kœnigs m'a signalé qu'il serait intéressant de rechercher s'il existe des mouvements à deux paramètres décomposables de plus d'une manière, c'est-à-dire tels que la figure intermédiaire A_1 , dont il est question plus haut, puisse être au moins d'une manière remplacée par une autre, le mouvement à deux paramètres de A_2 restant le même.

Le problème conduit à une équation fonctionnelle compliquée, même dans le cas des mouvements plans auxquels j'ai, jusqu'ici, borné mes recherches (*voir* cependant, plus loin, le n° 4). J'ai obtenu diverses solutions, parmi lesquelles je citerai les suivantes :

1. Soit ABCD un parallélogramme. Construisons huit roues dentées $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2$; deux roues désignées par la même lettre grecque affectée d'indices différents étant solidaires l'une de l'autre et ayant pour centre commun le sommet du parallélogramme désigné par la lettre latine correspondante. Les roues α_1 et β_1 et γ_2, γ_1 et δ_2, δ_1 et α_2 engrènent en des points qui appartiennent natu-

rellement aux côtés du parallélogramme et qu'il faut supposer en ligne droite.

Cela posé, si le parallélogramme ABCD, dont les côtés ont des longueurs invariables, est susceptible de déformation, on constate que le mécanisme que je viens de définir possède une liberté *du second degré*. Autrement dit, les angles du parallélogramme et l'orientation de l'une des roues par rapport à l'un des côtés qui se coupent en son centre, peuvent varier indépendamment. Si donc on fixe le système A_0 des roues α_1 et α_2 , la figure A_2 constituée par le système des roues γ_1 et γ_2 se trouve posséder un mouvement à deux paramètres doublement décomposable. Le rôle de la figure A_1 peut être joué, soit par le système (β_1, β_2) , soit par le système (δ_1, δ_2) . Dans l'un et l'autre cas, A_1 est animée d'un mouvement épicycloïdal par rapport à A_0 , et A_2 est animée d'un mouvement épicycloïdal par rapport à A_1 .

On peut donner au mouvement à deux paramètres que je viens de définir le nom de *mouvement doublement épicycloïdal*. A la condition près que le cercle, base du second des mouvements épicycloïdaux ordinaires en lesquels il se décompose, soit concentrique au cercle roulant du premier mouvement, il est aussi général que possible. Le fait qu'un tel mouvement est doublement décomposable est à rapprocher du théorème bien connu sur la double génération des épicycloïdes.

2. On peut constituer un mécanisme analogue au précédent et jouissant des mêmes propriétés, en remplaçant le parallélogramme ABCD par un contre-parallélogramme, les points de contact des roues dentées étant cette fois assujettis à se trouver sur une parallèle aux diagonales AC et BD du contre-parallélogramme. Les huit roues sont alors égales deux à deux. Ce mécanisme peut être combiné avec le précédent et l'on trouve un mouvement doublement épicycloïdal particulier décomposable de *quatre* manières différentes.

3. On peut généraliser les mécanismes qui précèdent en remplaçant les roues dentées par des cames en spirale logarithmique. Pour l'indication précise de la construction, je renvoie au travail plus développé que je ferai paraître sur le sujet.

4. Considérons enfin deux quadrilatères articulés ABCD et A'B'C'D', les sommets désignés par une même lettre accentuée ou non étant réunis par une tige rigide, articulée en ces deux sommets. Le mécanisme ainsi constitué est, en général, déformable avec un seul paramètre. Il devient déformable avec deux paramètres quand

tous les quadrilatères de la figure sont des parallélogrammes (cas banal) et, ce qui est plus remarquable, quand ce sont tous des contre-parallélogrammes. On voit alors qu'en fixant AB, la tige C'D' possède un mouvement à deux paramètres décomposable de deux manières différentes, suivant qu'on prend comme figure intermédiaire A'B' ou bien CD ⁽¹⁾.

Il est intéressant de constater que ce dernier mécanisme peut être construit sur la sphère, ce qui conduit à un mouvement autour d'un point fixe, à deux paramètres et doublement décomposable.

M. Zoàrd de Göcze: *Sur l'exemple d'une surface dont l'aire est égale à zéro et qui remplit un cube.*

Les variables réelles et indépendantes u et v variant entre les limites 0 et 1, soient $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$, $\chi(u, v)$ des fonctions uniformes, bornées et continues de ces variables. En désignant par x, y, z des coordonnées rectangulaires,

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v)$$

seront donc les équations d'une surface S.

Nous adoptons pour la définition de l'aire de S la définition donnée par M. Lebesgue dans sa *Thèse*, et nous allons montrer que S peut être telle que son aire est égale à zéro et qu'elle remplit un cube.

Nous montrons d'abord que, lorsque les fonctions φ, ψ, χ ne dépendent que de v , l'aire de S est égale à zéro.

En considérant u et v comme des coordonnées rectangulaires, partageons le carré P

$$0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 1$$

en g^2 carrés, par des droites parallèles respectivement à l'axe des u et à l'axe des v . Partagons chacun de ces deux carrés en deux triangles par la diagonale qui est parallèle à la droite

$$u + v = 0.$$

Le carré P sera donc divisé en $2g^2$ triangles. Soient A, B, C les sommets de l'un de ces triangles. M étant un point de P, désignons par M_0 le point dont les coordonnées x, y, z sont égales à $\varphi(u, v)$.

(1) La figure constituée par ce mécanisme peut être considérée comme la position de l'hexaèdre déformable, ayant pour faces des contre-parallélogrammes, qui a fait l'objet d'un article paru récemment dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (numéro de janvier 1913, p. 24).

$\psi(u, v)$, $\chi(u, v)$ respectivement, u, v étant, bien entendu, les coordonnées de M. Construisons le triangle rectiligne dont les sommets sont A_0, B_0, C_0 . La réunion des $2g^2$ triangles $A_0B_0C_0$ sera une surface polyédrale Δ_g . On prouve facilement que (même dans le cas où φ, ψ, χ dépendent aussi de u) Δ_g est une surface

$$x = \varphi_g(u, v), \quad y = \psi_g(u, v), \quad z = \chi_g(u, v)$$

telle que, pour $g = \infty$, $\varphi_g, \psi_g, \chi_g$ tendent uniformément vers φ, ψ, χ respectivement.

Mais, dans le cas que nous considérons, φ, ψ, χ ne dépendent que de v , chacun des $2g^2$ triangles qui forment Δ_g sera une distance rectiligne ou un point. Car, d'après le choix des A, B, C , deux de ces points ont la même coordonnée u , et ainsi, au moins deux des points A_0, B_0, C_0 coïncident.

Ainsi, l'aire de chacun des $2g^2$ triangles qui forment Δ_g est égale à zéro, donc l'aire de Δ_g est égale à zéro.

Ainsi l'aire de S , qui est par définition la plus petite limite des aires des surfaces polyédrales qui tendent uniformément vers S , est égale à zéro. On sait qu'on peut trouver des fonctions $\bar{\varphi}(v), \bar{\psi}(v), \bar{\chi}(v)$ de v , qui sont uniformes, bornées et continues lorsque v varie entre 0 et 1 et telles que la ligne courbe

$$x = \bar{\varphi}(v), \quad y = \bar{\psi}(v), \quad z = \bar{\chi}(v)$$

remplisse un cube (courbe de M. Peano).

La surface S_1 qui est définie par les équations

$$x = \varphi(u, v) = \bar{\varphi}(v), \quad y = \psi(u, v) = \bar{\psi}(v), \quad z = \chi(u, v) = \bar{\chi}(v)$$

est donc telle que son aire est égale à zéro et qu'elle remplit un cube.

L'exemple est assez banal. Mais on peut en tirer plusieurs conséquences curieuses. Je ne cite qu'une de ces conséquences. En considérant que S_1 remplit un cube, que son aire est égale à zéro et que l'aire de la projection orthogonale d'une surface polyédrale sur un plan est au plus égale à l'aire de la surface polyédrale, on voit que :

La projection orthogonale d'une surface sur un plan quelconque peut avoir une mesure intérieure et plane α (dans le sens de M. Jordan) positive, tandis que la projection orthogonale d'une surface polyédrale qui tend vers la surface, sur le même plan, est plus petite que $\frac{\alpha}{2}$.

Mais il convient de remarquer que la surface S_1 étant, comme il est facile de le voir, telle qu'elle n'est pas une image biunivoque de P , il est très probable que ce fait curieux ne se présente pas pour une surface qui est une image biunivoque de P .

M. Lebesgue: *Observations sur la Communication précédente.*

Le fait, d'énoncé si paradoxal, signalé par M. Zoàrd de Göcze, est cependant d'accord avec l'intuition la plus immédiate, puisque M. Zoàrd de Göcze prouve en somme seulement que l'aire d'une courbe est nulle, quelque compliquée que soit cette courbe. Quant à la question de savoir si toute surface d'aire nulle est en réalité une courbe, pour la préciser il faudrait pouvoir dire ce que c'est qu'une vraie surface qui n'est pas une courbe. Il est évident que toute surface d'aire nulle définie à l'aide de deux paramètres u, v n'est pas nécessairement susceptible d'être considérée comme une courbe définie à l'aide du paramètre v_1 , u_1 et v_1 étant deux fonctions de u et v telles que les courbes $u_1 = \text{const.}$, $v_1 = \text{const.}$ partagent le plan des u, v en quadrilatères curvilignes comme cela arriverait s'il s'agissait d'un changement de variables analytique. Mais il paraît probable à M. Lebesgue qu'on doit toujours pouvoir tracer dans le plan des u, v une courbe c ne remplissant pas tout le domaine δ considéré du plan des u, v , ne remplissant même aucun domaine partiel pris dans δ , et telle cependant que la courbe c correspondante tracée sur la surface d'aire nulle passe par tous les points de cette surface.

M. Zoàrd de Göcze a d'ailleurs prouvé antérieurement qu'une surface sans points multiples, c'est-à-dire une surface image biunivoque d'un domaine du plan des u, v , a une aire supérieure à zéro.

Quant au fait signalé par M. Zoàrd de Göcze, qu'une surface peut être d'aire nulle sans que soit nulle la mesure superficielle de la projection de ses points sur le plan des xy , il découle de suite des définitions et se présente dès la considération des aires des surfaces planes.

Soit D un domaine plan limité par une courbe fermée sans point multiple C ; l'aire de D , considéré comme surface, étant par définition la plus petite limite des aires de surfaces polyédrales qui tendent vers D , est la plus petite limite des aires des polygones du plan de D dont les contours tendent vers C ; c'est ce qu'on appelle l'*étendue intérieure*, au sens de M. Jordan, du domaine D , ou la mesure du domaine ouvert D . Mais cette étendue intérieure peut être inférieure à la mesure de l'ensemble des points du domaine fermé D , laquelle mesure est l'*étendue extérieure*, au sens de M. Jordan, de ce domaine. (Voir la Thèse de M. Lebesgue, Chap. I et IV.)

Soient A et B deux points de C qui divisent C en deux arcs C_1 et C_2 . Laissant C_1 fixe, faisons varier C_2 de façon que C_2 tende vers C_1 en diminuant continuellement D. A la limite D se réduira à C_1 , mais pourra toujours être considéré comme une surface; son aire, l'étendue intérieure de D, sera nulle mais l'ensemble des points de D ou de C_1 a une mesure superficielle qui n'est pas nécessairement nulle (Thèse, p. 17 en note).

Si nous avons considéré une surface S , $z=f(x, y)$, dont la projection sur le plan des xy est le domaine D, quand D se réduit à C_1 la surface S , qui se réduit elle aussi à une courbe, a alors une *aire* nulle et la *mesure* des points de sa projection n'est pas nécessairement nulle; mais l'*aire* de cette projection est nulle. La surface S_1 de M. Zoàrd de Göcze est analogue à la précédente: si l'on va du point 0, 0 du plan des u, v au point 1, 1 suivant deux côtés du carré ou les deux autres, on décrit sur S_1 deux arcs Γ_1 et Γ_2 qui constituent les frontières de S_1 et qui sont confondus; leur commune projection est une courbe γ à laquelle se réduit la projection de S_1 . Seulement, dans le cas de M. Zoàrd de Göcze, cette courbe γ est fort compliquée, tandis que dans ce qui précède la courbe analogue C_1 avait été choisie sans points multiples.

Nous ne nous étonnerions pas d'énoncés de la nature de ceux de M. Zoàrd de Göcze, s'il ne nous arrivait pas d'oublier qu'une courbe ou une surface n'est pas définie par la seule connaissance de l'ensemble de ses points, mais qu'il faut de plus savoir comment ces points sont ordonnés. Nous ne serions pas surpris alors qu'une surface passant par tous les points d'un cube ou d'un carré puisse avoir une aire nulle ou une aire aussi petite qu'on le veut, quelle que soit la mesure superficielle ou volumétrique de l'ensemble de ses points. Fait qu'on peut expliquer, un peu trop succinctement à la vérité, en disant que, dans l'évaluation de l'aire, les points du contour n'interviennent pas alors qu'ils interviennent dans l'estimation de la mesure.

Comme nous ne confondrions jamais l'aire d'une surface portée par un plan avec la mesure superficielle des points de cette surface, du fait que l'aire d'une surface est toujours au moins égale à l'aire d'une quelconque de ses surfaces projections, nous ne serions pas tentés de conclure que l'aire d'une surface ne peut être moindre que la mesure superficielle de l'ensemble des points d'une surface projection.

La Note de M. Zoàrd de Göcze met bien en évidence la nécessité de ces distinctions.

SÉANCE DU 12 FÉVRIER 1913.

PRÉSIDENCE DE M. COSSERAT.

SÉANCE DU 26 FÉVRIER 1913.

PRÉSIDENCE DE M. COSSERAT.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société : M. Podtiaguine, présenté par MM. Appell et Borel, et M. Giraud, présenté par MM. Lebesgue et Picard.

Communications :

M. Giraud : *Sur une classe de transcendentes admettant un théorème de multiplication.*

L'auteur rappelle les résultats obtenus par M. Poincaré (*Journal de Mathématiques*, 4^e série, t. VI, 1890) et M. Picard (*Comptes rendus*, 4 juillet 1904) dans la recherche des fonctions $f_1, f_2, \dots, f_m$ de $u_1, u_2, \dots, u_p$ satisfaisant à des relations comme :

$$f_i(a_1 u_1, a_2 u_2, \dots, a_p u_p) = R_i[f_1(u_1, u_2, \dots, u_p), \\ f_2(u_1, u_2, \dots, u_p), \dots, f_m(u_1, u_2, \dots, u_p)] \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

où les R_i sont des fonctions rationnelles données, et les a_i des constantes de module supérieur à 1 ; on dit que $f_1, f_2, \dots, f_m$ admettent un théorème de multiplication ; on a des exemples de telles relations pour les fonctions elliptiques et abéliennes. Les fonctions obtenues sont méromorphes pour toute valeur de $u_1, u_2, \dots, u_p$, dès qu'elles le sont quand ces variables sont assez petites. Si l'on suppose que

$$f_i(0, 0, \dots, 0) = 0$$

quel que soit i , le point $(0, 0, \dots, 0)$ est point double de la transformation

$$(G) \quad x_i = R_i(x_1, x_2, \dots, x_m), \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Alors $a_1, a_2, \dots, a_p$ doivent être racines de l'équation en s obtenue en égalant à 0 le déterminant fonctionnel $\frac{D(R_1, R_2, \dots, R_m)}{D(x_1, x_2, \dots, x_m)}$ pris à l'origine et où l'on a remplacé $\frac{\partial R_i}{\partial x_i}$ par $\frac{\partial R_i}{\partial x_i} - s$. Sous quelques restric-

tions peu importantes, on a alors des fonctions $f_1, f_2, \dots, f_m$ méromorphes dans tout le plan. Si la transformation C est birationnelle, et si l'on prend $p = m$, les relations

$$f_i(u_1, u_2, \dots, u_m) = x_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

définissent des fonctions u_i des x_i dont le domaine d'existence est constitué par les points $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ dont les transformés par $C^{-\alpha}$ tendent vers 0 quand α augmente indéfiniment, et qui sont uniformes dans ce domaine.

Ceci rappelé, on peut démontrer que ce domaine d'existence ne comprend certainement pas tous les points de l'espace. Pour cela on établit d'abord que, sauf pour certaines courbes exceptionnelles, la transformée d'une courbe algébrique Γ par $C^{-\alpha}$ est, quel que soit α , une courbe algébrique, et non un point ou une variété à plus d'une dimension. Si ρ est un nombre tel que l'inégalité

$$(1) \quad |x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_m|^2 \leq \rho^2$$

entraîne l'inégalité analogue pour le transformé de $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ C^{-1} , nous pourrions prendre une variété algébrique à $m - 1$ dimensions, Σ , dont aucun point ne satisfasse à cette inégalité. Alors, la transformée de Γ par $C^{-\alpha}$ ayant au moins un point commun avec Σ , il y a sur Γ un point M_α au moins tel que le point $M_\alpha C^{-\alpha}$ soit extérieur au domaine (1). Si M est un point d'accumulation des M_α , le transformé de M par $C^{-\alpha}$ sera, quel que soit α , extérieur à (1) : M ne fait pas partie du domaine d'existence des fonctions u_i .

Il peut arriver toutefois que les fonctions u_i n'aient pas d'espace lacunaire, mais seulement des points singuliers limites de points réguliers. M. Poincaré en donne un exemple. Le cas de l'espace lacunaire est aussi possible, comme le montre la transformation

$$(C^{-1}) \quad x = \frac{axy + bx + cy}{a''xy + b''x + c''y}, \quad y = \frac{a'xy + b'x + c'y}{a''xy + b''x + c''y},$$

où l'on donne à b, c, b', c' les valeurs $b'', 0, 0, c''$ (ou des valeurs voisines), et où l'on s'arrange de façon que

$$\left| \frac{a' + c''}{b''} \right| < 1, \quad \left| \frac{a + b''}{c''} \right| < 1.$$

Cette transformation admet en effet les points doubles limite $(1, 0)$ et $(0, 1)$, ou des points voisins. Si I est une inversion transformant ces deux points l'un dans l'autre, $C^{-1}I$ et IC^{-1} auront ces deux points comme points limites oscillants.

Enfin, si l'on fait tendre $x_1, x_2, \dots, x_m$ vers un point de la frontière du domaine, le plus petit entier α tel que le transformé du point mobile soit intérieur à (1) augmente indéfiniment; on en conclut facilement que $|u_1|^2 + |u_2|^2 + \dots + |u_m|^2$ augmente indéfiniment. (Ceci suppose que le point frontière n'est point d'indétermination pour aucune transformation $C^{-\alpha}$.) C'est un renseignement sur le comportement des u_i au voisinage des points singuliers de ces fonctions.

M. R. Garnier : *Sur la rationalisation des coefficients des équations différentielles algébriques.*

Soit $y''' = R(y'', y', y, x)$ une équation différentielle algébrique du troisième ordre dont l'intégrale générale $y(x)$ a ses points critiques fixes; la fonction R , analytique en x , est *rationnelle* en y'', y' et *algébrique* en y .

M. Garnier montre qu'on peut toujours trouver une irrationnelle $z(y; x)$ liée à y par une relation algébrique

$$(1) \quad f(y, z; x) = 0$$

(dépendant de x analytiquement), et cela de telle sorte que la *fonction* $z(x)$ *définie par* (1) (où l'on a remplacé y par l'intégrale générale de l'équation proposée) *ait aussi ses points critiques fixes*. La démonstration de M. R. Garnier s'appuie sur des théorèmes classiques de M. H. Poincaré relatifs à la continuité des intégrales d'une équation différentielle par rapport à un paramètre; elle *s'étend d'ailleurs à des équations différentielles d'ordre quelconque* (algébriques en y , rationnelles par rapport aux dérivées successives de y).

La proposition précédente trouve une application immédiate dans le problème de l'énumération des équations différentielles algébriques dont les intégrales ont leurs points critiques fixes.

M. Podtiaguine : *Sur la convergence de certaines intégrales multiples.*

On considère l'intégrale

$$I = \int_a^\infty \int_b^\infty \dots \int_c^\infty \frac{dx_1 dx_2 \dots dx_n}{P(x_1, x_2, \dots, x_n)}.$$

Si $P(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1^\alpha + x_2^\beta + \dots + x_n^\lambda)^m$, on trouve pour

convergence de l'intégrale I la condition

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \dots + \frac{1}{\gamma} < a_1.$$

Si

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1^\alpha + x_2^\beta + \dots + x_{n-1}^\gamma + x_n^\lambda)^{a_1} (x_1^{\alpha_1} + x_2^{\beta_1} + \dots + x_{n-1}^{\gamma_1} + x_n^{\lambda_1})^{a_2},$$

on obtient, pour la convergence de l'intégrale I, n conditions

$$\begin{aligned} a_2 \frac{\lambda_1}{\lambda} &> \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \dots + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\lambda} - a_1, \\ \left(a_2 - \frac{1}{\lambda_1}\right) \frac{\gamma_1}{\gamma} &> \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \dots + \frac{1}{\gamma} - a_1, \\ &\dots\dots\dots, \\ a_1 \frac{\alpha}{\alpha_1} &> \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1} + \dots + \frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\lambda_1} - a_2. \end{aligned}$$

Enfin, dans le cas où

$$\begin{aligned} P(x_1, x_2, \dots, x_n) &= (x_1^\alpha + x_2^\beta + \dots + x_{n-1}^\gamma + x_n^\lambda)^{a_1} \\ &\times (x_1^{\alpha_1} + x_2^{\beta_1} + \dots + x_n^{\lambda_1})^{a_2} (x_1^{\alpha_2} + x_2^{\beta_2} + \dots + x_n^{\lambda_2})^{a_3}, \end{aligned}$$

l'intégrale I converge, si ses paramètres satisfont à $3(n-1)$ conditions dont les extrêmes sont

$$\begin{aligned} a_2 \frac{\lambda_1}{\lambda} + a_3 \frac{\lambda_2}{\lambda} &< \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \dots + \frac{1}{\lambda} - a_1, \\ a_1 \frac{\alpha}{\alpha_2} + a_2 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} &< \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1} + \dots + \frac{1}{\lambda_1} - a_3. \end{aligned}$$

SÉANCE DU 12 MARS 1913.

PRÉSIDENCE DE M. COSSERAT.

Communication :

M. Barré : *Sur les surfaces engendrées par des hélices circulaires.*

SÉANCE DU 19 MARS 1913.

PRÉSIDENCE DE M. COSSERAT.

Communication :

M. P. Fatou : *Sur les conditions d'aplanétisme pour un système optique quelconque.*

Il s'agit de démontrer d'une manière élémentaire les extensions données par divers auteurs (H. Bruns, M. Thiesen) de la condition d'aplanétisme bien connue en optique géométrique sous le nom de *condition des sinus* ou *condition d'Abbe*.

Étant donnés deux points O et O' qui sont l'image l'un de l'autre sans aberration pour des faisceaux d'ouverture finie, il s'agit de trouver les conditions pour que les points d'un élément de plan π entourant le point O, aient pour images les points d'un élément de plan π' entourant le point O', aux infiniment petits du 2^e ordre près.

On suppose simplement le système optique formé de milieux isotropes, sans faire aucune autre hypothèse sur sa structure.

En s'appuyant sur la notion de *chemin optique*, c'est-à-dire en somme sur le principe de Fermat, et imitant la démonstration de Hockin pour la condition d'Abbe, on arrive presque sans calcul au résultat cherché, qui peut s'énoncer ainsi : Soient OS un rayon passant par O dans le milieu objet, O'S son image ; Ox une direction quelconque du plan π , O'x' la direction correspondante du plan π' ; il existe une relation de la forme

$$a \cos(\text{OS}, \text{Ox}) + b \cos(\text{O'S'}, \text{O'x'}) = c.$$

Contrairement à l'assertion de certains auteurs, la constante c n'est pas nulle en général.

On déduit facilement de là une démonstration de l'importante formule que Clausius et Helmholtz ont déduite de considérations d'énergétique :

$$n^2 \cos \theta \, d\omega \, dq = n'^2 \cos \theta' \, d\omega' \, dq',$$

dans laquelle n et n' désignent les indices des milieux extrêmes, $d\omega$ et $d\omega'$ les angles solides de deux pinceaux de rayons correspondants de sommets O et O', dq et dq' les aires des deux éléments plans correspondants π et π' , θ et θ' les angles des axes des pinceaux avec les normales aux éléments.

SÉANCE DU 9 AVRIL 1913.

PRÉSIDENTE DE M. COSSERAT.

Élection :

Est élu, à l'unanimité, membre de la Société : M. Ovidius Tino, présenté par MM. Goursat et Lebesgue.

SÉANCE DU 23 AVRIL 1913.

PRÉSIDENTE DE M. COSSERAT.

Élection :

Est élu, à l'unanimité, membre de la Société, M. Godeaux, présenté par MM. Appell et Picard.

Communications :

M. Garnier : *Sur les simplifications du potentiel élastique dues à la symétrie cristalline.*

Soit f le potentiel élastique d'un système élastique homogène : toute symétrie dans la molécule du système entraîne une simplification dans la forme de f : c'est ainsi que, aux différents groupements cristallins correspondent 11 formes possibles pour f . M. Somigliana a montré que, inversement, si l'on se propose de rechercher les différents types de symétrie moléculaire susceptible de produire des simplifications dans la forme de f , on retrouve précisément les types de symétrie cristalline. Cette réciproque a été établie par une méthode analytique, M. Garnier le démontre par des considérations géométriques.

M. Denjoy : *Sur les formules de M. Jensen et leurs applications à l'étude des valeurs rares des fonctions entières.*

M. Jensen a donné plusieurs formules reliant le module d'une fonction $F(z)$ holomorphe dans un cercle de rayon r aux valeurs $a_1, a_2, \dots, a_n$ des zéros de $F(z)$ contenus dans ce domaine.

La plus connue d'entre elles

$$(1) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |F(z)| d\theta = \log |F(0)| + \log \frac{r^n}{|a_1 a_2 \dots a_n|},$$

$[z = re^{i\theta}, F(0) \neq 0],$

entraîne la curieuse conséquence suivante : $F(z)$ étant une fonction entière, a et b deux constantes, $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, b_1, b_2, \dots, b_p, \dots$, respectivement les zéros de $F(z) - a$ et de $F(z) - b$, rangés par modules non décroissants, si le quotient $\frac{a_1 a_2 \dots a_n}{b_1 b_2 \dots b_n}$ tend vers l'infini avec n , le module minimum de $F(z) - a$ sur le cercle de rayon r tend vers zéro avec $\frac{1}{r}$.

Les autres formules de M. Jensen, contenues dans le même Mémoire (*Acta mathematica*), conduisent aisément aux conséquences suivantes : p étant un entier quelconque, soit μ_p le module de l'expression $A_p B'_p$ avec

$$r^p \left[\frac{1}{p} \sum_1^n \frac{1}{a_n^p} + \frac{1}{p!} \frac{d^p}{dz^p} \log F(0) \right] = A_p,$$

$$\frac{1}{p r^p} \sum_1^n a_n^p = B_p,$$

et

$$B'_p = \text{conj. } B_p;$$

on a alors, en désignant par $M(r)$ et $m(r)$ le minimum et le maximum de $|F(z)|$ sur le cercle $|z| = r$, et par U le second membre de la relation (1) :

$$\log M(r) > U + \frac{1}{r} \frac{\mu_p}{r}, \quad \log m(r) < U - \frac{1}{r} \mu_p$$

et

$$\log M(r) - \log m(r) > \frac{\pi}{r} \mu_p.$$

Ces relations, vraies quel que soit p , suffisent parfois à montrer que le minimum $m(r)$ est infiniment petit.

Elle permettent d'établir le théorème suivant :

Si la somme $\sum_1^n \frac{1}{a_n^p}$ croît indéfiniment avec n , $\log M(r)$ est infiniment grand relativement à r^p .

Ce résultat est intéressant si l'on remarque que la croissance de U épouse assez exactement les variations de celles de $|a_n|$, peut donc descendre bien au-dessous du type r^p et d'ailleurs diffère peu de celle de $M(r)$ quand les arguments des zéros sont très dispersés.

SÉANCE DU 14 MAI 1913.

PRÉSIDENCE DE M. COSSERAT.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société, M. E. Bortolotti, présenté par MM. Picard et Montel, et M. Valiron, présenté par MM. Denjoy et Montel.

SÉANCE DU 28 MAI 1913.

PRÉSIDENCE DE M. COSSERAT.

Élections :

Sont élus à l'unanimité, membres de la Société : MM. Coblyn, présenté par MM. Jordan et Carvallo; Lusin présenté par MM. Vessiot et Montel; Kiveliovitch présenté par MM. Vessiot et Montel.

Communications :

M. Lindelöf : *Sur une démonstration nouvelle d'un théorème fondamental sur les suites de fonctions monogènes.*

Il s'agit du théorème suivant : considérons une suite infinie de fonctions monogènes

$$(1) \quad f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots,$$

holomorphes et bornées dans leur ensemble dans l'intérieur d'un domaine connexe T ; si la suite (1) converge pour une infinité de points de T ayant au moins un point limite intérieur à T , elle converge uniformément dans l'intérieur de T vers une fonction holomorphe. L'auteur démontre directement ce théorème et en déduit que, de toute suite infinie de fonctions holomorphes et bornées dans T , on peut extraire une suite nouvelle convergeant uniformément à l'intérieur de T . Jusqu'à présent, on avait toujours commencé par démontrer cette seconde proposition de laquelle on déduisait la première.

M. Vessiot : *Sur la mise en équations des problèmes de calcul des variations.*

1. La recherche du maximum ou du minimum d'une intégrale double est, comme le problème analogue relatif à une intégrale simple, liée à la théorie de la propagation par ondes. On a, en effet, de l'intégrale

$$J = \int \int V(x, y, z, p, q) dx dy,$$

étendue à une portion (S) d'une surface $z = f(x, y)$ quelconque, l'interprétation suivante : Dans le mode de propagation défini par le système des surfaces d'onde qui ont pour plan tangent courant ⁽¹⁾

$$pX + qY - Z - V(x, y, z, p, q) = 0,$$

la surface (S), considérée comme l'état initial d'une onde, balaie le volume $J \delta t$, à partir de sa position initiale, dans le temps infiniment petit δt . On pourrait appeler J la *vitesse* de balayage de la surface (S) dans le mode de propagation considéré.

La variation de cette vitesse, dans le même mouvement de propagation, est donnée par la formule

$$\delta J = \delta t \int \int V \left[\frac{d}{dx} \frac{\partial V}{\partial p} + \frac{d}{dy} \frac{\partial V}{\partial q} - \frac{\partial V}{\partial z} \right] dx dy.$$

Il suffit donc d'écrire que cette variation particulière est nulle, pour toute portion de la surface (S), pour obtenir l'équation de Lagrange qui exprime que la variation de J , dans le cas général de variations infinitésimales quelconques, est nulle.

Pour obtenir l'équation de Lagrange on suppose, en général, que le contour qui limite (S) est fixe. Mais la variation reste nulle, s'il se déplace sur la surface qu'il décrit, lorsque (S) est entraînée par le mouvement de propagation considéré.

2. La méthode indiquée par l'auteur pour exprimer que la variation d'une intégrale simple est nulle ⁽¹⁾, s'étend au cas d'une intégrale double, de la manière suivante.

⁽¹⁾ E. VESSIOT, *Sur l'interprétation mécanique des transformations de contact infinitésimales* (Cf. *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXXIV, 1906).

⁽¹⁾ *Comptes rendus des séances de la Société mathématique de France*. Année 1912, p. 48.

Soit, sous sa forme paramétrique, l'intégrale

$$J = \iint G(x_1, x_2, x_3 | y_1, y_2, y_3) du_1 du_2,$$

où G est homogène, de degré un, par rapport aux quantités

$$y_\alpha = \frac{\partial(x_\beta, x_\gamma)}{\partial(u_1, u_2)} \quad (\alpha, \beta, \gamma = \text{permut. circul. de } 1, 2, 3).$$

Posons

$$G(x | y) = \omega; \quad y_i = \omega p_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Les p_i satisfont à l'équation

$$(1) \quad G(x_1, x_2, x_3 | p_1, p_2, p_3) = 1,$$

qui est l'équation tangentielle de la surface d'onde, le plan tangent de celle-ci étant écrit sous la forme

$$(2) \quad \sum_{i=1}^3 p_i X_i - 1 = 0.$$

Remplaçons l'équation (1) par sa forme paramétrique

$$(3) \quad p_i = A_i(x_1, x_2, x_3 | \lambda_1, \lambda_2) \quad (i = 1, 2, 3);$$

et il reste à considérer l'intégrale

$$(4) \quad J = \iint \omega du_1 du_2,$$

où ω est une fonction de u_1, u_2 liée aux fonctions auxiliaires x_i et λ_k par les trois équations

$$(5) \quad \frac{\partial(x_\beta, x_\gamma)}{\partial(u_1, u_2)} = \omega A_\alpha(x | \lambda).$$

Cela posé, la variation de J prend la forme

$$(6) \quad \delta J = \iint \sum_{i=1}^3 z_i \omega_i du_1 du_2,$$

les z_i étant définis par les équations

$$(7) \quad \sum_{i=1}^3 z_i A_i = 1, \quad \sum_{i=1}^3 z_i \frac{\partial A_i}{\partial \lambda_k} = 0 \quad (k = 1, 2);$$

et les w_i ayant pour expressions

$$(8) \quad w_\alpha = \frac{\partial(\partial x_\beta, x_\gamma)}{\partial(u_1, u_2)} + \frac{\partial(x_\beta, \partial x_\gamma)}{\partial(u_1, u_2)} - \sum_{j=1}^3 w_j \frac{\partial \Lambda_\alpha}{\partial x_j} \partial x_j.$$

Ces formules (8) peuvent se remplacer par la condition suivante : les w_i doivent annuler chaque intégrale

$$(9) \quad \iint \sum_{i=1}^3 \zeta_i w_i du_1 du_2,$$

où les ζ_i satisfont au système

$$(10) \quad \frac{\partial(x_\beta, \zeta_\gamma)}{\partial(u_1, u_2)} + \frac{\partial(\zeta_\beta, x_\gamma)}{\partial(u_1, u_2)} + \sum_{j=1}^3 w_j \frac{\partial \Lambda_j}{\partial x_\alpha} \zeta_j = 0.$$

3. Contrairement à ce qui se passe dans le cas des intégrales simples, on ne peut conclure de là que les z_i sont eux-mêmes une solution de ce système (10) en $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$, qu'en faisant intervenir l'hypothèse que les z_i ont des dérivées partielles en u_1, u_2 .

L'objection de Du Bois Reymond, à laquelle la méthode échappait dans le cas des intégrales simples, ne peut donc ici être éludée (¹); elle tient à ce fait que des fonctions, qui sont des limites de solutions du système (10), annulent les intégrales (9) aussi bien que ces solutions elles-mêmes; et ne sont pas forcément des solutions du système (10), car elles n'ont pas nécessairement des dérivées. La nature particulière du système auquel conduit la mise en équations, pour chaque propagation considérée, interviendra, par suite, nécessairement, pour savoir si le problème admet des solutions autres que celles qui sont pourvues de dérivées.

Ce système est, d'après ce qui précède, formé des équations (5) et des équations (10), où les ζ_i doivent être remplacés par les valeurs z_i tirées des équations (7).

(¹) On sait que M. Hadamard a montré, par l'exemple de l'intégrale

$$\iint (p^2 - q^2) dx dy,$$

que la méthode de mise en équations classique, qui fait intervenir l'hypothèse que z a des dérivées secondes, ne peut échapper à l'objection de Du Bois Reymond, dans le cas des intégrales doubles (*Comptes rendus de l'Acad. des Sciences de Paris*, t. CXLIV, 1907, p. 1092).

4. On peut, en particulier, prendre, pour les formules (3), les équations

$$(11) \quad p_i = \frac{\partial F}{\partial z_i} \quad (i = 1, 2, 3),$$

en introduisant l'équation ponctuelle des surfaces d'onde

$$(12) \quad F(x_1, x_2, x_3 | z_1, z_2, z_3) = 1,$$

où F est homogène, de degré un, par rapport aux coordonnées courantes z_i ; les formules (7) expriment que z_1, z_2, z_3 sont précisément les coordonnées du point de contact du plan (2). On obtient ainsi le système définitif formé de l'équation (12) et des équations

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{\partial(x_\beta, x_\gamma)}{\partial(u_1, u_2)} = \omega \frac{\partial F}{\partial z_\alpha}, \\ \frac{\partial(x_\beta, z_\gamma)}{\partial(u_1, u_2)} + \frac{\partial(z_\beta, x_\gamma)}{\partial(u_1, u_2)} = -\omega \frac{\partial F}{\partial x_\alpha}, \end{cases}$$

dont la forme généralise celle des systèmes canoniques. Ce système (13) entraîne, du reste, la condition $dF = 0$.

M. Boutroux : *Le problème de l'intégration des équations différentielles.*

Dans une Communication faite au Congrès international de Heidelberg, en 1904, M. Painlevé a indiqué comment se pose aujourd'hui le problème de l'intégration des équations différentielles. Il est vrai que, lorsqu'on a affaire à des intégrales $f(x)$ qui sont des fonctions à une infinité de branches, la définition générale de l'intégration donnée par M. Painlevé paraîtra peut-être insuffisante. Si, cependant, je fournis un moyen de calculer une valeur approchée d'une branche quelconque de $f(x)$ pour une valeur quelconque de x et de déterminer, en outre, toutes les branches qui appartiennent à une même intégrale, si les formes de représentation analytique que j'emploie mettent en évidence et situent approximativement tous les points singuliers de $f(x)$, découvrent le mécanisme de l'échange des branches entre elles, indiquent enfin, suivant l'expression de M. Painlevé, *le rôle des conditions initiales*, il semble que je serai bien en droit de regarder les intégrales $f(x)$ comme *connues*.

Le problème se décompose en deux :

1. *Étude des branches d'intégrales;*

II. Reconnaître quelles sont les branches qui appartiennent à une même intégrale.

Problème I. — Convenons, pour fixer les idées, de définir une branche de fonction $f(x)$ comme l'ensemble des valeurs de $f(x)$ qu'on obtient en suivant les rayons issus d'un même point x_0 à partir d'une même valeur initiale : nous désignerons une telle branche de fonction par le symbole $\widehat{f(x)}$.

J'ai indiqué déjà les divers types de *branches de fonctions* que définissent les équations différentielles les plus simples : branches asymptotes à des fonctions rationnelles, à des fonctions entières ou à des fonctions méromorphes.

Il existe un type particulièrement remarquable (*type A*) d'équations rationnelles du premier ordre dont *toutes* les intégrales sont asymptotes à des fonctions rationnelles. Considérons l'équation

$$(1) \quad z' = \frac{A_0 + A_1 z + \dots + A_p z^p}{B_0 + B_1 z + \dots + B_q z^q},$$

où $A_0, \dots, B_q$ sont des polynômes en x ayant respectivement pour degrés $m_0, \dots, n_q$. L'équation (1) sera du type A si l'on a $p < q + 2$

et, en posant $\sigma = \frac{m_0 - n_q + 1}{q + 1}$,

$$\begin{array}{lll} m_1 + \sigma < m_0, & \dots, & m_p + p\sigma < m_0, \\ n_0 + \sigma - 1 < m_0, & \dots, & n_{q-1} + q\sigma - 1 < m_0. \end{array}$$

J'ai pu faire une étude asymptotique détaillée des branches d'intégrales des équations du *type A*, déterminer la situation de leurs points critiques, les représenter par des développements qui mettent en évidence leur allure et leurs propriétés.

Problème II. — Posons-nous maintenant le problème II pour une équation particulière, par exemple l'équation du type A

$$(2) \quad z z' + 3z - 2(x - \alpha)(x - \beta)(x - 2) = 0$$

qui contient deux paramètres α et β (les coefficients numériques sont choisis de manière à simplifier les calculs).

Les branches d'intégrales $\widehat{z(x)}$ sont asymptotes à $\pm \sqrt{x^* - x_1^*}$ ou x_1 est une constante arbitraire. Les branches asymptotes à $+\sqrt{x^* - x_1^*}$

en particulier sont, au voisinage de $x = \infty$, de la forme

$$z = x^2 - \frac{7 + 2(\alpha + \beta)}{3} x$$

+ développements en puissances de x^{-1} et de $(C_1 + \eta_1 \log x)x^{-2}$,

C_1 étant un paramètre variable et η_1 un polynôme en α, β . A une branche d'intégrale correspond une valeur de C_1 , et réciproquement. Notre problème II revient donc à la question suivante : *Quel est l'ensemble des valeurs de C_1 qui appartiennent à une même intégrale ?*

J'ai obtenu de ce problème, du moins pour α et β intérieurs à certaines régions de leurs plans respectifs, la solution suivante :

On peut définir trois branches de fonctions $\widehat{\psi_1(C_1)}$, $\widehat{\psi_2(C_1)}$, $\widehat{\psi_3(C_1)}$ qui présentent chacune deux points critiques seulement, qui peuvent être étudiées par les mêmes méthodes que les branches de fonctions du problème I et qui nous fournissent trois substitutions fondamentales donnant, par leur combinaison, l'ensemble des valeurs C_1 cherchées. Appelons, en d'autres termes, (S_1) , (S_2) , (S_3) les substitutions

$$[C_1, \widehat{\psi_1(C_1)}], [C_1, \widehat{\psi_2(C_1)}], [C_1, \widehat{\psi_3(C_1)}],$$

définies d'une manière univoque pour tout C_1 puisque les branches $\widehat{\psi_1}$, $\widehat{\psi_2}$, $\widehat{\psi_3}$ sont, par définition, uniformes. Opérant sur une valeur initiale de C_1 toutes les substitutions obtenues en combinant (S_1) , (S_2) , (S_3) , nous aurons toutes les valeurs de C_1 qui appartiennent à une même intégrale.

SÉANCE DU 11 JUIN 1913.

PRÉSIDENCE DE M. COSSERAT.

M. Barré donne quelques indications sur un travail relatif aux surfaces hélicées.

SÉANCE DU 23 JUIN 1913.

PRÉSIDENCE DE M. COSSERAT.

Election :

Est élu, à l'unanimité, membre de la Société : M. Tamarkine, présenté par MM. Kryloff et Montel.

Communications :

M. Got : *Sur les domaines fondamentaux de certains groupes fuchsien.*

Parmi les groupes fuchsien arithmétiques de Poincaré ⁽¹⁾ ceux qui se rapportent aux formes du type

$$f = x^2 - \varphi(y, z),$$

où φ est une forme quadratique définie positive, sont des plus intéressants : ces formes et leurs groupes jouent, en effet, un rôle important dans la théorie des fonctions abéliennes doublement singulières de M. Humbert. A côté des méthodes de réduction continue (Hermite-M. Selling) et d'extension du groupe par symétries (M. Klein), la méthode de *rayonnement* de M. Fricke permet de déterminer aisément leur domaine fondamental *normal* et par suite leurs substitutions génératrices.

Considérons en effet tous les points O_i équivalents à l'origine $O(1, 0, 0)$, par les opérations du groupe reproductif de la forme : leurs coordonnées sont trois entiers $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ vérifiant l'équation

$$(1) \quad \alpha_i^2 - \varphi(\beta_i, \gamma_i) = 1.$$

L'ellipse $x^2 - \varphi(y, z) = 0$ étant prise pour *absolu* (Cayley), la pseudo-distance non euclidienne OO_i , telle que la définit M. Klein ⁽²⁾, est alors

$$\mathcal{L}OO_i = \log(\alpha_i + \sqrt{\alpha_i^2 - 1}).$$

En langage pseudo-géométrique, les *perpendiculaires* en leur milieu à un certain nombre de segments OO_i de $\mathcal{L}$ minima limitent

⁽¹⁾ *Journal de Liouville*, 4^e série, t. III.

⁽²⁾ C'est le logarithme du rapport anharmonique de OO_i et des points d'intersection de OO_i avec la conique.

un polygone normal, ou plutôt le *double* d'un domaine normal, parce que le point O est point fixe de substitution elliptique de période deux. Or la ζ varie dans le même sens que x_i . Il suffit donc de calculer les premières solutions de l'équation (1) par ordre de grandeur croissante des x_i en conservant seulement les points équivalents à O. On s'arrête lorsqu'on a obtenu un polygone convexe qui n'est plus traversé par aucune perpendiculaire ultérieure : un nombre fini d'opérations suffit pour s'en assurer.

Pour distinguer les solutions α_i , β_i , γ_i de l'équation (1) qui répondent à des points équivalents à O, on peut employer l'un des procédés suivants :

1° Réduire par la méthode de M. Selling la forme définie

$$\bar{f} = \frac{1}{2}(xf'_{\alpha_i} + yf'_{\beta_i} + zf'_{\gamma_i})^2 - f(x, y, z),$$

associée à f pour la réduction continue. Pour que O_i soit équivalent à O, il faut et il suffit que la réduite correspondante obtenue pour la forme indéfinie soit identique à f (qu'on suppose bien entendu réduite en O).

2° Utiliser les formules d'Hermite pour les substitutions semblables S d'une forme f , en fonction de quatre indéterminées p, q, q', q'' , vérifiant une équation

$$(2) \quad p^2 + F(q, q', q'') = P$$

(F adjointe de f , P diviseur du quadruple du discriminant). En exprimant que $O_i = OS$, on a trois équations permettant avec (2) de calculer les quatre indéterminées : pour que O_i soit équivalent à O, il faut et il suffit que leurs valeurs soient entières et donnent une S entière.

En traitant par cette dernière méthode la forme de discriminant 29,

$$x^2 - 3y^2 + 2yz - 10z^2,$$

on trouve, pour le groupe fuchsien correspondant, la *signature* (0, 6; 2, 2, 2, 2, 3). Le polygone normal est obtenu dès qu'on atteint $\alpha_i = 30$, mais pour en être assuré, il faut pousser le calcul jusqu'à $\alpha_i = 48$.

M. Lebesgue : *Sur l'équivalence du problème de Dirichlet et du problème du calcul des variations considéré par Riemann.*

Au problème de Dirichlet qui consiste, comme on sait, à trouver

une fonction harmonique dans un domaine borné D et prenant des valeurs données continues sur la frontière F de D , Riemann substitue la recherche d'une fonction continue dans D et sur F , dérivable dans D , prenant les valeurs données sur F et rendant minimum une intégrale qui, dans le cas de deux variables, s'écrit

$$\int \int_D \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = I(f).$$

M. Hadamard a signalé un cas où les deux problèmes ne sont pas équivalents : c'est celui où l'intégrale de Riemann n'a de sens pour aucune des fonctions du champ fonctionnel considéré. Pour les autres cas les deux problèmes sont bien équivalents, mais la démonstration classique n'est pas entièrement suffisante ; elle utilise, en effet, la formule de Green appliquée au domaine D et cela suppose que F ait une normale et que les fonctions dont on s'occupe aient certaines dérivées sur F . M. Lebesgue a déjà signalé cette difficulté dans les *Rendiconti del Circolo di Palermo*, il montre ici comment on peut la lever.

Il suffit de prouver que toute fonction f harmonique dans D et telle que $I(f)$ soit finie est solution du problème de Riemann. Le raisonnement classique suffit quand F a une dérivée normale et quand f a des dérivées partielles même aux points de F . Soit maintenant une fonction f harmonique dans un domaine D quelconque et soit φ une fonction prenant les mêmes valeurs continues sur la frontière F de D . Il faut prouver qu'on a $I(\varphi) \geq I(f)$; il suffira d'ailleurs d'obtenir l'inégalité $I(\varphi) \geq I(f)$ pour toute fonction φ pour qu'on puisse conclure que l'égalité est impossible. Cette égalité, en effet, si elle était réalisée pour une fonction φ , entraînerait cette conséquence que φ est une solution du problème de Riemann, donc est harmonique ; par suite, φ ne pourrait différer de f .

Soit ψ la fonction définie par la condition d'être égale à $\varphi + \varepsilon$, quand $\varphi + \varepsilon$ est inférieur à f , d'être égale à $\varphi - \varepsilon$ quand $\varphi - \varepsilon$ est supérieur à f , enfin d'être égale à f aux autres points. Si $I(f)$ n'est pas infini, $I(\psi)$ tend, quand ε tend vers zéro, vers $I(\varphi)$. Or, ψ étant identique à f en tous les points suffisamment voisins de F , en utilisant le raisonnement classique appliqué à un domaine D_1 intérieur à D et dont la frontière F_1 est tout entière dans la partie de D où $\psi = f$, on voit que $I(\psi)$, étendue à D_1 , est inférieure à $I(f)$. Donc, étendue à D , $I(\psi)$ est aussi inférieure à $I(f)$ et la proposition est établie.

Une légère modification au raisonnement qui vient d'être esquissé permet de se débarrasser de l'hypothèse que $I(f)$ est finie.

M. Lebesgue a signalé récemment ⁽¹⁾ qu'il existe des domaines très simples de l'espace à trois dimensions pour lesquels le problème de Dirichlet n'a pas de solution; pour ces domaines, le problème de Riemann n'a pas non plus de solution.

M. G. Bouligand : *Sur la fonction de Green du cylindre indéfini.*

Soit $G(M, P)$ la fonction de Green d'un cylindre indéfini à section droite fermée.

L'axe Oz a été pris parallèle aux génératrices. La fonction $G(M, P)$ est ainsi définie :

1° La différence $G - \frac{1}{MP}$ est une fonction harmonique du point M dans tout le cylindre; de plus, elle est régulière à l'infini.

2° G s'annule sur le cylindre.

La fonction G , symétrique par rapport aux deux points M et P , ne fait intervenir leurs cotes que par leur différence z . Soient m la projection de M sur la section droite de P et $G_\lambda(m, P)$ la fonction de Green de la section pour l'équation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \lambda^2 U;$$

on a la relation

$$G(M, P) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} G_\lambda(m, P) \cos \lambda z \, d\lambda,$$

d'où l'on déduit

$$G_\lambda(m, P) = \int_0^{+\infty} G(M, P) \cos \lambda z \, dz;$$

pour $\lambda = 0$, G_λ se réduit à la fonction de Green ordinaire g de la section droite et l'on a

$$g(m, P) = \int_0^{+\infty} G(M, P) \, dz,$$

c'est une relation entre la fonction de Green du cylindre et celle de sa section droite: elle est due à M. Paul Lévy.

On peut en trouver une seconde, d'un caractère différent, par le procédé suivant: Soit une section droite et l'un des demi-cylindres qu'elles détermine. Appelons (H) toute fonction harmonique dans ce demi-cylindre, s'annulant sur sa surface et régulière à l'infini. Entre la distribution de ses valeurs $U(P)$ et de celles de sa dérivée

⁽¹⁾ *Comptes rendus des séances de la Société mathématique de France*, p. 17 (1913).

normale $V(P)$ le long de la section droite, on a les relations

$$(1) \quad V(P) = -\frac{1}{2\pi} \int \int_S V(M) (M, P) dS_M,$$

$$(2) \quad V(P) = \frac{1}{2\pi} \Delta \int \int_S U(M) G(M, P) dS_M,$$

les points M et P étant dans la section droite en question, et Δ représentant le symbole de Laplace à deux dimensions.

Si U est donné l'équation (2) fera connaître V et si V est connu, l'équation (1) donnera U . Dans (2) remplaçons U par sa valeur (1). Nous avons une identité satisfaite quel que soit V , et qui a comme conséquence immédiate

$$\Delta \int \int_S G(M, P) G(M, Q) dS_M = 0.$$

Ainsi l'intégrale $\frac{1}{2\pi} \int \int_S G(M, P) G(M, Q) dS_M$ où M, P, Q sont trois points d'une même section droite, est une fonction harmonique : elle s'annule sur (C) et possède la singularité $\log \frac{1}{PQ}$. C'est donc $g(P, Q)$. D'où une nouvelle relation entre G et g

$$2\pi g(P, Q) = \int \int_S G(M, P) (M, Q) dS_M.$$

M. Montel : *Sur les équations linéaires aux dérivées partielles au point de vue des variables réelles.*

M. Baire a posé la question de savoir s'il existe pour une équation aux dérivées partielles d'autre solution que celles fournies par les méthodes classiques qui supposent la continuité des dérivées que l'on emploie. Prenons par exemple, l'équation

$$F(z) = A(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

et cherchons toutes les fonctions z admettant des dérivées partielles du premier ordre et vérifiant cette équation. La fonction z est simplement assujettie à être continue par rapport à chaque variable et à admettre des dérivées du premier ordre finies; les fonctions A et B sont telles qu'on puisse définir un champ régulier de caractéristiques. M. Baire a démontré que, si l'on suppose la fonction continue par rapport à l'ensemble des deux variables x, y , il n'y a pas d'autre

solution que la solution classique. L'auteur montre que ce résultat est général. Soit $G(u)$ le premier nombre de l'équation adjointe de l'équation donnée

$$G(u) = \frac{\partial(Au)}{\partial x} + \frac{\partial(Bu)}{\partial y}.$$

On a

$$u F(z) + z G(u) = \frac{\partial(Auz)}{\partial x} + \frac{\partial(Buz)}{\partial y}.$$

Soient z une intégrale quelconque de $F(z) = 0$ et u_1 une intégrale quelconque de $G(u) = 0$, on a

$$\frac{\partial(Au_1 z)}{\partial x} + \frac{\partial(Bu_1 z)}{\partial y} = 0.$$

Or, l'auteur a établi précédemment que cette condition exprime, avec les hypothèses du début, que l'expression

$$u_1 z (Bdx - A dy)$$

est une différentielle exacte; on en déduit aisément que $Bu_1 z$ est constante sur chaque caractéristique et en remplaçant l'intégrale u_1 par une seconde intégrale u_2 de l'équation adjointe, on voit que toute intégrale z de l'équation proposée est constante sur chaque caractéristique.

SÉANCE DU 9 JUILLET 1913.

PRÉSIDENCE DE M. FOUCHÉ.

SÉANCE DU 22 OCTOBRE 1913.

PRÉSIDENCE DE M. COSSERAT.

M. d'Ocagne offre à la Société mathématique une Notice qu'il a rédigée sur Albert Ribaucour et rappelle à grands traits les découvertes importantes de Ribaucour en Géométrie.

SÉANCE DU 12 NOVEMBRE 1913.

PRÉSIDENCE DE M. COSSERAT.

Communication :

M. Bioche : *Sur certains ombilics.*

Il peut arriver qu'en un point simple m d'une surface le plan tangent coupe celle-ci suivant une section ayant un point triple en M . Ce point est alors une sorte d'ombilic par lequel passent trois lignes de courbure et trois lignes asymptotiques; ces dernières étant tangentes aux branches de la section faite par le plan tangent.

Si les tangentes aux trois lignes asymptotiques sont réelles, les tangentes aux lignes de courbure le sont aussi, et il y a une tangente de chaque espèce entre deux de l'autre. En particulier, si deux tangentes de même espèce se confondent, elles se confondent avec une tangente d'espèce différente.

Si l'une des tangentes considérées est bissectrice des deux autres tangentes de même espèce, elle est bissectrice de deux des tangentes d'espèce différente et perpendiculaire à la troisième. En particulier, si deux tangentes de même espèce sont isotropes, deux des tangentes de l'autre espèce sont isotropes, et les tangentes réelles des deux espèces sont rectangulaires.

SÉANCE DU 26 NOVEMBRE 1913.

PRÉSIDENCE DE M. COSSERAT.

Élections :

Sont élus à l'unanimité, membres de la Société : M. Oswald Veblen, présenté par MM. Eisenhardt et P. Boutroux; M. Edward Kasner, présenté par MM. Eisenhardt et P. Boutroux; M. V. Kostitzin, présenté par MM. Lusin et Kivéliovitch.

Communications :

M. Kœnigs : *Sur les mouvements à deux paramètres doublement décomposables et les surfaces engendrées de deux manières par le mouvement d'une courbe invariable.*

Soient A et C deux corps dont le mouvement relatif dépend de deux paramètres; ce mouvement est dit *décomposable*, s'il existe un corps B intermédiaire tel que le mouvement relatif de B par rapport à A et celui de C par rapport à B dépendent chacun d'un seul paramètre. Le mouvement est dit *doublement décomposable*, s'il existe un autre corps D possédant la même propriété que le corps B. Si l'on désigne par M un point quelconque du corps C, ce point M possède dans B et D deux courbes trajectoires γ_B^M, γ_D^M et dans A une surface trajectoire Φ_A^M . Il est clair que Φ_A^M est le lieu des courbes γ_B^M, γ_D^M au cours du mouvement de B par rapport à A et de D par rapport à A.

M. Kœnigs donne un exemple d'un tel mouvement fondé sur la considération d'un quadrilatère gauche articulé ABCD dans lequel les côtés opposés sont égaux. Il existe une déformation de ce quadrilatère dans laquelle les angles des plans menés par un côté quelconque et les six côtés adjacents demeurent constants; si l'on élève alors en A, B, C, D les perpendiculaires a, b, c, d aux plans DAB, ABC, BCD, CDA, deux perpendiculaires a et b forment avec la tige AB un système invariable Σ_B , et l'on a de même les systèmes invariables $\Sigma_{BC}, \Sigma_C, \Sigma_{DA}$, articulés suivant les axes a, b, c, d .

Si l'on imagine alors quatre corps $\Sigma_A, \Sigma_B, \Sigma_C, \Sigma_D$ pouvant tourner librement autour de a, b, c, d respectivement et réunis par des engrenages hyperboloïdiques à la Bélanger, de sorte que les vitesses de A par rapport à Σ_{AB} étant Ω_{AB}^A et de même pour les sept autres Ω analogues, les rapports des vitesses angulaires

$$\begin{aligned} \Omega_{AB}^A : \Omega_{AB}^B &= \rho_{AB}, & \Omega_{BC}^B : \Omega_{BC}^C &= \rho_{BC}, \\ \Omega_{CD}^C : \Omega_{CD}^D &= \rho_{CD}, & \Omega_{DA}^D : \Omega_{DA}^A &= \rho_{DA} \end{aligned}$$

soient constants.

Si l'on choisit convenablement ces rapports, l'établissement des engrenages n'empêche pas la déformation du système articulé et le mouvement du corps Σ_C par rapport au corps Σ_A est à deux paramètres et doublement décomposable comme le manifeste l'existence des corps intermédiaires Σ_B, Σ_D . La courbe γ_B^M est une sorte d'épicycloïde gauche engendrée par un point d'un hyperboloïde de révolution virant sur un autre hyperboloïde de révolution. De même γ_D^M . La surface Φ_A^M résulte de la courbe γ_B^M (ou de la courbe γ_D^M) solidaire elle-même d'un hyperboloïde de révolution qui vire sur un autre. Ces surfaces nouvelles offrent, comme on voit, la particularité de contenir deux familles de courbes égales.

Pour ce qui est des valeurs des rapports

$$\rho_{AB}, \quad \rho_{BC}, \quad \rho_{CD}, \quad \rho_{DA},$$

on a

$$\rho_{AB} = \rho_{CD} = -\frac{1}{\rho_{BC}} = -\frac{1}{\rho_{DA}} = n$$

où n est une constante quelconque.

Lorsque n est commensurable, la surface Φ_A^M est algébrique ainsi que les courbes γ_B^M, γ_D^M .

M. Coblyn : *Sur les couples de nombres premiers.*

La présente Note a pour objet d'examiner les ressources qu'offre l'Arithmétique élémentaire pour rechercher s'il y a une limite à la série des nombres premiers dont la différence est le nombre 2.

Tout d'abord, de tels nombres sont de la forme

$$(1) \quad 6P \pm 1;$$

P sera l'ordre du couple de nombres, premiers ou non, représenté par l'expression (1); on peut construire un crible donnant par exhaustion les ordres des couples de nombres premiers.

Si la série des nombres premiers est limitée, à partir d'un certain rang, l'expression

$$6\alpha\beta + \varepsilon\alpha + \varepsilon'\beta,$$

dans laquelle on donne à α et β toutes les valeurs entières possibles et où ε et ε' représentent l'unité affectée du signe + ou du signe —, doit représenter tous les nombres entiers.

D'autre part, l'auteur démontre ce corollaire du théorème de Wilson :

Pour que le nombre p soit premier, il faut et il suffit que le nombre

$$(r-1)!(p-r)! + (-1)^{r-1}$$

soit multiple de p , r étant un entier quelconque, premier ou non, inférieur à p .

On en déduit que

$$\frac{4(6p-2)!}{36p^2-1}$$

aura comme reste

$$\begin{array}{ll} -(6p+3) & \text{si } 6p-1 \text{ et } 6p+1 \text{ sont tous deux premiers,} \\ 0 & \text{si } 6p-1 \text{ et } 6p+1 \text{ sont tous deux composés.} \\ -2(6p+1) & \text{si } 6p-1 \text{ seul est premier,} \\ 6p-1 & \text{si } 6p+1 \text{ seul est premier.} \end{array}$$

Enfin, si l'un des nombres $6p - 1$ ou $6p + 1$ est composé, le produit $36p^2 - 1$ peut être décomposable de plusieurs manières en produit de deux facteurs; on peut trouver alors un nombre premier $6\alpha + \varepsilon$, α étant plus petit que p , qui divisera

$$6p + \varepsilon' \quad \text{et} \quad p - \varepsilon\varepsilon'\alpha.$$

SÉANCE DU 10 DÉCEMBRE 1913.

PRÉSIDENCE DE M. FOUCHÉ.

SÉANCE DU 17 DÉCEMBRE 1913.

PRÉSIDENCE DE M. COSSERAT.

Élections :

Sont élus à l'unanimité membres de la Société, M. A. Bilimovitch, présenté par MM. Appell et Borel, et M. de Hoorn, présenté par MM. Borel et Montel.

Communications :

M. G. Bouligand : *Le problème de Dirichlet, relatif à l'équation $\Delta u = \mu u$ pour un cylindre indéfini.*

Ce problème s'énonce ainsi : trouver une solution de l'équation

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \mu u$$

continue ainsi que ses dérivées premières et secondes à l'intérieur du cylindre, régulière à l'infini, et prenant sur le cylindre des valeurs données $H(s, z)$ (Oz est une parallèle aux génératrices; s , l'arc de section droite). Nous supposerons l'intégrale $\int |H(s, z)| dz$ uniformément convergente.

Le problème ainsi posé n'est jamais indéterminé, car aucune solution de (1), régulière à l'infini, ne s'annule sur le cylindre sans s'annuler à l'intérieur. Par contre, il existe des solutions, non régulières à l'infini et s'annulant sur le cylindre : telles sont les fonctions

$$\varphi_h(x, y) e^{\pm \sqrt{\mu + \alpha_h^2} z} \quad \text{pour} \quad \mu + \alpha_h^2 > 0$$

et

$$\varphi_h(x, y) \frac{\cos}{\sin} (\sqrt{-\mu - \alpha_h^2} z) \quad \text{pour} \quad \mu + \alpha_h^2 < 0,$$

où φ_h désigne une fonction fondamentale de la section droite (il s'agit naturellement de fonctions fondamentales s'annulant au contour) et $-\alpha_h^2$ la constante caractéristique correspondante.

THÉOREME. — *Si l'on a $\mu + \alpha_h^2 < 0$, les valeurs $\Pi(s, z)$ prises sur le cylindre par une solution $F(x, y, z)$ de l'équation (1), régulière à l'infini, satisfont aux deux relations*

$$(2) \quad \int_C \frac{d\varphi_h}{dn} ds \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(s, z) \frac{\cos}{\sin} (\sqrt{-\mu - \alpha_h^2} z) dz = 0.$$

C'est ce qu'on voit en appliquant la formule de Green

$$\iint \left(U \frac{dV}{dn} - V \frac{dU}{dn} \right) dS = 0$$

aux deux fonctions

$$U = F(x, y, z) \quad \text{et} \quad V = \varphi_h \frac{\cos}{\sin} (\sqrt{-\mu - \alpha_h^2} z)$$

(le domaine d'intégration sera un cylindre droit dont on éloignera indéfiniment les bases de part et d'autre.

Conséquence. — Supposons qu'on ait

$$-\alpha_{p+1}^2 \leq \mu \leq -\alpha_p^2,$$

le théorème précédent nous donne $2p$ conditions de possibilité : savoir les conditions (2) pour $h = 1, 2, \dots, p$ (si l'on suppose $\mu + \alpha_p^2 = 0$, le nombre de ces conditions s'abaisse d'un nombre égal à l'ordre de multiplicité de $-\alpha_p^2$).

Nous nous trouvons ainsi en présence de conditions nécessaires à remplir par $\Pi(s, z)$ toutes les fois qu'il existe au moins une constante caractéristique de la section droite supérieure à μ .

Conditions suffisantes. — Nous supposons que $H(s, z)$ puisse se mettre sous la forme

$$H(s, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(s, \lambda) \cos \lambda z \, d\lambda + \int_{-\infty}^{+\infty} B(s, \lambda) \sin \lambda z \, d\lambda,$$

et que les intégrales $\int |A(s, \lambda)| \, d\lambda$ et $\int |B(s, \lambda)| \, d\lambda$ soient uniformément convergentes.

Si $H(s, z)$ est ainsi choisi, on démontre que les conditions (2) suffisent à assurer l'existence d'une solution de notre problème : celle-ci sera donnée par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x, y, \lambda) \cos \lambda z \, d\lambda + \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, y, \lambda) \sin \lambda z \, d\lambda,$$

où $F(x, y, \lambda)$ et $G(x, y, \lambda)$ sont les solutions de l'équation

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = (\lambda^2 + \mu)V,$$

qui prennent respectivement les valeurs $A(s, \lambda)$ et $B(s, \lambda)$ sur le contour de la section droite.

M. Fouché : *Sur l'axiome d'Archimède et la continuité géométrique.*

M. E. Cartan : *Remarques sur la composition des forces.*

Le problème de la composition des forces en Statique peut être énoncé mathématiquement de la manière suivante (voir par exemple une Note de M. Darboux, dans la *Mécanique* de Despeyroux) :

Déterminer une loi de composition de vecteurs d'origine donnée O satisfaisant aux deux conditions suivantes :

- 1° *La résultante d'un nombre quelconque de vecteurs ne dépend pas de l'ordre suivant lequel se fait la composition ;*
- 2° *La loi de composition est invariante par le groupe de rotations autour du point O.*

En partant de cet énoncé, et en admettant que la loi de composition respecte la continuité, M. Darboux a trouvé la loi la plus générale

qui se déduit facilement de la loi classique; il se sert à cet effet de constructions dans l'espace.

Le problème pourrait être traité *dans le plan*, les conclusions seraient alors à modifier si l'on ne tient compte que des rotations proprement dites (sans retournement) autour du point O.

Le problème peut aussi être généralisé en substituant à la considération des *vecteurs* celle de figures absolument quelconques. Pour restreindre un peu l'indétermination de ce nouveau problème, on devra convenir que deux systèmes (S) et (Σ) de figures sont *équivalents* s'il existe entre les figures des deux systèmes une correspondance univoque telle qu'à la résultante des deux figures F_1 et F_2 de (S) corresponde la résultante des deux figures correspondantes Φ_1 et Φ_2 de (Σ).

Avec cette convention de langage, on arrive à des résultats plus précis. Étant donnée une figure quelconque F il sera possible, si la loi de composition est supposée exister, de définir ce qu'il faut entendre par la figure x (F) où x désigne un nombre réel quelconque. Il faudra, pour cela, faire, sur le système (S), certaines hypothèses de la nature de celles qu'on est amené à faire dans la théorie de la mesure des grandeurs. Il existera alors un entier n (ordre du système) tel que toute figure de (S) puisse, d'une manière et d'une seule, se mettre sous la forme.

$$x_1 F_1 + x_2 F_2 + \dots + x_n F_n,$$

où $F_1, F_2, \dots, F_n$ désignent n figures particulières, formant une *base*. D'après cela, toute figure du système est bien définie par les n nombres réels ($x_1, x_2, \dots, x_n$), qu'on peut appeler ses coordonnées.

Toute rotation autour de O se traduira par une transformation continue sur les coordonnées laissant invariante la loi de composition

$$x''_1 = x_1 + x'_1, x''_2 = x_2 + x'_2, \dots, x''_n = x_n + x'_n;$$

ce sera donc une substitution linéaire et homogène.

Le problème se ramène alors, comme on le voit, à la recherche des groupes linéaires et homogènes à n variables isomorphes au groupe des rotations autour de O.

Dans l'espace, on trouve facilement que n est au moins égal à 3 et que, si $n = 3$, le système (S) est équivalent au système des vecteurs issus de O, la loi de composition étant l'addition géométrique. On déduit facilement de là que chaque figure F est de révolution autour du vecteur qui lui correspond et que deux figures F correspondant à deux vecteurs de même longueur sont égales. Il est d'ailleurs facile d'indiquer la solution générale du problème pour $n > 3$.

Dans le plan, n est au moins égal à 2. Si n est égal à 2, le système (S) peut être équivalent au système des vecteurs issus de O, la loi de composition étant l'addition géométrique. Mais, *il y a d'autres solutions*. D'une manière générale, *tout système (S) d'ordre r est équivalent au système formé des polygones réguliers de p côtés ayant pour centre le point O, p étant un entier fixe, d'ailleurs arbitraire; la loi de composition de ces polygones serait définie par la formule*

$$z''^p = z^p + z'^p,$$

en désignant par z, z', z'' les affixes de l'un des sommets de chacun des polygones composants et du polygone résultant. On retrouve la loi de composition des forces pour $p = 1$.



TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
État de la Société au début de 1913.....	1
Liste des périodiques reçus.....	12
Rapport de la Commission des comptes.....	24
Comptes rendus des séances.....	15
Communications : MM. <i>Andoyer</i> : Sur un changement de variables.....	23
<i>Barré</i> : Sur les surfaces engendrées par des hélices circulaires.....	36
<i>Bioche</i> : Sur l'aire latérale du cône de révolution tronqué.....	15
— Sur les courbes de largeur constante.....	19
— Sur certains ombilics.....	53
<i>Bouligand</i> : Sur la fonction de Green du cylindre indéfini.....	50
— Le problème de Dirichlet, relatif à l'équation $\Delta u = \mu u$ pour un cylindre indéfini.....	50
<i>Boutroux</i> : Le problème de l'intégration des équations différentielles.....	11
<i>Bricard</i> : Sur les mouvements plans à deux paramètres, doublement décomposables.....	27
<i>Cahen</i> : Sur un théorème, généralisation des lois de réciprocité.....	19
<i>Cartan</i> : Remarques sur la composition des forces.....	58
<i>Coblyn</i> : Sur les couples de nombres premiers.....	55
<i>Denjoy</i> : Sur les formules de M. Jensen et leurs applications à l'étude des valeurs rares des fonctions entières.....	38
<i>Fatou</i> : Sur la convergence absolue des séries trigonométriques.....	16
— Sur les conditions d'aplanétisme pour un système optique quelconque.....	37
<i>Fouché</i> : Sur l'axiome d'Archimède et la continuité géométrique.....	58
<i>Garnier</i> : Sur la rationalisation des coefficients des équations différentielles algébriques.....	35
— Sur les simplifications du potentiel élastique dues à la symétrie cristalline.....	38
<i>Giraud</i> : Sur une classe de transcendentes admettant un théorème de multiplication.....	33
<i>Got</i> : Sur les domaines fondamentaux de certains groupes fuchsien.....	47
<i>Halphen</i> : Sur un problème d'énumération.....	19
<i>Kellog</i> : Sur l'indépendance linéaire des fonctions de plusieurs variables.....	19
<i>Kænigs</i> : Sur les mouvements à deux paramètres, doublement décomposables et les surfaces engendrées de deux manières par le mouvement d'une courbe invariable.....	53
<i>Lebesgue</i> : Sur des cas d'impossibilité du problème de Dirichlet ordinaire.....	17
— Observations sur une Communication de M. Z. de Glazek.....	21

	Pages.
<i>Lebesgue</i> : Sur l'équivalence du problème de Dirichlet et du problème du calcul des variations considéré par Riemann.....	48
<i>Lindelöf</i> : Sur une démonstration nouvelle d'un théorème fondamental sur les suites de fonctions monogènes.....	40
<i>Montel</i> : Sur quelques généralisations nouvelles des théorèmes de M. Picard.	17
— Sur les équations linéaires aux dérivées partielles au point de vue des variables réelles.....	51
<i>Podtiaguine</i> : Sur la convergence de certaines intégrales multiples.....	35
<i>Sire</i> : Sur la puissance des points singuliers transcendants des fonctions inverses des fonctions entières.....	21
<i>Vessiot</i> : Sur la mise en équation des problèmes du calcul des variations....	41
<i>Zoard de Göcse</i> : Sur l'exemple d'une surface dont l'aire est égale à zéro et qui remplit un cube.....	29



QA Société mathématique de
1 France, Paris
S59 Bulletin
t.40-41
Physical &
Applied Sci.
Serials

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY
